Pierre-Louis CAYREL
Licence 1 Algèbre Linéaire
Université de Paris 8

2008-2009

Feuille d'exercices

70 exercices d'algèbre linéaire

1 Espaces vectoriels

1.1 Structure d'espace vectoriel

Exercice 1 On définit sur $E = \mathbb{R}^2$

– l'addition $\oplus$ par

$$(x, z) \oplus (x', z') = (x + x', z + z')$$

– la multiplication externe $\odot$, ayant $\mathbb{R}$ comme corps des scalaires, par

$$\lambda \odot (x, z) = (2x, 0).$$

E muni de ces deux lois est-il un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2

Exercice 3 Pour x et y alors $\mathbb{R}_+^*$ et λ réel, on pose

$$x \oplus y = xy \quad \text{et} \quad \lambda \odot x = x^\lambda.$$

Montrer que $(\mathbb{R}_+^*, \oplus, \odot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1.2 Indépendance linéaire, base

1.2.1 Indépendance linéaire.

Soit $\{x, y, z, t\}$ une famille libre d'éléments d'un espace vectoriel E. Les éléments suivants sont-ils linéairement indépendants ?

a. $x, 2y$ et z

b. x et z

c. $x, 2x + t$ et t

d. $3x + z, z$ et $y + z$

e. $2x + y, x - 3y, t$ et $y - x$.

1.2.2 Base de $\mathbb{C}$.

Soit E l'ensemble des nombres complexes considéré comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

a. Quelle est la dimension de E ?

b. Soit $z = a + ib \in E$. A quelle condition z et $\bar{z}$ forment-t-ils une base de E ? Dans ce cas, x et y étant des réels donnés, calculer les composantes λ et μ de $x + iy$ dans la base $(z, \bar{z})$.

Exercice 4 Soient a, b, c trois réels positifs distincts. On note f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f_a(x) = \ln(ax)$$

Montrer que $\{f_a, f_b, f_c\}$ est une partie liée de $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.

1.3 Sous-espaces vectoriels

Exercice 5 Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$. Quels sont les sous-espaces vectoriels de E ?

1.3.1 Le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

a. Montrer que $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.

b. $\mathbb{R}$ est-il un sous-espace du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$?

c. Même question pour $\{\lambda(a+bi) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ où $a+bi \in \mathbb{C}$ est fixé.

1.3.2 Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

a. Montrer que E est engendré
- par les vecteurs 1 et i
- par les vecteurs 1 et j.

b. Déterminer des systèmes générateurs de E^2 et E^3.

c. Que peut-on dire si l'on considère $\mathbb{C}$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{C}$?

Exercice 6 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

a. Démontrer : $F \cup G$ est un *s.e.v.* de $E \Leftrightarrow F \subset G$ ou $G \subset F$.

b. En déduire que si $F \neq E$ et $G \neq E$, alors $F \cup G \neq E$.

Exercice 7 Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

a. $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-4z=0\}$

b. $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-2y+z=1\}$

(c) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy-z=0\}$

c. $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-2y=0 \quad \text{et} \quad z-x=0\}$

d. $E = \{(\alpha,\beta,3\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \beta \in \mathbb{R}\}$

e. $F_c = \{(\alpha+c,-\alpha,\alpha+\beta) \mid \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \beta \in \mathbb{R}\}$ avec $c \in \mathbb{R}$ fixé.

Déterminer (s'il y a lieu) des systèmes générateurs, décider si le sous-espace est une droite ou un plan de $\mathbb{R}^3$, donner les équations paramétriques et cartésiennes.

Exercice 8 Dans $\mathbb{R}^3$, montrer que le sous-espace engendré par $u=(2,0,-1)$ et $v=(3,2,-4)$ coïncide avec le sous-espace engendré par $w=(1,2,-3)$ et $t=(0,4,-5)$.

Exercice 9 Soit α un paramètre réel, soient F et G_α les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par les équations :

$$F : x-y+z=0$$

$$G_\alpha : \left\{ \begin{array}{rcrcl} 3x & - & 2z & = & 0 \\ y & - & \alpha z & = & 0 \end{array} \right.$$

Déterminer des systèmes générateurs de F, G, $F\cap G$ et $F+G$ et des équations paramétriques et cartésiennes de ces sous-espaces. Interpréter géométriquement les résultats.

Exercice 10 Pour λ paramètre réel, on appelle P_λ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $u=(2,5,1,3)$ et $v_2=(4,10,\lambda,6)$.

a. Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que P_λ soit un plan.

b. Déterminer, pour tout λ, les équations cartésiennes et paramétriques de P_λ. Soit D_μ la droite de $\mathbb{R}^4$ engendrée par le vecteur $w_\mu = (\mu, 15, \mu, 9)$.

c. Donner les équations cartésiennes de D_μ

d. A quelles conditions sur λ et μ, D_μ est contenue dans P_λ ?

