

TD d'algèbre Linéaire

Exercice 1

On considère l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1; e_2; e_3)$ et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x; y; z) = (x + y + 2z; 2x + y + z; y + 3z)$

1- Déterminer $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$

On donnera pour chacun de ces sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ une base éventuelle et la dimension

2- L'endomorphisme f est-il bijective ? Justifier votre réponse

Exercice 2

On considère $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E muni de la base $\mathcal{B} = (e_1; e_2; e_3)$ et l'endomorphisme f de E définie par $f(e_1) = e_1 + e_2 - e_3$; $f(e_2) = e_1 - e_2 + e_3$ et $f(e_3) = 2e_1 + 2e_2 - 2e_3$

1- Déterminer $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$

On donnera pour chacun de ces sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ une base éventuelle et la dimension

2-Prouvons que $E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel de dimension n . On considère deux endomorphismes f et g de E vérifiant.

i. $f + g = \operatorname{id}_E$

ii. $\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) = n$

1- Prouvons que $\ker(f) \subset \operatorname{Im}(g)$

2- Prouvons que $\ker(f) = \operatorname{Im}(g)$

3- Prouvons que $f \circ g = 0_{\mathcal{L}(E)}$

4- Prouvons que $f \circ f = f$ et $g \circ g = g$

Exercice 4

1- Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E de dimension finie

(a) Soit l'application $\varphi : E_1 \times E_2; (x; y) \rightarrow x + y$

Prouvons que φ est une application linéaire et déterminer $\ker \varphi$ et $\operatorname{Im} \varphi$

(b) Soit l'application définie par $\psi : E_1 \cap E_2 \rightarrow \ker \varphi; x \mapsto (x; -x)$

Prouver que φ est un isomorphisme.

(c) En déduire que $\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2)$

2- Soient u et v deux éléments de $\mathcal{L}(E_1; F)$ où F est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel

(a) Prouvons que $\operatorname{rg}(u + v) \leq \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v)$

(b) Déduire que $|\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v)| \leq \operatorname{rg}(u + v)$

Exercice 5

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n et a un vecteur non nul de E .

On suppose qu'il existe un endomorphisme f de E tel que $f \circ f = -\operatorname{Id}_E$.

On dit qu'un sous-espace vectoriel F et E est stable par f lorsque $f(F) \subset F$

- 1- Justifier que f est un automorphisme
- 2- Démontrer que la famille $(a; f(a))$ est libre. En déduire que E n'est pas une droite vectorielle
- 3- On suppose que E est plan vectoriel . Justifier la famille $(a; f(a))$ est une base de E .
- 4- Dans le cas général , soit F_a le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs a et $f(a)$
Prouver que F_a est plus petit sous-espace vectoriel de E stable par f et contenant a
- 5- soit b un vecteur non nul de E
 - (a) Démontrer que les sous-espace vectoriel $F_a \cap F_b$ et $F_a + F_b$ sont stable par f
 - (b) Démontrer les deux équivalences suivantes
 $(b \in F_a \Leftrightarrow (F_a = F_b))$
 $(b \notin F_a \Leftrightarrow (F_a \cap F_b) = 0_E)$
- 6- En déduire que n n'est pas égal à 3

Exercice 6

Soit E le sous ensemble de $M_3(\mathbb{R})$ défini par

$$E = \left\{ M(a; b; c) = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix} ; (a; b; c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

- 1- Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ stable pour la multiplication des matrices .
Calculer $\dim(E)$
- 2- Soit $M(a; b; c)$ un élément de E
Déterminer , suivant les valeurs des paramètre réels a, b et c le *rang* de $M(a; b; c)$
Calculer (lorsque cela est possible) l'inverse $M(a; b; c)^{-1}$ de $M(a; b; c)$
- 3- Donner une base de E formée de matrice inversible et une autre formée de matrice de *rang* 1

Exercice 7

Dans $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}(e_1; e_2)$; on donne un endomorphisme ϕ défini par $\phi(e_1) = e_1 - 2e_2$ et $\phi(e_2) = e_1 - e_2$ et on désigne par A sa matrice relative à $\mathcal{B}$.

On considère l'application T définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par $T(X) = AX$ pour tout $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

- 1- Prouver que T est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ puis déterminer sa matrice relative à la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- 2- Prouver que T est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et que T vérifie $T^2 = Id_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$

Exercice 8

On appelle trace d'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; et on note $Tr(A)$. La somme des éléments de sa diagonale principale . Autrement dit, si $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n}$ alors

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

On considère l'application $Tr : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$

- 1- Prouver que Tr est linéaire puis déterminer la matrice de T relative aux bases canoniques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et de $\mathbb{K}$.
- 2- Déterminer $Im(Tr)$ (on en donnera une base et la dimension)
puis on en déduire la dimension de $ker f(Tr)$
- 3- Prouver que pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et pour tout $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$; $Tr(A \times B) = Tr(B \times A)$

Exercice 9

Déterminer le rang de chacun des matrices suivantes :

$$1) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & m \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix} \quad 3) \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & b \\ a & 1 & b & 1 \\ 1 & b & 1 & a \\ b & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 10

Soit l'application $f : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$ définie par $P \mapsto P - (X - 2)P'$; $n \geq 2$

- 1- Prouver que f est un endomorphisme .
- 2- Dans le cas où $n = 2$; déterminer $\ker f$ et en donner une base .
- 3- Calculer $f(1)$, $f(X)$ puis $f(X^p)$ pour $p \leq n$
 En déduire une base de $\operatorname{Im} f$ puis la dimension de $\operatorname{Im} f$
 Déterminer la matrice de f relative à la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$
- 4- Déterminer la dimension de $\ker f$ et une base de $\ker f$ dans le cas général.

Exercice 11

Soit $I = I_3$ la matrice identité d'ordre 3 et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On appelle E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par I, J, J^2 :

$$E = \{M(a; b; c) = aI + bJ + cJ^2 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / (a; b; c) \in \mathbb{R}^3\}$$

- 1- (a) Calculer J^k pour tout k de $\mathbb{N}^*$
 (b) Montrer que $\mathcal{B} = (I; J; J^2)$ est une base de E
 - 2- Soit F le sous ensemble de E formé des matrices de la formes $M(1; b; c)$ (on prend $a = 1$)
 (a) F est-il un sous espace vectoriel de E
 (b) Montrer que F est stable par la multiplication des matrices .
 (c) Montrer que toute matrice de la forme $M(1; b; c)$ est inversible et que sa matrice inverse est dans F .
 - 3- On considère l'application $f : E \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$M(a; b; c) \mapsto (a + b; a - c)$$
- On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$

- (a) vérifier que f est une application linéaire
- (b) Déterminer le noyau de f , en donner sa dimension et une base
- (c) f est-elle surjective
- (d) Déterminer la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^2$: $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$
- (e) On pose $\mathcal{C} = (I; I - J; I - J + J^2)$ et $\mathcal{C}' = ((1; 1); (0; 1))$
 Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de E et que $\mathcal{C}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$
 Déterminer la matrice A' de f dans les bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$

Exercice 12

Soit f un endomorphisme du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^3$; $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ définie par

$$\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

où $a; b$ sont des réels donnés

On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ définie par $u_1 = (1; 0; -1); u_2 = (1; -1; 0)$ et $u_3 = (1; 1; 1)$

1-Prouver que $\mathcal{C} = (u_1; u_2; u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer C la matrice de f dans

la nouvelle base $\mathcal{C}$ puis déterminer $\mathcal{C}^n$ pour tout entier naturel n .

2-Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$

Prouver par récurrence que $(PCP^{-1})^n = PC^nP^{-1}$ pour tout entier naturel n .

3-En déduire que pour tout entier naturel n on a :

$$M^n = \frac{(a-b)^n}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{(a+2b)^n}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 13

Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $\mathcal{B}(e_1; e_2; e_3)$ une base de E

On pose $u = e_1 + e_2 + e_3; v = e_1 + e_2$ et $w = -e_2 + e_3$

On définit les endomorphismes $f_n; g$ et p de E par :

$$\begin{cases} f_n(e_1) = e_1 - \frac{1}{n}e_2 + \frac{1}{n}e_3 \\ f_n(e_2) = \frac{1}{n}e_1 + \frac{n+2}{n}e_2 - \frac{1}{n}e_3 \\ f_n(e_3) = \frac{1}{n}e_1 + \frac{1}{n}e_2 + e_3 \end{cases} \quad \begin{cases} g(e_1) = 0 \\ g(e_2) = e_2 \\ g(e_3) = e_3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} p(e_1) = u \\ p(e_2) = v \\ p(e_3) = w \end{cases}$$

pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer la matrice A_n de f_n relative à la base $\mathcal{B}$ puis en déduire pour tout $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$ l'écriture de $f_n(xe_1 + ye_2 + ze_3)$ dans la base $\mathcal{B}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

2. On pose $h_n = Id_E + \frac{1}{n}g \forall n \in \mathbb{N}^*$

(a) Prouver que $\mathcal{C} = (u; v; w)$ est une base de E

(b) Prouver que la matrice D_n de h_n dans $\mathcal{B}$ est celle de f_n dans $\mathcal{C}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

3. On pose $\pi_n = f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ \dots \circ f_n; \forall n \in \mathbb{N}^*$

(a) Prouver que $\pi_n = p \circ h_1 \circ h_2 \circ h_3 \circ \dots \circ h_n \circ p^{-1}; \forall n \in \mathbb{N}^*$

(b) Prouver par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$h_1 \circ h_2 \circ h_3 \circ \dots \circ h_n = Id_E + ng$$

(c) En déduire $\pi(e_1); \pi(e_2)$ et $\pi(e_3)$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

(a) Prouver que $h_1 \circ h_2 \circ h_3 \circ \dots \circ h_n$ est inversible et son inverse est $Id_E - \frac{n}{n+1}g$

(b) En déduire que π_n est inversible et déterminons dans $\mathcal{B}$ la matrice de $(\pi_n)^{-1}$

Exercice 14

Soient $u_{a;b}$ un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E , $\mathcal{B} = (e_1; e_2; e_3; e_4)$ une base de E . Discuter suivant les valeurs des paramètres réels a et b , de la dimension du noyau et de l'image de $u_{a;b}$ dont la matrice relative à la base $\mathcal{B}$ est définie par

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{pmatrix}$$

Exercice 15

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer $(A - I)^3$ où I est la matrice identité (unité) d'ordre 3 puis en déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 16

Soit $x_1; x_2; \dots; x_n$ une suite de n complexes. On pose $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$

1. Prouver qu'on a la relation $\Delta_n = \prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i) \Delta_{n-1}$
2. Calculer alors Δ_n

3. A quelle condition la matrice vandermonde $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$ est-elle inversible .

Exercice 17

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \quad D_3 = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}$$

où $a; b$ et c sont des réels

Les résultats seront présentés sous forme de produit de facteurs.

Exercice 18

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On considère l'application.

$$f : \mathbb{K} \rightarrow E$$

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$$

1. (a) Justifier que f est bijective puis en déduire que si $\mathbb{K}$ est un ensemble fini alors E est fini et déterminer le cardinal de E .
 (b) Application : déterminer le cardinal de E si $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ où p est un nombre premier .
2. Prouver que si $\mathbb{K}$ a un nombre infini d'éléments, il en est de même pour l'ensemble E .
 On pose pour la suite que $\mathbb{K}$ a un nombre infini d'éléments
 Soit G un sous-espace vectoriel (s-e-v) de E , différent de E et de $\{0_E\}$
3. Justifier que admet au moins un supplémentaire H dans E de base $(b_1, \dots, b_m)$
4. Soient $a \in G$ et H_a le s-e-v de E engendré par la famille $(a + b_i)_{i \in \{1, \dots, m\}}$
 - (a) Prouver que la famille $(a + b_i)_{i \in \{1, \dots, m\}}$ est une base de H .
 - (b) Prouver que $E = G \oplus H_a$.
 - (c) Prouver que $\forall (a; b) \in G^2; H_a = H_b \Rightarrow a = b$
 - (d) Conclure que G admet une infinité de supplémentaires dans E

Exercice 19

On considère l'application f qui à tout polynôme P du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ associe le reste de la division euclidienne de P par $X^2 - 1$

1. Prouver que $\mathcal{C} = (1; X - 1; X^2 - 1; (X^2 - 1)(X + 1))$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$
2. Prouver que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$
3. Déterminer les matrices $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f)$ de f relatives aux bases respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$
4. Calculer $rg(f)$
 Déterminer l'image et le noyau de f . On donnera pour chacun d'eux une base.
 Prouver $\ker f \oplus \text{Im} f = \mathbb{R}_3[X]$
5. Prouver que $f \circ f = f$.

Exercice 20

On appelle trace d'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on note $Tr(A)$, la somme des éléments de sa diagonale principale. Autrement dit ; si $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ alors

$$T_r(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

1. (a) Prouver que l'application $T_r : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow (\mathbb{R}); A \longmapsto T_r(A)$ est une application linéaire
 Déterminer $\text{Im}(T_r)$ puis en déduit la dimension de $\ker(T_r)$
 (b) Prouver que pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$;

$$T_r(A \times B) = T_r(B \times A)$$

2. On pose $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
 On considère l'application

$$N : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$A \longmapsto \sqrt{T_r(A^T \times A)}$$

où A^T est la transposée de la matrice A

(a) Justifier que N est bien définie

(b) Prouver que pour tout $A \in E$;

$$N(A) = 0 \Rightarrow A = 0_E$$

(c) Comparer $N(A)$ et $N(A^T)$

Exercice 21

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Prouver que le sous-espace vectoriel $\ker(f - Id_{\mathbb{R}^3})$ est le sous-espace engendré par le vecteur $u = (1; 1; 0)$

Prouver que $v = (0; 0; 1)$ est tel que $\ker(f - id_{\mathbb{R}^3})(v) = u$

2. Chercher un vecteur w de l'espace vectoriel $\ker(f - 2id_{\mathbb{R}^3})$

Prouver que $(u; v; w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$

Calculer la matrice T de f dans $(u; v; w)$

3. Calculer $f^k(v)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Dédire T^k pour tout $k \in \mathbb{N}$

4. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$

PROPOSITION DE CORRIGÉE TYPE
Exercice 1 :
 $\mathcal{B}(e_1; e_2; e_3)$
 $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y, z) \longmapsto (x + y + 2z, 2x + y + z, y + 3z)$
1-Détermination de $\text{Ker} f$ et $\text{Im} f$
 $\text{ker} f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$

$$\begin{aligned}
 f(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^3} &\iff (x + y + 2z, 2x + y + z, y + 3z) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
 &\iff \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ -y - 3z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ 0z = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ y = -3z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x = z \\ y = -3z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Donc $\text{ker} f = \{(z, 3z, z), z \in \mathbb{R}\} = \{z(1; -3; 1), z \in \mathbb{R}\}$

$\text{ker} f$ est un sous-espace vectoriel engendré par un seul vecteur non nul. Donc $(1; -3; 1)$ est une base de $\text{ker} f$ et $\dim \text{ker} f = 1$

$$\begin{aligned}
 \text{Im} f &= \{f(x, y, z), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\
 &= \{(x + y + 2z; 2x + y + z; y + 3z), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\
 &= \{(x; 2x; 0) + (y; y; y) + (2z; z; 3z); (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\
 &= \{x(1; 2; 0) + y(1; 1; 1) + z(2; 1; 3); (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\
 \text{Im} f &= \text{vet}((1; 2; 0), (1; 1; 1))
 \end{aligned}$$

D'après la formule du *rang* on a :

$$\begin{aligned}
 \dim \text{Im} f &= \dim \mathbb{R}^3 - \dim \text{ker} f \\
 &= 3 - 1 \\
 \dim \text{Im} f &= 2
 \end{aligned}$$

$\dim \text{Im} f = 2$

. Comme $\text{Im} f$ est engendré par deux vecteurs en dimension 2, alors $((1; 2; 0), (1; 1; 1))$ est une base de $\text{Im} f$

2- vérifions si l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ est bijectif

f n'est pas bijective car f est un endomorphisme et $\ker f \neq 0_{\mathbb{R}^3}$

Exercice 2 :

$$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3); f(e_1) = e_1 + e_2 - e_3; f(e_2) = e_1 - e_2 + e_3; f(e_3) = 2e_1 + 2e_2 - 2e_3$$

1- Déterminons $\ker f$ et $\text{Im} f$

$$\ker f = \{u \in E / u = 0_E\}$$

Soit $u = \sum_{i=1}^3 x_i e_i \in E$ avec $x_i = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{K}^3$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } u \in \ker f &\iff f(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) = 0_E \\ &\iff x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + x_3 f(e_3) = 0_E \\ &\iff x_1(e_1 + e_2 - e_3) + x_2(e_1 - e_2 + e_3) + x_3(2e_1 + 2e_2 - 2e_3) = 0_E \\ &\iff (x_1 + x_2 + 2x_3)e_1 + (x_1 - x_2 + 2x_3)e_2 + (-x_1 + x_2 - 2x_3)e_3 = 0_E \\ &\iff \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \\ &\iff x_1 = -2x_3 \text{ et } x_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \ker f &= \{(-2x_3 e_1 + 0e_2 + x_3 e_3); x_3 \in \mathbb{K}\} \\ &= \{x_3(-2e_1 + e_3); x_3 \in \mathbb{K}\} \\ &= \text{vect}((-2e_1 + e_3)) \end{aligned}$$

$\ker f$ est engendré par le vecteur non nul $(-2e_1 + e_3)$. Alors une base de $\ker f$ est $(-2e_1 + e_3)$ et $\dim \ker f = 1$

$$\begin{aligned} \text{Im} f &= \text{vect}(f(e_1); f(e_2); f(e_3)) \\ &= \text{vect}(e_1 + e_2 - e_3; e_1 - e_2 + e_3; 2e_1 + 2e_2 - 2e_3) \\ \text{Im} f &= \text{vect}((e_1 + e_2 - e_3); (e_1 - e_2 + e_3)) \end{aligned}$$

Car $2e_1 + 2e_2 - 2e_3 = 2(e_1 + e_2 - e_3)$. Or d'après la formule du rang on a :

$$\begin{aligned} \dim \text{Im} f &= \dim E - \dim \ker f \\ &= 3 - 1 \\ \dim \text{Im} f &= 2 \end{aligned}$$

Ainsi une base de $\text{Im} f$ est $(e_1 + e_2 - e_3; e_1 - e_2 + e_3)$

2- Prouvons que $\ker f \cap \text{Im} f = E$

Déterminons $\ker f \cap \text{Im} f$

Soit $x \in \ker f \cap \operatorname{Im} f$

$$\begin{aligned}
 x \in \ker f \cap \operatorname{Im} f &\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \ker f \\ x \in \operatorname{Im} f \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \exists(\alpha; \beta; \gamma) \in \mathbb{K}^3; \begin{cases} x = \alpha(-2e_1 + e_3) \\ x = \beta(e_1 + e_2 - e_3) + \gamma(e_1 - e_2 + e_3) \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \exists(\alpha; \beta; \gamma) \in \mathbb{K}^3; \begin{cases} \alpha(-2e_1 + e_3) = x \\ \alpha(-2e_1 + e_3) = \beta(e_1 + e_2 - e_3) + \gamma(e_1 - e_2 + e_3) \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(-2e_1 + e_3) = x \\ -2\alpha - \beta - \gamma = 0 \\ -\beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(-2e_1 + e_3) = x \\ 2\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta - 3\gamma = 0 \\ -2\gamma = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(-2e_1 + e_3) = x \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow x = 0_E
 \end{aligned}$$

Donc $\ker f \cap \operatorname{Im} f = 0_E$ et $\dim(E) = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$ (d'après la formule du rang)

$$\boxed{\ker f \oplus \operatorname{Im} f = E}$$

Exercice 3 :

$\dim E = n$; f et g deux endomorphismes vérifiant

. $i : f + g = \operatorname{id}_E$

. $ii : \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) = n$

1- Prouvons que $\ker f \subset \operatorname{Im}(g)$

Soit $x \in \ker f$

$x \in \ker f \Leftrightarrow f(x) = 0_E$ Or $(f + g)(x) = \operatorname{id}_E(x)$ c'est-à-dire $f(x) + g(x) = \operatorname{id}_E(x)$

Donc $g(x) = x \Leftrightarrow x = g(x) \in \operatorname{Im} f$

Alors

$$\boxed{\ker(f) \subset \operatorname{Im}(g)}$$

2- Prouvons que $\ker(f) = \operatorname{Im}(g)$

On sait que $\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) = n$;

on a :

$$\begin{aligned} rg(g) &= n - rg(f) \\ &= n - (\dim E - \dim \ker f) \\ rg(g) &= \dim \ker f \text{ car } \dim E = n \end{aligned}$$

C'est-à-dire que $\dim \text{Im}(g) = \dim \ker(f)$ or d'après 1 : on a $\ker(f) \subset \text{Im}(g)$

$$\boxed{\ker(f) = \text{Im}(g)}$$

3- Prouvons que $(f \circ g) = 0_{E^E}$

Soit $x \in E$

$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$ or $g(x) \in \text{Im} g = \ker f$ donc $(f \circ g)(x) = 0_E = 0_{E^E}(x)$

$$\boxed{(f \circ g) = 0_{E^E}}$$

4- Prouvons que $(f \circ f) = f$ et $(g \circ g) = g$

$$*(f \circ f) = f$$

$$\begin{aligned} \text{On a : } f(x) &= (f \circ \text{id}_E)(x) \\ &= f(x) \circ [f(x) + g(x)] \\ &= (f \circ f)(x) + (f \circ g)(x) \text{ car } f(x) \text{ est linéaire} \\ &= (f \circ f)(x) + 0_{E^E} \\ f(x) &= (f \circ f)(x) \end{aligned}$$

Alors

$$\boxed{f = (f \circ f)}$$

$$*(g \circ g) = g$$

Soit $x \in E$

$$\begin{aligned} \text{On a : } g(x) &= (\text{id}_E \circ g)(x) \\ &= [f(x) + g(x)] \circ g(x) \\ &= f[g(x)] + g[(x)] \\ &= g[g(x)] \quad \text{car } f[g(x)] = 0_{E^E} \\ g(x) &= (g \circ g)(x) \end{aligned}$$

$$\text{Alors } \boxed{g = (g \circ g)}$$

Exercice 4 :

1- (a) $\varphi : E_1 x E_2 \longrightarrow E$

$$(x; y) \longmapsto x + y$$

• Prouvons que φ est une application linéaire

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$, $(x; y) \in E_1 x E_2$, $(x'; y') \in E_1 x E_2$

On a : $\alpha(x; y) + (x'; y') = (\alpha x + x'; \alpha y + y') \in E_1 x E_2$

$$\begin{aligned} \varphi[\alpha(x; y) + (x'; y')] &= \varphi(\alpha x + x'; \alpha y + y') \\ &= \alpha x + x' \alpha y + y' \\ &= \alpha(x + y) + (x' + y') \\ \varphi[\alpha(x; y) + (x'; y')] &= \alpha \varphi(x; y) + \varphi(x' + y') \end{aligned}$$

D'où φ est une application linéaire

- Déterminons $\ker f$ et $\text{Im} f$

$$\ker f = \{(x; y) \in E_1 \times E_2, \varphi(x; y) = 0_E\}$$

Soit $(x; y) \in E_1 \times E_2$

$$\begin{aligned} (x; y) \in \ker f &\Leftrightarrow \varphi(x; y) = 0_E \\ &\Leftrightarrow x + y = 0_E \\ &\Leftrightarrow y = -x \text{ et } x \in E_2 \text{ car } y \in E_2 \\ &\Leftrightarrow y = -x \text{ et } x \in E_1 \cap E_2 \text{ car } x \in E_1 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\ker \varphi = \{(x; -x); x \in E_1 \cap E_2\}}$

$$\begin{aligned} \text{Im} \varphi &= \{\varphi(x; y), (x; y) \in E_1 \times E_2\} \\ &= \{x + y; (x; y) \in E_1 \times E_2\} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{Im} \varphi = E_1 + E_2}$

$$\begin{aligned} \text{(b) } \psi : E_1 \cap E_2 &\longrightarrow \ker f \\ x &\longmapsto (x; -x) \end{aligned}$$

- Prouvons que ψ est un isomorphisme

$\sim$ Montrons que ψ est linéaire

Soit $\alpha \in \mathbb{K}; x \in E_1 \cap E_2$ et $y \in E_1 \cap E_2$

$$\begin{aligned} \psi(\alpha x + y) &= (\alpha x + y; -\alpha x - y) \\ &= (\alpha x; -\alpha x) + (y; -y) \\ &= \alpha(x, -x) + (y; -y) \\ \psi(\alpha x + y) &= \psi(x) + \psi(y) \end{aligned}$$

Par conséquent ψ est linéaire

- ★ Montrons que ψ est bijective

Injectivité : Soit $u \in (E_1 \cap E_2)$

$$\begin{aligned} u \in \ker \psi &\Leftrightarrow \psi(u) = 0_{\ker \varphi} \\ &\Leftrightarrow (u; -u) = 0_{E_1 \times E_2} \\ &\Leftrightarrow (u; -u) = (0_E; 0_E) \\ &\Leftrightarrow u = 0_E \end{aligned}$$

Donc $\ker \psi = \{0_E\}$ par conséquent ψ est injective

Surjectivité : Soit $u \in \ker \psi$

$u \in \ker \psi$ alors il existe $x \in E_1 \cap E_2$ tel que $u = (x, -x) = \psi(x)$. Alors ψ est surjective.
En somme ψ est un isomorphisme.