Exercice 11 Soit G le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs :

$$u = (1, -1, 2, -2) \qquad v = (4, 0, 1, -5) \qquad w = (3, 1, -1, -3)$$

Soit $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y = 0 \text{ et } x - y + z + 2t = 0\}$.

a. Déterminer la dimension de G.

b. Montrer que H est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ et déterminer sa dimension.

c. Déterminer les dimensions des sous-espaces $G \cap H$ et $G + H$.

d. Trouver un sous-espace F de $\mathbb{R}^4$ tel que $(G + H) \oplus F = \mathbb{R}^4$.

Exercice 12 **a.** Soit E le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs :

$$u = (1, 2, -1, -1) \qquad \text{et} \qquad v = (2, 3, 0, -1)$$

Calculer la dimension de E.

b. Soit F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ formé des vecteurs (x_1, x_2, x_3, x_4) tels que $3x_1 - x_3 = 0$ et $x_1 + x_3 - x_4 = 0$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

c. Calculer les dimensions de $E \cap F$ et du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, $E + F$, engendré par $E \cup F$.

Exercice 13 Soient les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$u = (-1, 0, 3, -9) \quad v = (3, -4, 3, 7) \quad w = (7, -12, 15, 3)$$

$$a = (1, -1, 0, 4) \quad b = (1, 0, 3, -1).$$

a. Montrer que v (resp. w) appartient au sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $\{a, u\}$ (resp. $\{u, v\}$).

b. Notons F (resp. G) le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $\{u, v, w\}$ (resp. $\{a, b\}$). Déterminer la dimension et une base des sous-espaces $F, G, F \cap G$ et $F + G$ (cette question ne nécessite pas de calculs, si on utilise des arguments de dimension).

c. Montrer que la droite H de $\mathbb{R}^4$ engendré par le vecteur $t = (1, -1, 1, 1)$ est un supplémentaire de $F + G$. En déduire un supplémentaire de chacun des sous-espaces $F \cap G$, F et G.

d. Donner une interprétation géométrique des résultats trouvés.

Exercice 14 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur K, on considère E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E de dimensions respectives n_1 et n_2.

a. Donner un encadrement de $\dim(E_1 \cap E_2)$ et de $\dim(E_1 + E_2)$.

b. Montrer l'égalité :

$$\dim(E_1 + E_2) + \dim(E_1 \cap E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2)$$

(Suggestion : considérer une base $\mathcal{B}_0$ de $E_1 \cap E_2$, la compléter en une base $\mathcal{B}_1$ de E_1 en une base $\mathcal{B}_2$ de E_2 ; extraire de $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ une base de $E_1 + E_2$).

1.4 Hyperplan

Exercice 15 On appelle **hyperplan (vectoriel)** de E tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$. On considére deux hyperplans distincts de E : F et G. Déterminer la dimension de $F \cap G$ par les deux méthodes suivantes :

a. Utiliser l'exercice 14.

b. Montrer qu'il existe deux vecteurs a et b de E tels que :

$$a \in F, \quad a \notin G, \quad b \in G \quad et \quad b \notin F$$

Montrer que le sous-espace vectoriel de E engendré par a et b est un supplémentaire de $F \cap G$.

Exercice 16 Soit E un espace vectoriel réel de dimension n.

a. Montrer que si f est une forme linéaire non nulle sur E, alors $\ker f$ est un hyperplan de E, c'est-à-dire un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$. Montrer qu'il existe des réels $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ non tous nuls tels que :

$$u = (x_1, \ldots x_n) \in \ker f \iff \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$$

b. Soit $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x - 2y + z - t = 0\}$. Montrer que H est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$. Existe-t-il une forme linéaire f sur $\mathbb{R}^4$ telle que $H = \ker f$?

c. Soit H un hyperplan de E. Montrer qu'il existe une forme linéaire sur E telle que $\ker f = H$. (On pourra compléter une base de H et définir f sur cette base). f est-elle unique ?

d. Vérifier qu'un hyperplan H de E peut être défini par une des trois conditions équivalentes suivantes :

(i) H est un sous espace vectoriel de E de dimension $n-1$.

(ii) H est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E.

(iii) H est l'ensemble des solutions d'une équation linéaire de la forme $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$ où $(\alpha_1, \ldots \alpha_n) \in \mathbb{R}_n$ et $(\alpha_1, \ldots \alpha_n) \neq (0, \ldots 0)$. (On dit que cette équation est une **équation cartésienne** de l'hyperplan H).

e. Quelle est l'équation cartésienne d'un hyperplan de $\mathbb{R}^3$?

f. Montrer l'équivalence des définitions suivantes :

(j) D est une droite de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire un sous-espace de dimension 1.

(jj) D est l'ensemble des solutions d'un système linéaire

$$(*) \begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \end{cases}$$

où (a, b, c) et (a', b', c') ne sont pas colinéaires.

((*) est un système d'équations cartésiennes de D).

2 Applications linéaires

2.1 Notion de linéarité

Exercice 17 On note $\mathcal{C}([0,1])$ (resp. $\mathcal{C}^1([0,1])$) le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions définies et continues (resp. ayant une dérivée continue) de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et E_n est le sous-espace de $\mathbb{C}[X]$ des polynômes de degré au plus n.

Parmi les applications suivantes lesquelles sont linéaires. Déterminer, pour chacune de celles-ci, son noyau et son image et, dans le cas d'espaces de dimension finie, sa matrice. Dire si l'application est injective, surjective, bijective.

$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_1(x) = 2x^2$
$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_2(x) = 4x - 3$
$f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f_3(x, y) = (0, x)$
$f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f_4(x, y) = (y, x)$
$f_5 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f_5(x, y) = \sqrt{3x^2 + y^2}$
$f_6 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}, f_6(z, z') = 3z - iz'$
$f_7 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}, f_7(z, z') = zz'$
$f_8 : \mathcal{C}([0, 1]) \to \mathbb{R}, f_8(g) = g(1)$
$f_9 : \mathcal{C}([0, 1]) \to \mathbb{R}, f_9(g) = |g|$
$f_{10} : \mathcal{C}^1([0, 1])) \to \mathcal{C}([0, 1]), f_{10} : (g) = gg'$
$f_{11} : \mathcal{C}([0, 1])) \to \mathbb{R}, f_{11}(g) = \max\{g(t), t \in [0, 1]\}$
$f_{12} : E_n \to E_n, f_{12}(P) = P'$
$f_{13} : \mathcal{C}([0, 1]) \to \mathbb{R}, f_{13}(g) = g'(\frac{1}{2}) + \int_0^1 g(t)dt$
$f_{14} : E_n \to E_n, f_{14}(P) = XP$
$f_{15} : E_n \to E_n, f_{15}(P) = P(2)$
$f_{16} : E_n \to E_n, f_{16}(P) = XP + 1$

Exercice 18 **a.** Tracer le graphe d'une application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ injective et non surjective.
b. Tracer le graphe d'une application g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ surjective et non injective.
c. Tracer le graphe d'une application linéaire h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ injective et non surjective (resp. surjective et non injective).
d. Montrer que les applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont les applications de la forme : $x \to \alpha x$ où α est un réel fixé.

Exercice 19 Soient E un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$ et (e_1, e_2, e_3) une base de E. On considère deux endomorphismes u et v de E définis par :

$$u(e_1) = u(e_2) = u(e_3) = e_1 + e_2 + e_3$$

$$v(e_1) = e_2, \quad v(e_2) = e_3, \quad v(e_3) = e_1$$

a. Montrer que l'on a $u \circ v = v \circ u = u$.
b. Pour p et q des entiers naturels non nuls, calculer u^2, v^3 puis u^p et v^q en fonction de u, v, v^2 .

Exercice 20 Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$. Soit un vecteur x tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$. Montrer que $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ est une base de E.

2.2 Applications linéaires, prolongement par linéarité,isomorphismes

Exercice 21 Soit E_1 l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 1.
a. Quelles sont les bases canoniques des espaces vectoriels $E_1, \mathbb{R}^2, \mathbb{C}$?
b. Montrer que le choix de ces bases permet d'identifier ces trois espaces, on dit qu'il sont isomorphes.

c. Soit T l'endomorphisme de E_1 défini par $T(P) = P'$. Quel endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ (resp. de $\mathbb{C}$) l'endomorphisme T induit-il par l'isomorphisme défini en (b) ?

Exercice 22 Dans chacun des cas suivants, vérifier s'il existe une application linéaire T_i de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant les conditions données :

a. $T_1((1,-1)) = (2,3)$ $\qquad$ $T_1((2,-2)) = (3,2)$

b. $T_2((1,-1)) = (2,3)$ $\qquad$ $T_2((1,1)) = (3,2)$

c. $T_3((1,-1)) = (2,3)$ $\qquad$ $T_3((3,-3)) = (6,9)$

Exercice 23 Soient E un espace vectoriel réel de dimension 3, (e_1, e_2, e_3) une base de E et λ un réel. Montrer que les relations :

$$\varphi_\lambda(e_1) = e_1 + e_2, \quad \varphi_\lambda(e_2) = e_1 - e_2, \quad \varphi_\lambda(e_3) = e_1 + \lambda e_3$$

définissent une application linéaire φ_λ de E dans E.
Comment choisir λ pour que φ_λ soit injective ? surjective ?

Exercice 24 Dans chacun des cas suivants, déterminer si les espaces vectoriels E et F sont isomorphes ; si oui, exhiber un ismorphisme de E dans F.

a. $E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x - y + z = 0\}$. F_1 est le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $f_1 = (1,2,3)$ et $f_2 = (1,0,1)$.

b. $E_2 = \{\lambda(1, i, -1), \lambda \in \mathbb{C}\}$. $F_2 = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4, z_1 - z_2 = 0, z_3 - 2z_4 = 0\}$.

c. $E_3 = \{\lambda X^n + \mu X^m, (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}$. $F_3 = F_2$.

Exercice 25 Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions indéfiniment dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit une application sur E par :

$$u(f)(x) = f'(x) - f(x) \qquad (f \in E, x \in \mathbb{R})$$

a. Montrer que u est un endomorphisme de E.

b. Déterminer le noyau et l'image de u (indication : on pourra utiliser le fait que $e^{-x}(f' - f)$ est la dérivée de $e^{-x} f$.)

c. Que peut-on en déduire ?