(c) En déduisons que $\dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2)$

Comme E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels de E de dimension finie alors $E_1 \cap E_2$ est de dimension finie et on :

$$\begin{aligned} \dim(E_1 \cap E_2) &= \dim(\ker \varphi) \text{ (d'après b)} \\ &= \dim(E_1 \times E_2) \text{ (formule du rang)} \\ \dim(E_1 \cap E_2) &= \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 + E_2) \text{ (car } \operatorname{Im} \varphi = E_1 + E_2) \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2)}$

2- $(u; v) \in (\mathcal{L}(E_1; F))^2$ avec F un K -espace vectoriel

(a) Prouvons que $rg(u + v) \leq rg(u) + rg(v)$

Soit $y \in \operatorname{Im}(u + v)$

$y \in \operatorname{Im}(u + v)$ alors il existe $x \in E_1$ tel que $y = (u + v)(x) \Rightarrow y = u(x) + v(x)$

alors $y \in \operatorname{Im}(u(x)) + \operatorname{Im}(v(x))$

Donc $\operatorname{Im}(u + v) \subset \operatorname{Im}(u(x)) + \operatorname{Im}(v(x))$

On a : $\dim \operatorname{Im}(u + v) \leq \dim(\operatorname{Im}(u(x)) + \operatorname{Im}(v(x)))$ (1).

Or la formule de Grassmann .

$$\dim \operatorname{Im}(u(x) + v(x)) = \dim \operatorname{Im}(u(x)) + \dim \operatorname{Im}(v(x)) - \dim(\operatorname{Im}(u) \cap \operatorname{Im}(v))$$

$$\text{donc } \dim(\operatorname{Im}(u(x)) + \operatorname{Im}(v(x))) \leq \dim \operatorname{Im}(u(x)) + \dim \operatorname{Im}(v(x)) \text{ (2)}$$

$$\text{De (1) et (2) on a : } \dim(\operatorname{Im}(u) + \operatorname{Im}(v)) \leq \dim \operatorname{Im}(u) + \dim \operatorname{Im}(v)$$

d'or

$$\boxed{rg(u + v) \leq rg(u) + rg(v)}$$

(b) Déduisons $|rg(u) - rg(v)| \leq rg(u + v)$

$$rg((u + v) + (-v)) \leq rg(u + v) + rg(-v) . \text{ Or } rg(-v) = \operatorname{Im}(-v)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(-v(x)) &= \{-v(x); x \in E\} \\ &= \{v(-x); x \in E\} \text{ car } v \in \mathcal{L}(E) \\ \operatorname{Im}(-v(x)) &= \{v(t); t \in E\} \end{aligned}$$

Alors $\operatorname{Im}(-v) = \operatorname{Im}(v)$

Donc

$$\begin{aligned} rg((u + v) + (-v)) &\leq rg(u + v) + rg(v) \\ rg(u) &\leq rg(u + v) + rg(v) \\ rg(u) - rg(v) &\leq rg(u + v) \text{ (1)} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} rg((u + v) + (-u)) &\leq rg(u + v) + rg(u) \\ rg(v) &\leq rg(u + v) + rg(u) \\ rg(v) - rg(u) &\leq rg(u + v) \text{ (2)} \end{aligned}$$

$$\text{De (1) et (2) on a : } -rg(u + v) \leq rg(u) - rg(v) \leq rg(u + v)$$

D'où

$$\boxed{|rg(u) - rg(v)| \leq rg(u + v)}$$

Exercice 5 :

E est un sous-espace vectoriel de dimension finie n non nulle et f un endomorphisme de E tel que $f \circ f = -id_E$

1-Justifions que f est un automorphisme
 f étant un endomorphisme

$$\begin{aligned}(f \circ f) &= -id_E \Leftrightarrow -(f \circ f) = id_E \\ &\Leftrightarrow (-f) \circ f = id_E\end{aligned}$$

$(-f) = f^{-1}$ alors f est bijective. Donc f est un automorphisme

• Donne la matrice de f en fonction de celle de f dans la base donnée

Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ la matrice de f relative à la base $\mathcal{B}$ $(-f) \circ f = id_E$ alors on a : $f^{-1} = -f$ alors $\mathcal{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = \mathcal{Mat}_{\mathcal{B}}(-f) = -\mathcal{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$
 Donc

$$\boxed{\mathcal{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = -\mathcal{Mat}_{\mathcal{B}}(f)}$$

2- Démontrons que la famille $(a; f(a))$ est libre

Supposons que la famille $(a; f(a))$ est libre alors $\exists \gamma \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = \gamma a$

$$\begin{aligned}f(a) = \gamma a &\Rightarrow f(f(a)) = f(\gamma a) \\ &\Leftrightarrow f(f(a)) = \gamma f(a) \\ &\Leftrightarrow -a = \gamma f(a) \\ &\Leftrightarrow -a = \gamma(\gamma a) \\ &\Leftrightarrow -a = \gamma^2 a \\ &\Leftrightarrow (\gamma^2 + 1)a = 0 \\ &\Leftrightarrow \gamma^2 + 1 = 0 \text{ car } a \neq 0 \text{ ce qui est absurde}\end{aligned}$$

Donc la famille $(a; f(a))$ est libre

• Déduisons que E n'est pas une droite vectoriel

$0_E \neq a \Rightarrow E \neq \{0_E\}$ alors $\dim(E) \geq 1$

Soit $\mathcal{B} = (e_1; e_2; \dots; e_n)$ une base de E or $(a; f(a))$ est une famille libre de E donc $\dim(E) \geq 2$ car une base est une famille libre maximale . Par conséquent $\dim(E) \neq 1$.

Ce qui montre que E n'est pas une droite vectoriel.

3-Justifions que la famille $(a; f(a))$ est une base de E

E étant un plan vectoriel alors $\dim(E) = 2$ or $(a; f(a))$ est une famille libre donc $(a; f(a))$ est une base

• Matrice de cette base

E étant un plan vectoriel alors

$$f(a) = 0 \times a + 1 \times f(a) \Leftrightarrow f(a) = (0; 1)$$

$$f(f(a)) = (f \circ f)(a) = -id_E(a) = -a \Leftrightarrow f(f(a)) = (-1; 0)$$

$$\boxed{\mathcal{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

4- Prouvons que F_a est le plus petit sous-espace vectoriel de E stable par f et contenant a

• $F_a = \text{vect}(af(a))$ donc F_a est un sous-espace vectoriel de E (1)

• $a \times 1 + 0 \times f(a) = a$ donc $a \in F_a$ (2)

• Soit $y \in f(F_a)$

$$\begin{aligned} y \in f(F_a) &\Leftrightarrow \exists x \in F_a / y = f(x) \\ &\Leftrightarrow \exists(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2; x = \alpha a + \beta f(a) \text{ et } y = f(x) \\ &\Leftrightarrow \exists(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2; y = f(\alpha a + \beta f(a)) \\ &\Leftrightarrow \exists(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2; y = \alpha f(a) + \beta f(f(a)) \\ &\Leftrightarrow \exists(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2; y = \alpha f(a) - \beta a \end{aligned}$$

$\alpha f(a) - \beta a \in F_a$ alors $y \in F_a$. On conclut que $f(F_a) \subset F_a$ (3)

• Montrons que $a \in F_a$

$$\left\{ \begin{array}{l} a \in F \\ f(F_a) \subset F_a \end{array} \right. \text{ alors } f(a) \in f(F_a) \subset F_a \text{ donc } f(a) \in F \text{ par conséquent } a \in F_a \text{ (4)}$$

De (1); (2); (3) et (4) on a : F_a est le plus petit sous-espace vectoriel de E stable par f et contenant a .

5- (a) Démontrons que les sous-espaces vectoriels $F_a \cap F_b$ et $F_a + F_b$ sont stables par f

• $F_a \cap F_b$

Il s'agit de montrer que $f(F_a \cap F_b) \subset F_a \cap F_b$

On sait que $f(F_a \cap F_b) \subset f(F_a) \cap f(F_b)$ or $f(F_a) \subset F_a$ et $f(F_b) \subset F_b$ car F_a et F_b sont stable par f . Ainsi $f(F_a \cap F_b) \subset F_a \cap F_b$

Alors le sous-espaces vectoriels $F_a \cap F_b$ est stable par f (1)

• $F_a + F_b$

Il s'agit de montrer que $f(F_a + F_b) \subset F_a + F_b$

Soit $x \in F_a + F_b$, alors il existe $(x_a; x_b) \in F_a \times F_b$ tel que $x = x_a + x_b$

Alors

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_a + x_b) \\ &= f(x_a) + f(x_b) \text{ car } f \text{ linéaire} \end{aligned}$$

Comme F_a et F_b sont stable par f alors $f(x_a) \in F_a$ et $f(x_b) \in F_b$.

Ainsi $f(x) = f(x_a) + f(x_b) \in F_a + F_b$

Par conséquent $f(F_a + F_b) \subset F_a + F_b$

Alors le sous-espaces vectoriels $F_a + F_b$ est stable par f (2)

De (1) et (2) les sous-espaces vectoriels $F_a \cap F_b$ et $F_a + F_b$ sont stables par f

(b) Démontrons les deux équivalences $(b \in F_a) \Leftrightarrow (F_a = F_b)$ et $(b \neq F_a) \Leftrightarrow F_a \cap F_b = \{0_E\}$

• $(b \in F_a) \Leftrightarrow (F_a = F_b)$

($\Leftarrow$) Supposons que $(F_a = F_b)$ et montrons que $(b \in F_a)$

On sait que $b \in F_b$ or $F_a = F_b$ donc $b \in F_a$. Alors $(b \in F_a) \Leftarrow (F_a = F_b)$ (1)

($\Rightarrow$) Supposons que $(b \in F_a)$ et montrons que $(F_a = F_b)$

$$(b \in F_a) \Rightarrow f(b) \in f(F_a) \subset F_a \text{ alors } f(b) \in F_a$$

$$F_b = \text{vect}((b; f(b))) \subset F_b \text{ car } b \in F_b \text{ alors } F_b \subset F_a .$$

D'après la question 2- $((a; f(a)))$ et $((b; f(b)))$ sont libres car $b \neq 0_E$ ainsi elle forment respectivement les sous-espaces F_b et F_b alors $\dim(F_a) = \dim(F_b) \Rightarrow F_a = F_b$.

$$\text{Donc } (b \in F_a) \Rightarrow (F_a = F_b) \quad (2)$$

$$\text{De (1) et (2) on a bien } (b \neq F_a) \Leftrightarrow F_a \cap F_b = \{0_E\}$$

$$\bullet (b \neq F_a) \Leftrightarrow F_a \cap F_b = \{0_E\}$$

Raisonnons par absurde en supposant que $(b \in F_a) \Leftrightarrow (F_a \cap F_b = \{0_E\})$

De ce qui précède

$$\begin{aligned} (b \in F_a) &\Rightarrow (F_a = F_b) \\ &\Rightarrow F_a \cap F_b = F_a = F_b \end{aligned}$$

ce qui contredit $F_a \cap F_b = \{0_E\}$ car $F_a \neq \{0_E\}$ par suite $(b \neq F_a) \Leftrightarrow F_a \cap F_b = \{0_E\}$

6- Déduisons que n n'est pas égal à 3

Raisonnons par absurde en supposant que $n = 3$.

On sait que $(a; f(a))$ est libre alors d'après le théorème de la base incomplète il existe $c \in E - \{0_E\}$ tel que $(a; f(a); c)$ est une base de E . Ainsi $c \neq F_a$ or d'après la question 5-(b) $F_a \cap F_c = \{0_E\}$ alors $(a; f(a); c; f(c))$ est une famille libre de E ce qui contredit $n = 3$.

D'où n n'est pas égal à 3

Exercice 6 :

$$E = \left\{ M(a; b; c) = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix} ; (a; b; c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

1- Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} E &= \left\{ M = (a; b; c) = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix} ; (a; b; c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; (a; b; c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

Alors E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par une famille de trois vecteurs en dimension trois .

- stabilité pour la multiplication des matrices

$$\text{Soit } M(a; b; c) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ et } M'(a'; b'; c') \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

$$M.M = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & 0 & c \\ 0 & b' & 0 \\ c & 0 & a' \end{pmatrix}$$

$$M.M = \begin{pmatrix} aa' + cc' & 0 & ac' + ca' \\ 0 & bb' & 0 \\ ac' & 0 & aa' + cc' \end{pmatrix}$$

$\forall (a; b; c) \in \mathbb{R}^3$ et $\forall (a'; b'; c') \in \mathbb{R}^3$ alors $(ac' + ca') \in \mathbb{R}$ et $bb' \in \mathbb{R}$ car $\mathbb{R}$ est stable pour la multiplication et l'addition .