Exercice 26 Trouver un isomorphisme entre les R - espaces vectoriels $E = (\mathbb{R}, +, .)$ et $F = (\mathbb{R}_+^*, \oplus, \odot)$.

2.3 Projecteurs

Exercice 27 Soit E un espace vectoriel et I l'endomorphisme identique de E. On appelle projecteur de E tout endomorphisme p de E tel que $p^2 = p$.

a. Démontrer l'équivalence des propositions suivantes où p est un endomorphisme de E :

- **(i)** p est un projecteur,
- **(ii)** $I - p$ est un projecteur,
- **(iii)** $p(I - p) = (I - p)p = 0$.

b. Montrer que si p est un projecteur, $E = \operatorname{Im} p \oplus \ker p$. Bien choisir une base de E et écrire la matrice de p dans cette base.

c. Soit $E = \mathbb{R}^2$. L'endomorphisme f de E est défini par :

$$f((x,y)) = (x - y, y - x) \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

Déterminer l'image et le noyau de f. f est-il un projecteur ?

2.4 Notion de rang

Exercice 28 Soient u et v deux endomorphismes d'un K-espace vectoriel E de dimension n. On pose :

$$\begin{aligned}F &= \{u(z)+v(z), z \in E\}\\ G &= \{u(x)+v(y), x \in E, y \in E\}\\ &\dim\ker(v) = p\\ &\dim\ker(u \circ v) = q\end{aligned}$$

a. Comparer F et G et en déduire que : $\mathrm{rg}(u+v) \leqslant \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$.

b. Montrer que $\ker(v) \cap \ker(u \circ v)$.

c. Montrer qu'il existe une base $(a_1, \dots, a_n)$ de E telle que :

- **(i)** $(a_1, \dots, a_p)$ soit une base de $\ker v$,
- **(ii)** $(a_1, \dots, a_p, \dots, a_q)$ soit une base de $\ker(uov)$,
- **(iii)** $(v(a_{p+1}), \dots, v(a_q))$ soit une famille libre de $\ker u$.

d. En déduire l'inégalité : $\mathrm{rg}(u \circ v) \geqslant \mathrm{rg}\, u + \mathrm{rg}\, v - n$.

2.5 Exercices plus difficiles

Exercice 29 Soient E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$, f un endomorphisme de E, construire dans les trois cas suivants deux automorphismes u et v de E tels que $f = u - v$.

a. f est bijective,

b. $\ker f + \operatorname{Im} f = E$,

c. f est quelconque.

Exercice 30 Soient E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$ et f un endomorphisme de E. On pose :

$$f^0 = Id_E, \quad \text{et pour } k \geqslant 1,\ f^k = f^{k-1} \circ f \text{ et} N_k = \ker f^k, I_k = \operatorname{Im} f^k.$$

Démontrer que :

a. pour tout entier k, N_k est contenu dans N_{k+1} et I_k contient I_{k+1}.

b. il existe un entier p tel que : $\forall k < p, N_k \neq N_{k+1}$ et $\forall k \geqslant p, N_k = N_{k+1}$.

c. $\forall k < p, I_k \neq I_{k+1}$ et $\forall k \geqslant p, I_k = I_{k+1}$.

d. $E = I_p \oplus N_p$

e. la restriction de f à I_p induit un automorphisme de I_p.

3 Matrices

3.1 Matrice d'une application linéaire

Exercice 31 Soit i un entier compris entre 1 et 6 et f_i l'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ dont la matrice par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$, est :

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -4 \end{pmatrix} \quad A_5 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \lambda \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$$

a. Dans chaque cas, préciser les valeurs de n et m.

b. Pour $i = 1, 2, 3$, calculer $f_i(u)$ sous forme matricielle pour $u = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

c. Déterminer $\ker f_i$ et $\operatorname{Im} f_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant 6$ (discuter selon la valeur du réel λ).

Exercice 32 Soit h l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice par rapport aux bases (a_1, a_2, a_3) de $\mathbb{R}_3$ et (b_1, b_2) de $\mathbb{R}_2$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad (A = \mathcal{M}(h, (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2))).$$

a. On prend dans $\mathbb{R}^3$ la nouvelle base $(a_1^{'}, a_2^{'}, a_3^{'})$ où

$$a_1^{'} = a_2 + a_3, \quad a_2^{'} = a_3 + a_1 \quad a_3^{'} = a_1 + a_2.$$

Quelle est la nouvelle matrice A_1 de h ? $(A_1 = \mathcal{M}(h, (a_1^{'}, a_2^{'}, a_3^{'}), (b_1, b_2)))$

b. En conservant la base $(a_1^{'}, a_2^{'}, a_3^{'})$ de $\mathbb{R}^3$, on choisit pour base de $\mathbb{R}^2$ $(b_1^{'}, b_2^{'})$ avec

$$b_1^{'} = \frac{1}{2}(b_1 + b_2) \quad b_2^{'} = \frac{1}{2}(b_1 - b_2).$$

Quelle est la nouvelle matrice A_2 de h ? $(A_2 = \mathcal{M}(h, (a_1^{'}, a_2^{'}, a_3^{'}), (b_1^{'}, b_2^{'})))$

Exercice 33 Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension respectives n et m. Soit g une application linéaire de E dans F de rang r.

a. Préciser comment obtenir une base $(a_1, \dots, a_n)$ de E et une base $(b_1, \dots, b_m)$ de F telles que :

$$g(a_i) = b_i \text{ si } 1 \leqslant i \leqslant r \quad \text{et} \quad g(a_i) = 0 \text{ si } \ r < i \leqslant n.$$

Quelle est la matrice de g dans un tel couple de bases ?

b. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$f(x, y, z) = (2x + y + z, -y + z, x + y) \quad ((x, y, z) \in \mathbb{R}^3).$$

Ecrire la matrice de f dans la base canonique. Déterminer un couple de bases pour f comme à la question (a).

3.1.1 Variante du précédent.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$f((x, y, z)) = (2x + y + z, -y + z, x + y) \quad ((x, y, z) \in \mathbb{R}^3)$$

a. Ecrire la matrice de f dans la base canonique.

b. Déterminer un couple de bases (a_1, a_2, a_3) et (b_1, b_2, b_3) telle que la matrice de f par rapport à ces bases soit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 34 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer son image et son noyau.

Exercice 35 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui admet dans la base canonique la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -3 & -3 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

a. Déterminer le noyau et l'image de f.

b. Trouver une base où la matrice de f soit :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 36 Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui a pour matrice A dans la base canonique :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

a. Quel est le rang de A ? Trouver un vecteur a non nul du noyau de u ?

b. Calculer A^2 et en déduire, sans calcul, A^3 , un antécédent b de a par u.

c. Trouver une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de u dans $\mathcal{B}$ soit :

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d. Soit v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui admet dans la base canonique la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de v soit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 37 Soit f un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^2 = 0$. Montrer que f est de rang 1 et qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.2 Calcul matriciel

Exercice 38 Calculer $A.B, B.A, (A+B)^2, A^2+B^2+2A.B$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 39 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A - I$.
Calculer B^n, puis A^n pour $n \geqslant 2$.

Exercice 40 Calculer les inverses des matrices suivantes, quand elles sont inversibles :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & \alpha \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix} \quad ((\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2), \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \gamma & 2 \end{pmatrix} \quad (\gamma \in \mathbb{R})$$

Exercice 41 Pour m dans $\mathbb{C}$, on pose :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer A^2, A^3, A^4. En déduire $(I_4 - A)^n$. Calculer $(I_4 - A)^{-1}$ et $(I_4 - A)^{-n}$.

Exercice 42 Soit $E_{k,l}$ la matrice de $M_n(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients valent 0 sauf le coefficient de la k-ème ligne et l-ème colonne qui vaut 1.

a. Montrer que $\{E_{k,l}, 1 \leqslant k,l \leqslant n\}$ est une base de $M_n(\mathbb{C})$, c'est la base canonique.

b. Etablir les règles de calcul de produit entre les matrices de la base canonique.

c. Calculer les produits $A.E_{k,l}$ et $E_{k,l}.A$ pour $A \in M_n(\mathbb{C})$. Déterminer les matrices A de $M_n(\mathbb{C})$ qui commutent à toute matrice X de $M_n(\mathbb{C})(X.A = A.X)$.

Exercice 43 Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Calculer J^2 et J^3.

b. Montrer que l'ensemble $\mathcal{M}$ des matrices :

$$\begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

où a, b, c sont des réels, est un sous espace vectoriel de dimension 3 de $M_3(\mathbb{R})$. Que peut-on dire du produit de deux matrices de l'ensemble $\mathcal{M}$?

c. Calculer l'inverse de la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

d. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer B^2, puis B^n .

e. Soit $C = I_3 + B$. Calculer C^n .

f. Soit $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que $D^n = \alpha_n D + \beta_n I_3$, où I_3 est la matrice identité 3×3 et α_n et β_n sont des réels que l'on calculera (on pourra aussi utiliser l'exercice 46)

3.3 Changement de base

Exercice 44 Soient E l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 3 et δ l'endomorphisme de E qui à un polynôme associe son polynôme dérivé.

a. Ecrire la matrice C de δ dans la base canonique $\mathcal{C}$ de E.

b. Ecrire la matrice B de δ dans la base $\mathcal{B} = (1, 1 + X, 1 + X^2, 1 + X^3)$.

c. Ecrire la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$ et vérifier la formule du cours.

Exercice 45 Soient (e_1, e_2, e_3) une base de $\mathbb{R}^3$. On pose :

$$a_1 = e_1 + e_2 - e_3, \quad a_2 = e_1 - e_2 + e_3 \quad e_3 = -e_1 + e_2 + e_3.$$

Montrer que $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice, dans la base canonique, est :

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a-b & a+c & c-b \\ b-a & c-a & b+c \\ a+b & a-c & b-c \end{pmatrix}$$

Calculer la matrice de f dans la base $\mathcal{A}$.