- Calculons $\dim(E)$

Comme E est engendré par trois vecteurs en dimension trois alors $\boxed{\dim(E) = 3}$

2-Déterminons suivant les valeurs des paramètres réels a ; b ; et c le rang de $M(a; b; c)$

$$\begin{aligned} \text{rg}(M(a; b; c)) &= \text{rg} \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} a+c & 0 & a+c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix} \\ &= (a+c) \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix} \\ &= (a+c) \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ c & 0 & a \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} \\ &= (a+c) \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a-c \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} \\ &= (a+c)(a-c) \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} \\ &= b(a+c)(a-c) \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{rg}(M(a; b; c)) &= b(a+c)(a-c) \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Discussion

$$a + c = 0 \text{ ou } a - c = 0 \text{ ou } b = 0$$

- si $a = c$ ou $a = -c$ ou $b = 0$ on a

$$\boxed{rg(M(a; b; c)) = 0}$$

- si $a \neq c$ ou $a \neq -c$ ou $b \neq 0$ on a

$$\boxed{rg(M(a; b; c)) = 3}$$

- Calculons l'inverse $M^{-1}(a; b; c)$ de $M(a; b; c)$

$$\det(M(a; b; c)) = -b(a + c)(a - c) = -b(a^2 - c^2)$$

$$\text{com}(M(a; b; c)) = \begin{pmatrix} ab & 0 & bc \\ 0 & a^2 - c^2 & 0 \\ bc & 0 & ab \end{pmatrix}$$

$$\text{com}(M(a; b; c)) = b^2(a^2 - c^2) \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} M^{-1}(a; b; c) &= \frac{1}{\det(M(a; b; c))} \times \text{com}(M(a; b; c)) \\ &= \frac{-1}{b(a^2 - c^2)} \times b^2(a^2 - c^2) \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$M^{-1}(a; b; c) = -b \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$\boxed{M^{-1}(a; b; c) = -b \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}}$$

3-Déterminons une base de E formée de matrices inversible et une autre formée de matrices de rang 1

Exercice 7 :

$$\mathcal{B}(e_1; e_2; e_3); \quad \phi(e_1) = e_1 - 2e_2; \quad \phi(e_2) = e_1 - e_2; \quad A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\phi)$$

1-Prouvons que T est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$\text{Soit } \alpha \in \mathbb{R}; \quad (X_1; X_2) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

$$\begin{aligned} T(\alpha X_1 + X_2) &= A(\alpha X_1 + X_2) \\ &= A(\alpha X_1) + A(X_2) \\ &= \alpha A(X_1) + A(X_2) \\ T(\alpha X_1 + X_2) &= T(\alpha X_1) + T(X_2) \end{aligned}$$

De plus $\forall X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}); X \in \mathcal{A}\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car la multiplication des matrices carrées est interne dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

En somme T est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

• Sa matrice relative à la base canonique $\mathcal{C}$ et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Posons $\mathcal{C} = (E_{11}; E_{12}; E_{21}; E_{22})$ avec

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = xE_{11} + yE_{12} + zE_{21} + tE_{22} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

$$T(X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ -2x-z & -2y-t \end{pmatrix}$$

$$T(X) = (x+z)E_{11} + (y+t)E_{12} + (-2x-z)E_{21} + (-2y-t)E_{22}$$

Soit B la matrice de T dans $\mathcal{C}$

$$T(X) = BX \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+z \\ y+t \\ -2x-z \\ -2y-t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

Donc

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2-Prouvons que T est un automorphisme

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$\det(B) = 1 \neq 0$ donc B est inversible et par suite T est un automorphisme .

- Vérifions que $T^2 = -Id_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$

Soit $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} T^2(X) &= (T \circ T)(X) \\ &= T[T(X)] \\ &= A[AX] \\ T^2(X) &= A^2X \end{aligned}$$

Or

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = -Id_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$$

Donc $T^2(X) = A^2X = -Id_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}(X)$

D'où

$$\boxed{T^2 = -Id_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}}$$

Exercice 8 :

1. Prouvons que Tr est linéaire Soit $\beta \in \mathbb{K}$; $(A; B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$

$$\begin{aligned} \beta A + B &= (\beta a_{ij} + b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \\ T_r(\beta A + B) &= \sum_{i=1}^n (\beta a_{ii} + b_{ii}) \\ &= \sum_{i=1}^n \beta a_{ii} + \sum_{i=1}^n b_{ii} \\ T_r(\beta A + B) &= \beta \sum_{i=1}^n a_{ii} + \sum_{i=1}^n b_{ii} \\ T_r(\beta A + B) &= \beta T_r(A) + T_r(B) \end{aligned}$$

Donc T_r est une application linéaire .

- Déterminons la matrice T_r relative bases canonique $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et de $\mathbb{K}$

$$\begin{cases} T_r(E_{ij}) = 0 \text{ si } i \neq j \\ T_r(E_{ij}) = 1 \text{ si } i = j \end{cases}$$

Soit $M = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n^2}$ cette matrice avec

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = kn + (k+1); k \in [0; n-1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

car pour tout $k \in [0; n-1]; T_r(E_{k+1; k+1}) = a_{1; kn+(k+1)}$

Alors

$$\boxed{T_r(E_{k+1;k+1}) = a_{1;kn+(k+1)}}$$

2-Déterminons $Im(T_r)$

$Im(T_r)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}$ et $dim\mathbb{K} = 1$ donc $dimIm(T_r) \in \{0; 1\}$

De plus $1 = T_r(E_{11}) \in Im(T_r)$; alors $Im(T_r) \neq \{0_{\mathbb{K}}\}$ par conséquent $dimIm(T_r) = 1$ donc $Im(T_r) = \mathbb{K}$

$$\boxed{Im(T_r) = \mathbb{K}}$$

• Déduisons $dimker(T_r)$

$Im(T_r) \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}); \mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie alors d'après la formule du rang

on a : $dim\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = dimker(T_r) + dimIm(T_r)$

Ainsi $dimker(T_r) = dim\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) - dimIm(T_r)$

On déduit que $dimker(T_r) = n^2 - 1$ car $dim\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = n^2$ et $dimIm(T_r) = 1$

Donc

$$\boxed{dimker(T_r) = n^2 - 1}$$

3-Prouvons que pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et pour tout $B \in \mathcal{M}_{n;p}(\mathbb{K})$; $T_r(A \times B) = T_r(B \times A)$

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i; j \leq n}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i; j \leq n}$

Posons $A \times B = (c_{ij})_{1 \leq i; j \leq n}$ avec $c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj}$

$$T_r(A \times B) = \sum_{i=1}^n c_{ii}$$

$$T_r(A \times B) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj} \quad (1)$$

Posons $B \times A = (c'_{ij})_{1 \leq i; j \leq p}$ avec $c'_{ij} = \sum_{k=1}^p b_{ik}a_{kj}$

$$T_r(B \times A) = \sum_{i=1}^p c'_{ii}$$

$$= \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^n b_{ik}a_{kj}$$

$$= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^p b_{ik}a_{kj}$$

$$T_r(A \times B) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj} \quad (2)$$

De (1) et (2) on a : $T_r(A \times B) = T_r(B \times A)$

$$\boxed{T_r(A \times B) = T_r(B \times A)}$$

Exercice 9 :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E = \{M(a; b; c) = aI + bJ + cJ^2 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}); (a; b; c) \in \mathbb{R}^3\}$$

1-(a) Déterminons J^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$; $J^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) Montrons que $\mathcal{B} = (I; J; J^2)$ est une base de E

Soit $(\alpha; \beta; \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(\alpha I + \beta J + \gamma J^2) = 0_3$

$$\begin{aligned} (\alpha I + \beta J + \gamma J^2) = 0_3 &\Leftrightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Alors $\mathcal{B} = (I; J; J^2)$ est une famille libre engendré par trois vecteurs en dimension trois . Donc $\mathcal{B}$ est une base .

2-(a)

$$F = \{M(1; b; c) = I + bJ + cJ^2 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}); (b; c) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$\begin{aligned} &= \left\{ M(1; b; c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}); (b; c) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ M(1; b; c) = \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}); (b; c) \in \mathbb{R}^2 \right\} \end{aligned}$$

$0_3 \notin F$ alors F n'est pas un sous espace vectoriel de E

(b) Montrons que F est stable pour la multiplication des matrices

Soit $M(1; b; c) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $M'(1; b'; c') \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$$M.M' = \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b' & c' \\ 0 & 1 & b' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M.M' = \begin{pmatrix} 1 & b+b' & c+c' \\ 0 & 1 & b+b' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$(a; c; a'; b') \in \mathbb{R}^4$ donc $(b+b') \in \mathbb{R}$ et $(c+bb') \in \mathbb{R}$ car $\mathbb{R}$ est un corps . Alors $M.M' \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par conséquent F est stable pour la multiplication des matrices .

(c) Montrons que toute matrice $M(1; b; c)$ est inversible

$$M(1; b; c) = \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det(M(1; b; c)) = 1 \neq 0$ alors $M(1; b; c)$ est inversible

• Sa matrice inverse dans F

$$\begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = x_1 + bx_2 + cx_3 \\ y_2 = x_2 + bx_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = y_1 - by_2 + (b^2 - c)y_3 \\ x_1 = y_2 - by_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

Donc $M^{-1}(1; b; c) = \begin{pmatrix} 1 & -b & b^2 - c \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3- $f : E \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$M(a; b; c) \longmapsto (a+b; a-c)$

(a) Vérifions que f est une application linéaire

Soit $\alpha \in \mathbb{R}; M(a; b; c) \in E$ et $M(a'; b'; c') \in E$

$\alpha M(a; b; c) + M(a'; b'; c') = M(\alpha a; \alpha b; \alpha c) + M(a'; b'; c')$

$$\begin{aligned} f(\alpha M(a; b; c) + M(a'; b'; c')) &= f(M(\alpha a; \alpha b; \alpha c) + M(a'; b'; c')) \\ &= \alpha a + a' + \alpha b'; \alpha a + a' - \alpha c - c' \\ &= (\alpha(a+b) + (a'+b')); \alpha(a-c) + (a'-c') \\ &= \alpha(a+b; a-c) + (a'+b'; a'-c') \\ f(\alpha M(a; b; c) + M(a'; b'; c')) &= \alpha f(M(a; b; c)) + f(M(a'; b'; c')) \end{aligned}$$

Alors f est une application linéaire .

(b) Déterminons le noyau de f et donnons une dimension puis une base

$$\ker f = \{M(a; b; c) \in E / f(M(a; b; c)) = 0_{\mathbb{R}^2}\}$$

$$\begin{aligned} M(a; b; c) \in \ker f &\Leftrightarrow f(M(a; b; c)) = 0_{\mathbb{R}^2} \\ &\Leftrightarrow (a + b; a - c) = (0; 0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ a - c = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = -c \end{cases} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \ker f &= \{M(c; -c; c); c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{cI - cJ + cJ^2; c \in \mathbb{R}\} \\ \ker f &= \text{vect}((cI - cJ + cJ^2)) \end{aligned}$$

Alors $\ker f$ est engendré par le vecteur non nul $(cI - cJ + cJ^2)$ donc une base de $\ker f$ est $(cI - cJ + cJ^2)$ et $\dim \ker f = 1$

(c) Vérifions si f est surjective

D'après la formule du *rang* on a : $\dim E = \dim \ker f + \dim \text{Im} f$

Alors

$$\begin{aligned} \dim \text{Im} f &= \dim E - \dim \ker f \\ &= 3 - 1 \\ \dim \text{Im} f &= 2 \end{aligned}$$

Or $\text{Im} f \subset \mathbb{R}^2$ car $\text{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$

De plus $\dim \text{Im} f = \dim \mathbb{R}^2 = 2$ donc $\text{Im} f = \mathbb{R}^2$ par conséquent f est surjective

(d) Déterminons la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^2$

Dans la base canonique $\mathcal{B}'$ on a :

$$M(a; b; c) = \begin{pmatrix} a + b & a - c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Donc

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

Dans la base canonique $\mathcal{B}$ on a :

$$A \times I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow f(I) = A$$

$$A \times J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 10 :

$$f : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \quad n \geq 2$$

$$P \longmapsto P - (X - 2)P'$$

1-Prouvons que f est un endomorphisme

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $(P; Q) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$

$$\begin{aligned} f(\alpha P + Q) &= \alpha P + Q - (X - 2)(\alpha P + Q)' \\ &= \alpha P + Q - (X - 2)(\alpha P' + Q') \\ &= \alpha P + Q - (X - 2)(\alpha P') - (X - 2)Q' \\ &= \alpha P + Q - \alpha(X - 2)P' - (X - 2)Q' \\ &= \alpha P - \alpha(X - 2)P' + Q - (X - 2)Q' \\ &= \alpha[P - (X - 2)P'] + [Q - (X - 2)Q'] \\ f(\alpha P + Q) &= \alpha f(P) + f(Q) \end{aligned}$$

Par conséquent f est une application linéaire .

Or f est une application définie de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$

D'où f est un endomorphisme .

2-Déterminons $\ker f$ et donnons une base dans le cas $n = 2$

$$\ker f = \{P \in \mathbb{R}_2[X]; f(P) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}\}$$

$$\text{Posons } P = a + bX + cX^2; \quad (a; b; c) \in \mathbb{R}^3$$

$$\begin{aligned} P \in \ker f &\Leftrightarrow P - (X - 2)P' = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \\ &\Leftrightarrow P = (X - 2)P' \\ &\Leftrightarrow a + bX + cX^2 = (X - 2)(b + 2cX) \\ &\Leftrightarrow a + bX + cX^2 = 2cX^2 - 4cX - 2b + bX \\ &\Leftrightarrow a + bX + cX^2 = -2b + (b - 4c)X + 2cX^2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = -2b \\ b = b - 4c \\ c = 2c \end{cases} \\ P \in \ker f &\Leftrightarrow \begin{cases} a = -2b \\ c = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \ker f &= \{-2b + bX; b \in \mathbb{R}\} \\ \ker f &= \{b(-2 + X); b \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

$$\boxed{\ker f = \text{vect}((-2 + X))}$$

$\ker f$ engendré par le vecteur non nul $(-2 + X)$ par conséquent $(-2 + X)$ est une base de $\ker f$

3-Calculons $f(1)$; $f(X)$ puis $f(X^p)$ pour $p \leq n$

$$f(P) = P - (X - 2)P'$$

$$f(1) = 1$$

$$\boxed{f(1) = 1}$$

$$\begin{aligned} f(X^p) &= X^p - (X - 2)PX^{p-1} \\ &= X^p - PX^p + 2PX^{p-1} \\ f(X^p) &= (1 - P)X^p + 2PX^{p-1} \end{aligned}$$

$$\boxed{f(X^p) = (1 - P)X^p + 2PX^{p-1}}$$

- Déterminons une base de Imf puis sa dimension

On a : $Imf = \{f(P); P \in \mathbb{R}_n[X]\}$

$$\begin{aligned} Imf &= vect(1; f(X); f(X^2); \dots; f(X^j); \dots; f(X^n)) \\ &= vect(1; f(X^2); \dots; f(X^j); \dots; f(X^n)) \text{ car } f(X) = f(X^2) \end{aligned}$$

Soit $(\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\alpha_1 + \sum_{i=2}^n \alpha_i f(X^i) = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \sum_{i=2}^n \alpha_i f(X^i) = 0_{\mathbb{R}_n[X]} &\Leftrightarrow \alpha_1 + \alpha_2(4X - X^2) + \alpha_3(6X^2 - X^3) \\ &\quad + \alpha_{i-1}[2(i-1)X^{i-2} + (-i)X^{i-1}] \\ &\quad + \alpha_i[2iX^{i-1} + (1-i)X^i] \\ &\quad + \alpha_{i+1}[2(i+1)X^i + (-i)^{i+1}] + \dots \\ &\quad + \alpha_{n-1}[2(n-1)X^{n-2} + (-n)X^{n-1}] \\ &\quad + \alpha_n[2nX^{n-1} + (1-n)X^n] = 0_{\mathbb{R}_n[X]} \\ &\Leftrightarrow \alpha_1 + 4\alpha_2X + (-\alpha_2 + 6\alpha_3)X^2 + \dots \\ &\quad + [(-i)\alpha_{i-1} + 2i\alpha_i]X^{i-1} \\ &\quad + [(1-i)\alpha_i + 2(i+1)\alpha_{i+1}] + \dots + [(-n)\alpha_{n-1} + 2n\alpha_n]X^{n-1} \\ &\quad + (1-n)\alpha_nX^n = 0_{\mathbb{R}_n[X]} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ 4\alpha_2 = 0 \\ \vdots \\ (-i)\alpha_{i-1} + 2i\alpha_i = 0 \\ (1-i)\alpha_i + 2(i+1)\alpha_{i+1} = 0 \\ \vdots \\ (-n)\alpha_{n-1} + 2n\alpha_n = 0 \\ (1-n)\alpha_n = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ce qui donne $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots \alpha_n = 0$ Ainsi la famille $(1; f(X^2); \dots; f(X^j); \dots; f(X^n))$ est libre par conséquent elle constitue une base de Imf

On a :

$$\boxed{\dim Imf = n}$$

- Déterminons la matrice de f relative à la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$

$$f(1) = (1; 0; 0; \dots; 0)$$

$$f(X) = (2; 0; 0; \dots; 0)$$

$$f(X^2) = (0; 4; -1; \dots; 0)$$

$$f(X^{i-1}) = (0; \dots; 2(i-1); (-i); \dots; 0)$$

$$f(X^i) = (0; 2i; (1-i); \dots; 0)$$

$$f(X^{i+1}) = (0; \dots; 2(i+1); -i; \dots; 0)$$

$$f(X^{n-1}) = (0; \dots; 2(n-1); -n; 0)$$

$$f(X^n) = (0; \dots; 2n; 1-n)$$

$$\mathcal{Mat}_C(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 2(i-1) & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & (-i) & 2i & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & (1-i) & 2(i+1) & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & (-i) & \vdots & 2(n-1) & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & (-n) & 2n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & (1-n) \end{pmatrix}$$

4-Déterminons la dimension de $\ker f$ et une base de $\ker f$ dans le cas général

Comme $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie ; on a d'après le théorème du rang

$$\dim \mathbb{R}_n[X] = \dim \text{Im} f + \dim \ker f$$

alors

$$\begin{aligned} \dim \ker f &= \dim \mathbb{R}_n[X] - \dim \text{Im} f \\ &= (n+1) - n \\ \dim \ker f &= 1 \end{aligned}$$

On sait que $f(X) = 2f(1)$ alors $f(X) - 2f(1) = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$ donc $f(X-2) = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$ car f est linéaire d'où $(X-2) \in \ker f$ et comme $\dim \ker f = 1$, une base de $\ker f$ est $(X-2)$ car $(X-2) \neq 0_{\mathbb{R}_n[X]}$

Exercice 11 :

Exercice 12 :

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 ; u_1 = (1; 0; -1); u_2 = (1; -1; 0) ; \text{et } u_3 = (1; 1; 1)$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} ; (a; b) \in \mathbb{R}^2$$

1-Prouvons que $\mathcal{C} = (u_1; u_2; u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$

$$\det(u_1; u_2; u_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3$$

$\det(u_1; u_2; u_3) \neq 0$ Alors $(u_1; u_2; u_3)$ est libre dans $\mathbb{R}^3$

Comme $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$ alors $\mathcal{C} = (u_1; u_2; u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$

• Déterminons C la matrice de f dans $\mathcal{C}$

$$\begin{aligned} f(u_1) &= f((1; 0; -1)) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ 0 \\ b-a \end{pmatrix} = (a-b) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ f(u_1) &= (a-b)u_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(u_2) &= f((1; -1; 0)) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ 0 \\ b-a \end{pmatrix} = (a-b) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ f(u_2) &= (a-b)u_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(u_3) &= f((1; 1; 1)) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b \\ a+2b \\ a+2b \end{pmatrix} = (a+2b) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ f(u_3) &= (a+2b)u_3 \end{aligned}$$

Alors

$$C = \begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a+2b \end{pmatrix}$$

• Déterminons $C^n ; \forall n \in \mathbb{N}$

$$C = \begin{pmatrix} (a-b)^n & 0 & 0 \\ 0 & (a-b)^n & 0 \\ 0 & 0 & (a+2b)^n \end{pmatrix}$$

2-Prouvons par récurrence que $(PCP^{-1})^n = PC^nP^{-1}$ avec P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$

Pour $n = 0$ on a :

$$PC^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I \text{ donc } PC^0P^{-1} = I$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$

Supposons $(PCP^{-1})^k = PC^kP^{-1}$ et montrons $(PCP^{-1})^{k+1} = PC^{k+1}P^{-1}$

$$\begin{aligned}
 (PCP^{-1})^{k+1} &= (PCP^{-1})^k(PCP^{-1}) \\
 &= (PC^kP^{-1})(PCP^{-1}) \text{ hypothèse de récurrence} \\
 &= (PC^k)(P^{-1}P)(CP^{-1}) \\
 &= PC^kCP^{-1} \\
 (PCP^{-1})^{k+1} &= PC^{k+1}P^{-1}
 \end{aligned}$$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}; \boxed{(PCP^{-1})^{k+1} = PC^{k+1}P^{-1}}$

3-Déduisons que $\forall n \in \mathbb{N};$ on a

$$M^n = \frac{(a-b)^n}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{(a+2b)^n}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 P^{-1}MP = C &\Leftrightarrow PP^{-1}MP = PC \\
 &\Leftrightarrow IMPP^{-1} = PCP^{-1} \\
 &\Leftrightarrow MI = PCP^{-1} \\
 &\Leftrightarrow M = PCP^{-1} \\
 &\Leftrightarrow M^n = (PCP^{-1})^n \\
 P^{-1}MP = C &\Leftrightarrow M^n = PC^nP^{-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M^n &= PC^nP^{-1} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (a-b)^n & 0 & 0 \\ 0 & (a-b)^n & 0 \\ 0 & 0 & (a+2b)^n \end{pmatrix} \times \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (a-b)^n & (a-b)^n & (a+2b)^n \\ 0 & -(a-b)^n & (a+2b)^n \\ (a-b)^n & 0 & (a+2b)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2(a-b)^n + (a+2b)^n & -(a-b)^n + (a+2b)^n & -(a-b)^n + (a+2b)^n \\ -(a-b)^n + (a+2b)^n & 2(a-b)^n + (a+2b)^n & -(a-b)^n + (a+2b)^n \\ -(a-b)^n + (a+2b)^n & -(a-b)^n + (a+2b)^n & 2(a-b)^n + (a+2b)^n \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{3}(a-b)^n \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}(a+2b)^n \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

D'où $\boxed{M^n = \frac{(a-b)^n}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{(a+2b)^n}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$

Exercice 13 :

$\mathcal{B}(e_1; e_2; e_3)$ une base de E et $u = e_1 + e_2 + e_3$; $v = e_1 + e_2$ et $w = -e_2 + e_3$

$$\begin{cases} f_n(e_1) = e_1 - \frac{1}{n}e_2 + \frac{1}{n}e_3 \\ f_n(e_2) = \frac{1}{n}e_1 + \frac{n+2}{n}e_2 - \frac{1}{n}e_3 \\ f_n(e_3) = \frac{1}{n}e_1 + \frac{1}{n}e_2 + e_3 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} g(e_1) = 0 \\ g(e_2) = e_2 \\ g(e_3) = e_3 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} p(e_1) = u \\ p(e_2) = v \\ p(e_3) = w \end{array} \right.$$

1-Déterminons la matrice A_n de f_n relative à la base $\mathcal{B}$

$$\begin{cases} f_n(e_1) = e_1 - \frac{1}{n}e_2 + \frac{1}{n}e_3 \\ f_n(e_2) = \frac{1}{n}e_1 + \frac{n+2}{n}e_2 - \frac{1}{n}e_3 \\ f_n(e_3) = \frac{1}{n}e_1 + \frac{1}{n}e_2 + e_3 \end{cases} \Rightarrow A_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & \frac{n+2}{n} & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix}$$

-Déduisons pour tout $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$ l'écriture de $f_n(xe_1 + ye_2 + ze_3)$ dans la base $\mathcal{B}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} f_n(xe_1 + ye_2 + ze_3) &= f_n(xe_1) + f_n(ye_2) + f_n(ze_3) \\ &= xf_n(e_1) + yf_n(e_2) + zf_n(e_3) \\ &= x(e_1 - \frac{1}{n}e_2 + \frac{1}{n}e_3) + y(\frac{1}{n}e_1 + \frac{n+2}{n}e_2 - \frac{1}{n}e_3) + z(\frac{1}{n}e_1 + \frac{1}{n}e_2 + e_3) \\ f_n(xe_1 + ye_2 + ze_3) &= (x + \frac{1}{n}y + \frac{1}{n}z)e_1 + (-\frac{1}{n}x + \frac{n+2}{n}y + \frac{1}{n})e_2 + (\frac{1}{n}x - \frac{1}{n}y + z)e_3 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{f_n(xe_1 + ye_2 + ze_3) = (x + \frac{1}{n}y + \frac{1}{n}z)e_1 + (-\frac{1}{n}x + \frac{n+2}{n}y + \frac{1}{n})e_2 + (\frac{1}{n}x - \frac{1}{n}y + z)e_3}$

2-On pose $h_n = Id_E + \frac{1}{n}g \forall n \in \mathbb{N}^*$

(a)Prouvons que $\mathcal{C} = (u; v; w)$ est une base de E

Soit U la matrice de u dans la base E

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det U = 1 \neq 0$ alors la famille $(u; v; w)$ est libre engendrée par trois vecteurs en dimension trois donc $\mathcal{C} = (u; v; w)$ est une base de E