Exercice 46 Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice U dans la base canonique :

$$U = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

a. Ecrire la matrice U' de u dans la base : $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

b. Quelle est la matrice P du changement de base ? Calculer P^{-1}.

c. En déduire la matrice U^n et les composantes α_n et β_n dans la base canonique du vecteur transformé de $(1; 0)$ par u^n .

Exercice 47 Soit T l'endomorphisme de $M_2(\mathbb{C})$ qui à une matrice A associe sa matrice transposée ${}^tA$.

a. Ecrire la matrice de T dans la base canonique de $M_2(\mathbb{C})$. Soit $\mathcal{S}$ le sous-espace de $M_2(\mathbb{C})$ des matrices symétriques ($A = {}^tA$). Soit $\mathcal{A}$ le sous-espace de $M_2(\mathbb{C})$ des matrices antisymétriques (${}^tA = -{}^tA$).

b. Donner une base de chacun des sous-espaces $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ et montrer que $M_2(\mathbb{C}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$

c. Ecrire la matrice de T dans la base de $M_2(\mathbb{C})$ construite à partir des bases de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$.

d. Dans $M_3(\mathbb{C})$, quelle base choisirez-vous pour écrire la matrice de T ?

Exercice 48 Soit $A = (a_{i,j})_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$ un élément de $M_n(K)$. On appelle **trace** de A la somme des termes de la diagonale principale de A :

$$\mathrm{Tr}\ (A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}.$$

a. Montrer que l'application Tr $: M_n(K) \to K$ est une forme linéaire.

b. Montrer que Tr $(AB) =$ Tr (BA). Est-ce que Tr $(AB) =$ Tr (A)Tr (B) ?

c. En déduire qu'on ne peut pas trouver de matrices A et B dans $M_n(K)$ telles que

$$AB - BA = I_n.$$

d. En déduire que l'on peut définir la trace d'un endomorphisme ou bien que deux matrices semblables ont la même trace.

e. Montrer que M est une matrice de trace nulle si et seulement si M est somme de commutateurs. (un commutateur est une matrice qui peut s'écrire $AB - BA$ où $(A, B) \in M_n(K)^2$.)

4 Déterminants

4.1 Calcul de déterminants de petite taille.

Polycopié[J.- M.] : Chapitre 5 - Exercices n°2, 5, 9, 14, 17, 22.

Exercice 49 Calculer :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \\ 1 & 5 & 15 & 35 \end{vmatrix}$$

Exercice 50 Calculer, pour a, b, c réels :

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

4.1.1 Extrait du test 2 (1992 - 1993).

Factoriser sur $\mathbb{R}$ le polynôme suivant :

$$P(X) = \begin{vmatrix} X^4 & 2 & 2-1 & 2 \\ 2 & X^4 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & X^4 & 2 \\ 2 & -1 & X^4 & 5 \end{vmatrix}$$

4.2 Calcul de déterminants en dimension n.

Polycopié [J. - M.] : Chapitre 5 - Exercices n°13, 15, 21, 18, 25.

Exercice 51 Soient a, b et c trois réels. Calculer le déterminant $n \times n \quad D = |d_{i,j}|$ défini par :

$$d_{i,i} = b \quad d_{i,j} = a \text{ si } i < j \quad d_{i,j} = c \text{ si } j < i.$$

Indication : Etudier le polynôme $P(X) = |p_{i,j}|$ défini par :

$$p_{i,i} = b + X \quad d_{i,j} = a + X \ \text{ si } i < j \quad d_{i,j} = c + X \ \text{ si } j < i.$$

4.3 Applications des déterminants.

Polycopié [J. - M.] : chapitre 5 exercices n°26, 28, 31, 34, 35.

Exercice 52 Inverser les matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 53 Trouver l'équation de l'hyperplan de $\mathbb{R}^3$ (resp. $\mathbb{R}^4$) engendré par les vecteurs :

$$u = (0, -1, 1) \text{ et } v = (-2, 3, 2)$$

$$(\text{resp. } u_1 = (1, 3, 4, 5),\ u_2 = (1, 2, 3, 4) \text{ et } u_3 = (3, 1, 4, 2)).$$

5 Systèmes linéaires

5.1 Sur le théorèmede caractérisation des solutions d'un système linéaire

Exercice 54 Vérifier que $u_1 = (-3, 0, -1)$ et $u_2 = (0, -1, 0)$ sont solutions du système linéaire :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & -2 \\ -2x & - & y & + & 5z & = & 1 \\ 3x & + & 5y & - & 4z & = & -5 \end{array} \right.$$

Sans aucun calcul, déterminer l'ensemble des solutions de (S).

Exercice 55 Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

Pour quelles valeurs de α, u est-il bijectif ? Pour les autres valeurs de α, déterminer l'image et le noyau de u. En déduire les solutions des systèmes :

$$(S_1) : \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & + & z & = & 1 \\ x & + & y & = & 1 \\ y & + & \alpha z & = & -1 \end{array} \right. \qquad (S_2) : \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & + & z & = & 1 \\ x & + & y & = & 2 \\ y & + & \alpha z & = & 1 \end{array} \right.$$

Exercice 56 **a.** Déterminer l'ensemble H des solutions de l'équation :

$$x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 0.$$

b. Ecrire, sans autres calculs, l'ensemble des solutions de l'équation :

$$x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 1.$$

c. Y a-t-il une équation dont l'ensemble des solutions s'écrive

$$(1, -1, 0, 1) + H?$$

5.2 Matrices échelonnées et rôle des coefficients nuls

Exercice 57 Résoudre les systèmes linéaires dont les matrices complètes sont :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & -5 \\ 0 & 1 & | & 7 \\ 0 & 0 & | & 9 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

5.3 Discussion et résolution de systèmes linéaires

Exercice 58

$$(S_1) : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -2x + 5y + 2z = 0 \\ -7x + 7y + z = 0 \end{cases}$$

$$(S_2) : \begin{cases} y - 2z = 3 \\ x + 2y - 3z = -1 \\ 2x - y + \alpha z = -15 \end{cases}$$

$$(S_3) : \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -2 \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 = -5 \\ 3x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 11x_4 = 13 \\ -2x_1 - 8x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 18 \end{cases}$$

$$(S_4) : \begin{cases} -x_1 - 2x_2 + \quad + x_5 = 2 \\ x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 3x_5 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 3x_4 - 5x_5 = -5 \\ -2x_2 + 10x_3 + 8x_4 + 16x_5 = 18 \\ 5x_1 + 9x_2 - x_3 + 10x_4 + 12x_5 = -2 \end{cases}$$

$$(S_5) : \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 5x + 6y - 7z = 7 \\ -7x - 5y + (\lambda + 3)z = a - b - 3 \\ 3x + 2y + (\mu - 1)z = a + b \end{cases}$$

$$(S_6) : \begin{cases} \lambda y + t = 1 \\ x + \lambda y + t = 0 \\ x + z - t = 0 \\ x - z - t = -4 \\ x + y - z = -2 \end{cases}$$

5.4 Applications de la méthode de Gauss

Exercice 59 Soit V le sous espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs :

$$v_1 = (1, -2, 3, 1) \; v_2 = (3, -5, 8, -2) \; v_3 = (1, -4, 5, -3) \; v_4 = (0, 1, -1, 1).$$

a. Déterminer la dimension et une base de V.

b. Déterminer un système d'équations cartésiennes et un système d'équations paramétriques de V.

c. Trouver toutes les relations linéaires liant v_1, v_2, v_3 et v_4.

d. Déterminer l'intersection de V avec l'hyperplan H d'équation :

$$5x - 3y - 4z + 2t = 0.$$

Que peut-on en déduire sur $V + H$?

e. Peut-on compléter, avec des vecteurs de l'hyperplan H, une base de V en une base de $\mathbb{R}^4$?

Exercice 60 On considrère le plan U de $\mathbb{C}^4$ engendré par les vecteurs :

$$u_1 = (1, 2, 2, -i) \quad \text{et} \quad u_2 = (2, 4, 2, -2i).$$

a. Déterminer toutes les façons de compléter $\{u_1, u_2\}$ en une base de $\mathbb{C}^4$ en choisissant des vecteurs parmi ceux de la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) de $\mathbb{C}^4$.

b. Déterminer un supplémentaire V de U qui ne contienne pas le vecteur e_2 ; trouver dans ce cas un vecteur u de U et un vecteur v de V tels que $e_2 = u + v$.

Exercice 61 **a.** Résoudre le système S_1 et le système homogène associé S_0 :

$$(S_1) \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & & & + & 3x_3 & + & y_1 & & & = & 1 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 7x_3 & - & y_1 & - & 9y_2 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 7x_3 & & & - & 9y_2 & = & 3 \\ & & -2x_2 & + & 2x_3 & + & 2y_1 & + & \alpha y_2 & = & 1 \end{array} \right.$$

b. Soient, dans $\mathbb{R}^4$, les vecteurs :

$$u_1 = (1, 2, 3, 0), \; u_2 = (0, -1, 2, -2), \; u_3 = (3, 7, 7, 2)$$

$$v_1 = (1, -1, 0, 2), \; v_2 = (0, -9, -9, \alpha).$$

On note U (resp. V) le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par u_1, u_2 et u_3 (resp. v_1 et v_2). Déduire de (a) sans autre calcul :

(i) Les dimensions de U et V,

(ii) Les valeurs de α pour lesquelles la somme de U et V est directe,

(iii) Une base du sous-espace $U \cap V$,

(iv) Un supplémentaire de $U + V$.