(b)Prouvons que la matrice D_n de h_n dans $\mathcal{B}$ est celle de f_n dans $\mathcal{C}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*; h_n = Id_E + \frac{1}{n}g$$

$$\begin{aligned} h_n(e_1) &= Id_E(e_1) + \frac{1}{n}g(e_1) = e_1 + \frac{1}{n}(0) = e_1 \\ h_n(e_2) &= Id_E(e_2) + \frac{1}{n}g(e_2) = e_2 + \frac{1}{n}e_2 = \frac{n+1}{n}e_2 \\ h_n(e_3) &= Id_E(e_3) + \frac{1}{n}g(e_3) = e_3 + \frac{1}{n}e_3 = \frac{n+1}{n}e_3 \end{aligned}$$

Alors

$$D_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n+1}{n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n+1}{n} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
f_n(u) &= f(e_1 + e_2 - e_3) = f_n(e_1) + f_n(e_2) - f_n(e_3) \\
&= e_1 - \frac{1}{n}e_2 + \frac{1}{n}e_3 + \frac{1}{n}e_1 + \frac{n+2}{n}e_2 - \frac{1}{n}e_3 - \frac{1}{n}e_1 - \frac{1}{n}e_2 - e_3 \\
f_n(u) &= e_1 + e_2 - e_3 = u \quad (1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_n(v) &= f_n(e_1 + e_2) = f_n(e_1) + f_n(e_2) \\
&= e_1 - \frac{1}{n}e_2 + \frac{1}{n}e_3 + \frac{1}{n}e_1 + \frac{n+2}{n}e_2 - \frac{1}{n}e_3 \\
&= \frac{n+1}{n}e_2 + \frac{n+1}{n}e_3 \\
&= \left(\frac{n+1}{n}\right)(e_1 + e_2) \\
f_n(v) &= \left(\frac{n+1}{n}\right)v \quad (2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_n(w) &= f_n(-e_2 + e_3) = -f_n(e_2) + f_n(e_3) \\
&= -\frac{1}{n}e_1 - \frac{n+2}{n}e_2 + \frac{1}{n}e_3 + \frac{1}{n}e_1 + \frac{1}{n}e_2 + e_3 \\
&= \left(\frac{n+1}{n}\right)(-e_2 + e_3) \\
f_n(w) &= \left(\frac{n+1}{n}\right)w \quad (3)
\end{aligned}$$

Soit F_n la matrice de f_n dans la base $\mathcal{C}$

$$F_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n+1}{n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n+1}{n} \end{pmatrix}$$

$D_n = F_n$ alors la matrice D_n de h_n dans la base $\mathcal{B}$ est celle de f_n dans $\mathcal{C}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

3- On pose $\pi_n = f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ \dots \circ f_n; \forall n \in \mathbb{N}^*$

(a) Prouvons que $\pi_n = p \circ h_1 \circ h_2 \circ h_3 \circ \dots \circ h_n \circ p^{-1}; \forall n \in \mathbb{N}^*$

D'après la question 2(b) $\forall n \in \llbracket 1; n \rrbracket; D_n = J^{-1}A_nJ$ avec J la matrice de p dans $\mathcal{C}$

$$\begin{aligned}
D_1 &= J^{-1}A_1J \\
D_2 &= J^{-1}A_2J \\
D_3 &= J^{-1}A_3J \\
&\vdots \\
D_n &= J^{-1}A_nJ
\end{aligned}$$

En faisant le produit membre à membre on a :

$$\begin{aligned}
D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n &= (J^{-1}A_1J) \times (J^{-1}A_2J) \times \dots \times (J^{-1}A_{n-1}J) \times (J^{-1}A_nJ) \\
&= J^{-1}A_1(J \times J^{-1})A_2(J \times J^{-1}) \dots (J \times J^{-1})A_{n-1}(J \times J^{-1})A_nJ \\
D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n &= J^{-1}A_1 \times A_2 \times \dots \times A_nJ
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n = J^{-1}A_1 \times A_2 \times \dots \times A_nJ &\Leftrightarrow D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n \times J^{-1} = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \\
&\Leftrightarrow A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n \times J^{-1} \\
&\Leftrightarrow \pi_n = p \circ h_1 \circ h_2 \circ h_3 \circ \dots \circ h_n \circ p^{-1}
\end{aligned}$$

D'où $\pi_n = p \circ h_1 \circ h_2 \circ h_3 \circ \dots \circ h_n \circ p^{-1}; \forall n \in \mathbb{N}^*$

(b) Prouvons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $h_1 \circ h_2 \circ h_3 \circ \dots \circ h_n = Id_E + ng$

Posons $\mathcal{P}(n) : h_1 \circ h_2 \circ h_3 \circ \dots \circ h_n = Id_E + ng; \forall n \in \mathbb{N}^*$

Soit G la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour $n = 1$; $D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ soit $D_1 = I_3 + 1G$

alors $h_1 = Id_E + 1g$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie

Supposons que $\mathcal{P}(k)$ est vraie et montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie

$\mathcal{P}(k) : h_1 \circ h_2 \circ h_3 \circ \dots \circ h_k = Id_E + kg$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(k+1) : h_1 \circ h_2 \circ h_3 \circ \dots \circ h_{k+1} &= h_1 \circ h_2 \circ h_3 \circ \dots \circ h_k \circ h_{k+1} \\ &= (Id_E + kg) \circ h_{k+1} \\ &= h_{k+1} + kg \circ h_{k+1} \\ &= Id_E + \frac{1}{k+1}g + kg \circ (Id_E + \frac{1}{k+1}g) \\ h_1 \circ h_2 \circ h_3 \circ \dots \circ h_{k+1} &= Id_E + \frac{1}{k+1}g + kg + \frac{k}{k+1}g \circ g \end{aligned}$$

$$G \times G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

alors $G \times G = G$ donc $g \circ g = g$

Ainsi

$$\begin{aligned} h_1 \circ h_2 \circ h_3 \circ \dots \circ h_{k+1} &= Id_E + \frac{1}{k+1}g + kg + \frac{k}{k+1}g \circ g \\ &= Id_E + \frac{1}{k+1}g + kg + \frac{k}{k+1}g \\ h_1 \circ h_2 \circ h_3 \circ \dots \circ h_{k+1} &= Id_E + (k+1)g \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie pour tout $k \geq 1$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*; \mathcal{P}(n) : h_1 \circ h_2 \circ h_3 \circ \dots \circ h_n = Id_E + ng$

(c) En déduisons $\pi(e_1); \pi(e_2)$ et $\pi(e_3)$

$$\begin{aligned} \pi_n &= p \circ h_1 \circ h_2 \circ h_3 \circ \dots \circ h_n \circ p^{-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \\ &= p \circ (h_1 \circ h_2 \circ h_3 \circ \dots \circ h_n) \circ p^{-1} \\ &= p \circ (Id_E + ng) \circ p^{-1} \\ &= (p + np \circ g) \circ p^{-1} \\ \pi_n &= Id_E + n(p \circ g \circ p^{-1}) \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } J^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J \times G \times J^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit Π_n la matrice de π_n

$$\Pi_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n & n \\ -n & 2n+1 & 1 \\ n & -n & 1 \end{pmatrix}$$

Dans la base canonique on a : $e_1 = (1; 0; 0)$; $e_2 = (0; 1; 0)$ et $e_3 = (0; 0; 1)$

$$\Pi_n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n & n \\ -n & 2n+1 & 1 \\ n & -n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -n \\ n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \pi_n(e_1) = e_1 - ne_2 + ne_3$$

Alors $\boxed{\pi_n(e_1) = e_1 - ne_2 + ne_3}$

$$\Pi_n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n & n \\ -n & 2n+1 & 1 \\ n & -n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ 2n+1 \\ -n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \pi_n(e_2) = e_1 + (2n+1)e_2 - ne_3$$

Alors $\boxed{\pi_n(e_2) = e_1 + (2n+1)e_2 - ne_3}$

$$\Pi_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n & n \\ -n & 2n+1 & 1 \\ n & -n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \pi_n(e_3) = ne_1 + ne_2 + e_3$$

Alors $\boxed{\pi_n(e_3) = ne_1 + ne_2 + e_3}$

4-(a) Prouvons que $h_1 \circ h_2 \circ h_3 \circ \dots \circ h_n$ est inversible et son inverse est $Id_E - \frac{n}{n+1}g$

$$h_1 \circ h_2 \circ h_3 \circ \dots \circ h_n = Id_E + ng$$

Soit M la matrice de $Id_E + ng$

$$M = I_3 + nG = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & n+1 & 0 \\ 0 & 0 & n+1 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & n+1 & 0 \\ 0 & 0 & n+1 \end{pmatrix}$$

$\det(M) = (n+1)^2 \neq 0$ alors M est inversible par conséquent $h_1 \circ h_2 \circ h_3 \circ \dots \circ h_n$ est inversible

Son inverse

$$\begin{cases} e_1 = a \\ (n+1)e_2 = b \\ (n+1)e_3 = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = a \\ e_2 = \frac{1}{(n+1)}b \\ e_3 = \frac{1}{(n+1)}c \end{cases} \Leftrightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Mat}(Id_E - \frac{n}{n+1}g) &= \mathcal{Mat}(Id_E) - \mathcal{Mat}(\frac{n}{n+1}g) \\ &= I_3 - \frac{n}{n+1}G \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{n}{n+1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n}{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n}{n+1} \end{pmatrix} \\ \mathcal{Mat}(Id_E - \frac{n}{n+1}g) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Alors $\mathcal{Mat}(Id_E - \frac{n}{n+1}g) = M^{-1}$; d'où son inverse est $Id_E - \frac{n}{n+1}g$

(b) Déduisons que π_n est inversible et déterminons dans $\mathcal{B}$ la matrice de $(\pi_n)^{-1}$

$$\pi_n = p \circ h_1 \circ h_2 \circ h_3 \circ \dots \circ h_n \circ p^{-1}; \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\pi_n = p \circ (Id_E + ng) \circ p^{-1}$$

p est inversible alors p^{-1} est inversible. De plus $Id_E + ng$ est inversible donc $h_1 \circ h_2 \circ h_3 \circ \dots \circ h_n$ est inversible. D'où π_n est inversible.

Son inverse $(\pi_n)^{-1}$

$$\text{D'après la question 3-(c) on a : } \Pi_n = \begin{pmatrix} 1 & n & n \\ -n & 2n+1 & 1 \\ n & -n & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & n & n \\ -n & 2n+1 & 1 \\ n & -n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + nx_2 + nx_3 = y_1 \\ -nx_1 + (2n+1)x_2 + nx_3 = y_2 \\ nx_1 - nx_2 + x_3 = y_3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + nx_2 + nx_3 = y_1 \\ (n+1)^2 x_2 + n(n+1)x_3 = ny_1 + y_2 \\ -n(n+1)x_2 + n(1-n)x_3 = -ny_1 + y_3 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & n & n \\ -n & 2n+1 & 1 \\ n & -n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + nx_2 + nx_3 = y_1 \\ (n+1)^2 x_2 + n(n+1)x_3 = ny_1 + y_2 \\ -\frac{1}{n+1}y_1 + \frac{2n+1}{n+1}y_2 + y_3 = nx_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{n^2+2n+2}{(n+1)^2}y_1 - \frac{2n+1}{(n+1)^2}y_2 - \frac{1}{n+1}y_3 \\ x_2 = \frac{1}{(n+1)^2}y_1 - \frac{2n+1}{(n+1)^2}y_2 + \frac{n}{(n+1)}y_3 \\ x_3 = -\frac{1}{n(n+1)}y_1 + \frac{2n+1}{n+1}y_2 + \frac{1}{n}y_3 \end{cases}$$

$$(\Pi_n)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{n^2+2n+2}{(n+1)^2} & -\frac{2n+1}{(n+1)^2} & -\frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{(n+1)^2} & -\frac{2n+1}{(n+1)^2} & \frac{n}{(n+1)} \\ -\frac{1}{n(n+1)} & -\frac{2n+1}{n(n+1)} & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

Exercice 14 :

Exercice 15 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculons $(A - I)^3$

$$(A - I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A - I)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A - I)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A - I)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Déduisons que A est inversible

Comme A et I commutent on a : $(A - I)^3 = A^3 - 3A^2 + 3A - I$ donc $A^3 - 3A^2 + 3A - I = 0_3$ alors $A(A^2 - 3A + 3I) = I$. D'où A est inversible et $A^{-1} = A^2 - 3A + 3I$

Calculons l'inverse A^{-1} de A

$$A^{-1} = A^2 - 3A + 3I$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}; 3A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } 3I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Alors

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Exercice 15 :

Exercice 16 :