Exercice 62 Soient, dans $\mathbb{R}^4$, les vecteurs :

$$u = (1, -1, 0, 2), \quad v = (0, -9, -9, 6)$$

$$x = (1, 2, 3, 0), y = (0, -1, 2, -2), z = (3, 7, 7, 2)$$

a. Montrer que z appartient au sous-espace engendré par x et y et que v appartient au sous-espace engendré par x et u.

b. Soient F le sous-espace engendré par $\{x, y, z\}$, G le sous-espace engendré par $\{u, v\}$. Trouver la dimension des sous-espaces $F, G, F + G, F \cap G$ (on déterminera une base de chacun de ces sous-espaces).

c. Montrer que le sous-espace H engendré par le vecteur $w = (1, 2, 3, 1)$ est supplémentaire de $F + G$. En déduire un supplémentaire de $F \cap G$.

Exercice 63 **a.** Quel est le type (ensemble vide, point, droite affine, plan affine ...) de l'ensemble des solutions du système linéaire suivant ?

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & y_1 \\ -x_1 & + & (\lambda-1)x_2 & + & (\lambda-2)x_3 & + & (\lambda-1)x_4 & + & (\lambda-1)x_5 & = & y_2 \\ (\lambda-1)x_1 & + & (2\lambda-1)x_2 & + & (3\lambda-2)x_3 & + & (3\lambda-1)x_4 & + & (2\lambda+1)x_5 & = & y_3 \\ & & \lambda x_2 & + & \lambda x_3 & + & \lambda x_4 & + & (2\lambda-1)x_5 & = & y_4 \end{array}\right.$$

b. Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^4$:

$$u_1 = (1, -1, 2, \lambda - 1), u_2 = (1, \lambda - 1, 2\lambda - 1, \lambda), u_3 = (2, \lambda - 2, 3\lambda - 2, \lambda),$$

$$v_1 = (1, \lambda - 1, 3\lambda - 1, \lambda), \quad v_2 = (1, \lambda - 1, 2\lambda + 1, 2\lambda - 1).$$

On appelle U (resp. V) le sous-espace vectoriel engendré par u_1, u_2 et u_3 (resp. v_1 et v_2). Quelle est la dimension des sous-espaces U, V et $U + V$? Déterminer $U \cap V$ et un supplémentaire de $U + V$.

6 Réduction des endomorphismes

6.1 Matrices

Exercice 64 Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ? (Réfléchir pour éviter de calculer).

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 65 Chercher les valeurs propres et la dimension des sous-espaces propres des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} E = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} (m \in \mathbb{R}) \quad H = \begin{pmatrix} a^2 & 1 & 0 \\ 0 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix} (a \in \mathbb{R})$$

$$J = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \quad M = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & 0 & \beta \\ \alpha & \beta & 0 \end{pmatrix} (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

Exercice 66 Dire pour chacune des matrices de l'exercice précédent si elle est diagonalisable et donner une matrice semblable la plus simple possible. Calculer A^n pour tout entier et $((C - 2\,\mathrm{Id})(C - \mathrm{Id})$.

6.2 Endomorphismes

Exercice 67 Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞. Soient u et v les endomorphismes de E définis, pour $f \in E$, par :

$$u(f) = f' \quad \text{et} \quad v(f)(x) = \int_0^x f(t)dt \quad (x \in \mathbb{R})$$

a. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de u et v.

b. Déterminer les valeurs propres de $u \circ v$ et $v \circ u$.

c. Posons $g_n(x) = \cos nx$ pour $x \in \mathbb{R}$. Montrer que les fonctions g_n sont linéairement indépendantes dans E.

Exercice 68 Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$ défini par :

$$u(P) = (2X + 1)P(X) - (X^2 - 1)P'(X) \quad (P \in \mathbb{C}[X])$$

a. Montrer qu'il existe un unique entier n_0 tel que $\mathbb{C}_{n_0}[X]$ soit stable par u où $\mathbb{C}_{n_0}[X]$ est le sous-espace de $\mathbb{C}[X]$ des polynômes de degré au plus n_0 .

b. Soit v l'endomorphisme de $\mathbb{C}_{n_0}[X]$ obtenu par restriction de u à $\mathbb{C}_{n_0}[X]$. Ecrire la matrice de v dans la base canonique de $\mathbb{C}_{n_0}[X]$.

c. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de v.

d. Même question pour u.

Exercice 69 Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et f et g deux endomorphismes de E. On suppose que f admet n valeurs propres distinctes.

a. Montrer que f et g commutent si et seulement si les vecteurs propres de f sont vecteurs propres de g.

b. Un vecteur propre de g est-il propre pour f ?

c. Les endomorphismes qui commutent à f sont-ils diagonalisables ?

6.3 Applications

Exercice 70 **a.** Diagonaliser dans $\mathbb{R}^2$ la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et calculer A^n.

b. On considère les suites réelles $(u_n)_{n\in n}$ et $(v_n)_{n\in n}$ définis par les données de u_0 et v_0 et par les relations :

$$u_{n+1} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Calculer u_n et v_n en fonction de n, u_0 et v_0. Les suites sont-elles convergentes ?

c. Que peut-on dire des suites récurrentes $(u_n)_{n\in n}$ vérifiant

$$2u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n = 0 \text{ ?}$$