1- Prouvons qu'on a la relation $\Delta_n = \prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i) \Delta_{n-1}$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Pour tout $i \in [2; n]$; $L_i \leftarrow L_i - x_n L_{i-1}$

$$\begin{aligned}
\Delta_n &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 - x_n & x_2 - x_n & \dots & 0 \\ x_1^2 - x_n x_1 & x_2^2 - x_n x_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_1^{n-1} - x_n x_1^{n-2} & x_2^{n-1} - x_n x_2^{n-2} & \dots & 0 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} x_1 - x_n & x_2 - x_n & \dots & x_{n-1} - x_n \\ x_1(x_1 - x_n) & x_2(x_2 - x_n) & \dots & x_{n-1}(x_{n-1} - x_n) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_1^{n-2}(x_1 - x_n) & x_2^{n-2}(x_2 - x_n) & \dots & x_{n-1}^{n-2}(x_{n-1} - x_n) \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{n+1} (x_1 - x_n)(x_2 - x_n) \dots (x_{n-1} - x_n) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \dots & x_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{n+1} \prod_{i=1}^{n-1} (x_i - x_n) \Delta_{n-1} \\
&= (-1)^{n+1} \prod_{i=1}^{n-1} [-(x_n - x_i)] \Delta_{n-1} \\
&= (-1)^{n+1} (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i) \Delta_{n-1} \\
&= (-1)^{2n} \prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i) \Delta_{n-1} \\
\Delta_n &= \prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i) \Delta_{n-1}
\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\Delta_n = \prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i) \Delta_{n-1}}$$

2-Calculons Δ_n

$$\begin{aligned}
\Delta_n &= \prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i) \Delta_{n-1} \\
\Delta_{n-1} &= \prod_{i=1}^{n-2} (x_{n-1} - x_i) \Delta_{n-2} \\
&\vdots \\
&\vdots \\
&\vdots \\
\Delta_3 &= \prod_{i=1}^2 (x_3 - x_i) \Delta_2 \\
&= (x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \Delta_2 \\
\Delta_2 &= (x_2 - x_1) \Delta_1
\end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } \Delta_n = \prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i) \times \prod_{i=1}^{n-2} (x_{n-1} - x_i) \times \dots \times (x_2 - x_1) \Delta_1$$

Or $\Delta_1 = \det(1) = 1$

$$\Delta_n = \prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i) \times \prod_{i=1}^{n-2} (x_{n-1} - x_i) \times \cdots \times (x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_2 - x_1) = \prod_{i \leq j < k \leq n} (x_j - x_i)$$

3- Pour que la matrice vandermonde $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$ soit inversible il faut que $x_i \neq x_j$ avec $i \leq i < j \leq n$

Exercice 17 :

Déterminons D_1 ; D_2 et D_3 en présentant les résultats sous forme de produits de facteurs .

$$\begin{aligned}
D_1 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x+3 & x+3 & x+3 & x+3 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (x+3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (x+3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x-1 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & 1-x & 1-x \end{vmatrix} \\
&= -(x+3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1-x & 1-x & 1-x \\ 0 & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -(x+3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1-x & 1-x & 1-x \\ 0 & 0 & x-1 & x-1 \\ 0 & 0 & x-1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= -(x+3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1-x & 1-x & 1-x \\ 0 & 0 & x-1 & x-1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} \\
D_1 &= -(x+3)(1-x)(x-1)(1-x) = (x+3)(1-x)^3
\end{aligned}$$

$$\boxed{D_1 = (x+3)(1-x)^3}$$

$$\begin{aligned}
D_2 &= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} \\
&= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & c+a \end{vmatrix} \\
&= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 0 & c-b \end{vmatrix} \\
D_2 &= (b-a)(c-a)(c-b)
\end{aligned}$$

$$\boxed{D_2 = (b-a)(c-a)(c-b)}$$

$$\begin{aligned}
D_3 &= \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} \\
&= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} \\
&= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & -a & c-a & b-a \\ b & c-b & -b & a-b \\ c & b-c & a-c & -c \end{vmatrix} \\
&= (a+b+c) \begin{vmatrix} -a & c-a & b-a \\ c-b & -b & a-b \\ b-c & a-c & -c \end{vmatrix} \\
&= (a+b+c) \begin{vmatrix} -a-b+c & -a-b+c & 0 \\ c-b & -b & a-b \\ 0 & a-b-c & a-b-c \end{vmatrix} \\
D_3 &= (a+b+c)(a-b-c)(-a-b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ c-b & -b & a-b \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_3 &= (a+b+c)(a-b-c)(-a-b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ c-b & -b & a \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= (a+b+c)(a-b-c)(-a-b+c) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ c-b & a \end{vmatrix} \\
D_3 &= -(a-b-c)(-a-b+c)(a-b+c)
\end{aligned}$$

$$\boxed{D_3 = -(a-b-c)(-a-b+c)(a-b+c)}$$

Exercice 18 :

$$\begin{aligned}
f : \mathbb{K} &\longrightarrow E \\
(\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n) &\longmapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i
\end{aligned}$$

1- (a) Justifions que f est bijective

Soit $y \in E$

Comme $(e_1; e_2; \dots; e_n)$ constitue une base de E alors il existe un unique $(\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n)$ tel que

$$y = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$$

D'où $y = f(\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n)$. Par conséquent f est bijective .

- Déduisons alors que si $\mathbb{K}$ est un ensemble fini alors E est fini et déterminons le cardinal de E

$\mathbb{K}$ étant fini , alors $\mathbb{K}^n$ est fini et comme f est une bijection de $\mathbb{K}^n$ vers E alors E est fini et $\text{card}(E) = \text{card}(\mathbb{K}^n)$

$$\boxed{\text{card}(E) = \text{card}(\mathbb{K})^n}$$

(b) Déterminons le cardinal de E si $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ donc $\text{card}(\mathbb{K}^n) = \text{card}(\mathbb{K})^n = p^n$

Ainsi

$$\boxed{\text{card}(\mathbb{K}^n) = p^n}$$

2- Prouvons que si $\mathbb{K}$ est un ensemble infini alors E est infini

Comme $\mathbb{K}$ est infini alors $\mathbb{K}^n$ est infini . Or f une bijection de $\mathbb{K}^n$ dans E . Alors E est un ensemble infini .

3- Justifions que G admet au moins un supplémentaire H dans E de base $(b_1; b_2; \dots; b_n)$

G étant un sous-espace vectoriel de dimension finie .

Soit $(g_1; g_2; \dots; g_p)$ une base de G avec $p < n$ car G est un sous-espace vectoriel de $E \neq (0_E; E)$

D'après le théorème de la base incomplète , il existe $(g_{p+1}; g_{p+2}; \dots; g_n) \in E^{(n-p)}$ tel que

$(g_1; \dots; g_p; g_{p+1}; g_{p+2}; \dots; g_n)$ est une base .

Posons $H = \text{vect}(g_{p+1}; g_{p+2}; \dots; g_n)$

$H = \text{vect}(g_{p+1}; g_{p+2}; \dots; g_n)$ alors on a : $H \oplus G = E$. La famille $(g_1; g_2; \dots; g_n)$ est libre car elle est extraite d'une famille libre . Par conséquent $(g_1; g_2; \dots; g_n)$ est une base de H .

On peut choisir alors

$$\begin{aligned} b_1 &= g_{p+1} \\ b_2 &= g_{p+2} \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ b_m &= g_n \end{aligned}$$

En somme G admet un supplémentaire H dans E de base $(b_1; b_2; \dots; b_m)$

4- $a \in G$, $H_a = \text{vect}((a + b_i)_{i \in \{1; 2; \dots; m\}})$

(a) Prouvons que la famille $(a + b_i)_{i \in \{1; 2; \dots; m\}}$ est une base de H_a

$H_a = \text{vect}((a + b_i)_{i \in \{1; 2; \dots; m\}})$ donc $(a + b_i)_{i \in \{1; 2; \dots; m\}}$ est une famille génératrice de H_a

• Montrons que $(a + b_i)_{i \in \{1; 2; \dots; m\}}$ est libre

Soit $(\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_m) \in \mathbb{K}^m / \sum_{i=1}^m \alpha_i(a + b_i) = 0_E$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \alpha_i(a + b_i) = 0_E &\Leftrightarrow \alpha_1(a + b_1) + \alpha_2(a + b_2) + \dots + \alpha_m(a + b_m) = 0_E \\ &\Leftrightarrow \alpha_1 a + \alpha_1 b_1 + \alpha_2 a + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_m a + \alpha_m b_m = 0 \\ &\Leftrightarrow (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m)a + (\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_m b_m) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m)a = -(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_m b_m) \end{aligned}$$

Alors $(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_m b_m) \in G$ car $(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m)a \in G$ donc $\sum_{i=1}^m \alpha_i b_i \in H \cap G$ car

$\sum_{i=1}^m \alpha_i b_i \in H$ alors $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$. Donc $((a + b_i)_{i \in \{1; 2; \dots; m\}})$ est libre

(b) Prouvons que $E = G \oplus H_a$

Soit $x \in E$ tel que $x \in G \cap H_a$

$$\begin{aligned} x \in G \cap H_a &\Leftrightarrow x \in G \text{ et } x \in H_a \\ x \in H_a &\Rightarrow \exists (\lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_m) \in \mathbb{K}^m / x = \sum_{i=1}^m \lambda_i(a + b_i) \\ &\Rightarrow \exists (\lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_m) \in \mathbb{K}^m / x = \sum_{i=1}^m \lambda_i a + \sum_{i=1}^m \lambda_i b_i \\ &\Rightarrow \exists (\lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_m) \in \mathbb{K}^m / x - \sum_{i=1}^m \lambda_i a = \sum_{i=1}^m \lambda_i b_i \end{aligned}$$

Or $x \in G$ et $\sum_{i=1}^m \lambda_i a \in G$ alors $x - \sum_{i=1}^m \lambda_i a \in G$ donc $\sum_{i=1}^m \lambda_i b_i \in G$

De plus $\sum_{i=1}^m \lambda_i b_i \in H$ donc $\sum_{i=1}^m \lambda_i b_i \in H \cap G$

Or d'après la question 3- H et G sont supplémentaires alors $\sum_{i=1}^m \lambda_i b_i = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m$
car $(b_i)_{1 \leq i \leq m}$ est une base donc une famille libre alors $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i (a + b_i) = 0_E$

On a : $G \cap H_a \subset \{0_E\}$ or $\{0_E\} \subset G \cap H_a$ car $\{0_E\}$ est un sous-espace vectoriel de E donc $G \cap H_a = \{0_E\}$ (1)

Par ailleurs

$$\begin{aligned} \dim(E) &= \dim(G) + \dim(H) \text{ car } E = G \oplus H_a \\ &= \dim(G) + \dim(H_a) \text{ car } \dim(H) = \dim(H_a) \\ \dim(E) &= \dim(G + H_a) \text{ car } G \cap H_a = \{0_E\} \end{aligned}$$

donc $E = G + H_a$ (2)

De (1) et (2) on a :

$$\boxed{E = G \oplus H_a}$$

(c) Prouvons que $\forall(a; b) \in G, H_a = H_b \Rightarrow a = b$

Soit $(a; b) \in G$ tel que $H_a = H_b$
 $H_a = \text{vect}((a + b_i)_{i \in \{1; 2; \dots; n\}})$ donc $(a + b_i) \in H_a = H_b$.

Alors $(\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_m) \in \mathbb{K}^m$ tel que $(a + b_i) = \sum_{i=1}^m \alpha_i b_i - b_1 \in H \cap G = \{0_E\}$

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \alpha_i b_i - b_1 &= \{0_E\} \Leftrightarrow \alpha_1 b_1 - b_1 + \sum_{i=2}^m \alpha_i b_i = \{0_E\} \\ &\Leftrightarrow = \{0_E\}(\alpha_1 - 1)b_1 + \sum_{i=2}^m \alpha_i b_i = \{0_E\} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 - 1 = 0 \\ \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n = 0 \end{cases} \\ \sum_{i=1}^m \alpha_i b_i - b_1 &= \{0_E\} \Leftrightarrow a = b \end{aligned}$$

Alors $\boxed{\forall(a; b) \in G, H_a = H_b \Rightarrow a = b}$

(d)Déduisons que G admet une infinité de supplémentaire dans E

D'après la question (c) on en déduit qu'il $\exists(a; b) \in G$ tel que $a \neq b \Rightarrow H_a \neq H_b$

Or $(H_a)_{a \in G}$ est une famille de supplémentaire de G dans E alors G admet un nombre de supplémentaire égal au $\text{card}(G)$

De plus ; G est un sous-espace vectoriel de E qui est infini et $G \neq \{0_E\}$ donc G a un nombre infini de vecteur .

En somme G admet une infinité de supplémentaire dans E

Exercice 19

Prouvons que $\mathcal{C} = (1; X - 1; X^2 - 1; (X^2 - 1)(X + 1))$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} &= (1; X-1; X^2-1; (X^2-1)(X+1)) \\
1 &= (1; 0; 0; 0) \\
X-1 &= (-1; 1; 0; 0) \\
X^2-1 &= (-1; 0; 1; 0) \\
(X^2-1)(X+1) &= X^3+X^2-X-1 = (-1; -1; 1; 1)
\end{aligned}$$

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$\det(C) \neq 0$ alors C est libre dans $\mathbb{R}_3[X]$ et $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_3[X] = 4$
Donc $\mathcal{C} = (1; X-1; X^2-1; (X^2-1)(X+1))$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$

2-Prouvons que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$

$$f : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$$

$$P \longmapsto R \quad \text{avec } P = Q(X^2-1) + R$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}; (P_1; P_2) \in \mathbb{R}_3[X] \times \mathbb{R}_3[X]$ et $(R_1; R_2) \in \mathbb{R}_3[X] \times \mathbb{R}_3[X]$ les restes respectifs de la division euclidienne de P_1 par X^2-1 et P_2 par X^2-1

$$f(P_1) = R_1 \text{ et } f(P_2) = R_2$$

$$\alpha f(P_1) + f(P_2) = \alpha R_1 + R_2; P_1 = Q_1(X^2-1) + R_1 \text{ avec } \deg R_1 < 2$$

$$P_2 = Q_2(X^2-1) + R_2 \text{ avec } \deg R_2 < 2$$

$$\alpha P_1 + P_2 = (X^2-1)(\alpha Q_1 + Q_2) + (\alpha R_1 + R_2)$$

$\deg(\alpha R_1 + R_2) < \max\{\deg(\alpha R_1); \deg(R_2)\} < 2$ donc $(\alpha R_1 + R_2)$ est le reste de la division euclidienne de $\alpha P_1 + P_2$ par X^2-1

Alors

$$\begin{aligned}
f(\alpha P_1 + P_2) &= \alpha R_1 + R_2 \\
f(\alpha P_1 + P_2) &= \alpha f(P_1) + f(P_2)
\end{aligned}$$

Donc f est une application linéaire . De plus $f : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$ par conséquent f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

3-Déterminons les matrices $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f)$ de f relatives aux bases respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$

$$\text{Soit } \mathcal{B} = (1; X; X^2; X^3)$$

$$f(1) = 1 + 0.X + 0.X^2 + 0.X^3 = 1$$

$$f(X) = 0.1 + 1.X + 0.X^2 + 0.X^3 = X$$

$$f(X^2) = 0.1 + 0.X + 1.X^2 + 0.X^3 = 1$$

$$f(X^3) = 0.1 + 0.X + 0.X^2 + 1.X^3 = X$$

$$\boxed{\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$f(1) = 1$$

$$f(X-1) = f(X) - f(1) = X - 1$$

$$f(X^2-1) = f(X^2) - f(1) = 1 - 1 = 0$$

$$f((X^2-1)(X+1)) = f(X^3+X^2-X-1) = f(X^3) + f(X^2) - f(X) - f(1) = 0$$

$$\text{Mat}_C(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4-Calculons $rg(f)$

$$rg(f) = 2$$

•Déterminons l'image et le noyau de f

$$\begin{aligned} \text{Im} f &= \text{vect}(f(1); f(X); f(X^2); f(X^3)) \\ &= \text{vect}(1; X; 1; X) \\ \text{Im} f &= \text{vect}(1; X) \end{aligned}$$

$$\text{Im} f = \text{vect}(1; X)$$

$$\ker f = \{P \in \mathbb{R}_n[X] / f(P) = 0_{\mathbb{R}_n[X]}\}$$

$$P \in \mathbb{R}_n[X] \Rightarrow \exists(a; b; c; d) \in \mathbb{R}^4; P = aX^3 + bX^2 + cX + d$$

En faisant la division euclidienne de P par $X^2 - 1$ on a : $P = (aX + b)(X^2 - 1) + (a + c)X + b + d$

$\deg((a + c)X + b + d) < 2$ alors $f(P) = (a + c)X + b + d$ $\ker f = \{P \in \mathbb{R}_n[X] / f(P) = 0_{\mathbb{R}_n[X]}\}$

$$P \in \mathbb{R}_n[X] \Rightarrow \exists(a; b; c; d) \in \mathbb{R}^4; P = aX^3 + bX^2 + cX + d$$

$$\begin{aligned} f(P) = 0 &\Rightarrow (a + c)X + b + d = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ b + d = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} c = -a \\ d = -b \end{cases} \end{aligned}$$

$$P = aX^3 + bX^2 + cX + d$$

$$P = a(X^3 - X) + b(X^2 - 1)$$

$$\text{Donc } \ker f = \text{vect}((X^3 - X); (X^2 - 1))$$

$$\ker f = \text{vect}((X^3 - X); (X^2 - 1))$$

★ une base pour $\ker f$ et $\text{Im} f$

Il s'agit de montrer que $((1; X))$ et $((X^3 - X); (X^2 - 1))$ sont des familles libres donc $((1; X))$ est une base de $\text{Im} f$ et $((X^3 - X); (X^2 - 1))$ est une base de $\text{Ker} f$

★ Prouvons $\ker f \oplus \text{Im} f = \mathbb{R}_n[X]$

Soit $P \in \ker f \cap \text{Im} f$

$$\begin{aligned}
P \in \ker f \cap \operatorname{Im} f &\Leftrightarrow \begin{cases} P \in \ker f \\ P \in \operatorname{Im} f \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \exists(\alpha; \beta; \gamma; \lambda) \mathbb{R}^4; \begin{cases} P = \alpha.1 + \beta X \\ P = \gamma(X^3 - X) + \lambda(X^2 - 1) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta X = P \\ \alpha + \beta X = \gamma(X^3 - X) + \lambda(X^2 - 1) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \lambda = 0 \\ P = \alpha + \beta X \end{cases} \\
&\Leftrightarrow P = 0_{\mathbb{R}_3[X]}
\end{aligned}$$

Donc $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0_{\mathbb{R}_3[X]}\}$ (1)

$$\begin{aligned}
\dim(\ker f + \operatorname{Im} f) &= \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f - \dim(\ker f \cap \operatorname{Im} f) \\
&= \dim E \text{ car } \dim(\ker f \cap \operatorname{Im} f) = 0 \\
\dim(\ker f + \operatorname{Im} f) &= 4
\end{aligned}$$

Comme $(\ker f + \operatorname{Im} f) \subset \mathbb{R}_3[X]$ alors $\ker f + \operatorname{Im} f = \mathbb{R}_3[X]$ (2)

De (1) et (2) on déduit que $\mathbb{R}_3[X] = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$

D'où

$$\boxed{\mathbb{R}_3[X] = \ker f \oplus \operatorname{Im} f}$$

5-Prouvons que $(f \circ f) = f$ et $\forall n \in \mathbb{N}; f^n = f$

$$P = (X^2 - 1)Q + R; f(P) = R$$

$$f(f(P)) = f(R) = R \text{ donc } (f \circ f)(P) = f(P) \forall P \in \mathbb{R}_3[X]$$

D'où

$$\boxed{(f \circ f) = f}$$

Soit $\mathcal{P}(n) : f^n = f$ la propriété

Pour $n = 1$; on a :

$$f^1 = f \text{ alors } \mathcal{P}(1) \text{ est vraie}$$

supposons $f^k = f$ et montrons $f \text{ for all } k \in \mathbb{N}; f^k = f$ Soit $k > 2; k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
f^{k+1}(P) &= f^k(f(P)) \\
&= f^k(R) \\
&= f(R) \text{ Par hypothèse} \\
f^{k+1}(P) &= R
\end{aligned}$$

$$f^{k+1}(P) = f(P); \forall P \in \mathbb{R}_3[X]$$

Alors $f^n = f; \forall n > 2$

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$

$$T_r(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

1-(a) Prouvons que l'application $T_r : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow (\mathbb{R}); A \longmapsto T_r(A)$ est une application linéaire

Comme $\mathbb{R}$ est un corps de scalaire et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel alors il reste à montrer que T_r est une application linéaire pour montrer qu'elle a une forme linéaire

Soit $(A; B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

Posons $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$

$A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ alors $\alpha A = (\alpha a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ donc $(\alpha A + B) = (\alpha a_{ij} + b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$

En posant $(c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = (\alpha A + B)$

Alors

$$\begin{aligned} T_r(\alpha A + B) &= T_r(c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \\ &= \sum_{i=1}^n c_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^n (\alpha a_{ii} + b_{ii}) \\ &= \sum_{i=1}^n (\alpha a_{ii}) + \sum_{i=1}^n (b_{ii}) \\ &= \alpha T_r(A) + T_r(B) \\ T_r(\alpha A + B) &= \alpha T_r(A) + T_r(B) \end{aligned}$$

Donc on déduit que T_r est une application linéaire

★ Déterminons $Im(T_r)$ puis en déduit la dimension de $ker(T_r)$

$$\begin{aligned} T_r : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow (\mathbb{R}) \\ &\longmapsto \sum_{i=1}^n (a_{ii}) \end{aligned}$$

$T_r(E_{ii}) = 1$ et $Im(T_r) \subset \mathbb{R}$ (1)

$dim \mathbb{R} = 1$ donc $0 \leq dim Im(T_r) \leq 1$ or $0 \neq E_{ii} \subset Im(T_r)$ alors $dim Im(T_r) \neq 0$ par conséquent $dim Im(T_r) = 1$ (2)

De (1) et (2) $Im(T_r) = \mathbb{R}$

D'après la formule du rang on a : $dim \mathcal{M}(\mathbb{R}) = dim Im(T_r) + dim ker(T_r)$

$$\begin{aligned} dim ker(T_r) &= dim \mathcal{M}(\mathbb{R}) - dim Im(T_r) \\ &= n^2 - 1 \text{ car } dim \mathcal{M}(\mathbb{R}) = n^2 \\ dim ker(T_r) &= n^2 - 1 \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{dim ker(T_r) = n^2 - 1}$$

(b) Prouvons que $\forall A \in \mathcal{M}_{n;p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n;p}(\mathbb{R}); T_r(A \times B) = T_r(B \times A)$

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$

$$A \times B = (c_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} \text{ avec } c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

$$\begin{aligned}
T_r(A \times B) &= T_r(c_{ij}) \\
T_r(A \times B) &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}
\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
B \times A &= (c'_{ij})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq p} \text{ avec } c'_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik} a_{kj} \\
T_r(B \times A) &= T_r(c'_{ij}) \\
&= \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^n a_{ki} b_{ik} \\
T_r(B \times A) &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}
\end{aligned} \tag{2}$$

De (1) et (2) on a : $T_r(A \times B) = T_r(B \times A)$

Donc $\forall A \in \mathcal{M}_{n;p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n;p}(\mathbb{R})$; $\boxed{T_r(A \times B) = T_r(B \times A)}$

2-(a) Justifions que N est bien définie

$N : E \longrightarrow \mathbb{R}$

$A \longmapsto \sqrt{T_r(A^T \times A)}$

Il s'agit de montrer que $T_r(A^T \times A) \geq 0$

$$A^T \times A = \sum_{k=1}^n a_{jk} a_{ki}$$

$$T_r(A^T \times A) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{ki} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}^2 \text{ or } \forall (a_{ij})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq p}; (a_{ij})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq p}^2 \geq 0$$

Donc $T_r(A^T \times A) \geq 0$ ce qui justifie que T_r est bien définie

(b) Prouvons que pour tout $A \in E$; $N(A) = 0 \Rightarrow A = 0_E$

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq p}$ une matrice carrée d'ordre n à coefficient dans $\mathbb{R}$.

Supposons que $N(A) = 0$ et montrons que $A = 0_E$

$$N(A) = 0 \Rightarrow \sqrt{T_r(A^T \times A)} = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}^2} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}^2 = 0$$

$$\Rightarrow a_{ik} = 0 \quad \forall i \in [1; n]; \forall k \in [1; n]$$

On conclut que $\forall i \in [1; n]; \forall j \in [1; n]; a_{ij} = 0$ soit $A = 0_E$

D'où $\forall A \in E; N(A) = 0 \Rightarrow A = 0_E$

(c) Comparons $N(A)$ et $N(A^T)$

On sait que $\forall (A; B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) T_r(A \times B) = T_r(B \times A)$

En particulier pour deux matrice d'ordre n on a :

$$\begin{aligned}
N(A^T) &= \sqrt{T_r(A^T)^T \times A^T} \\
&= \sqrt{T_r(A \times A^T)} & (A^T)^T &= A \\
&= \sqrt{T_r(A^T \times A)} & & \text{d'après 1 - (b)} \\
N(A^T) &= N(A)
\end{aligned}$$

D'où $\boxed{N(A^T) = N(A)}$

Exercice 21 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1-Prouvons que le sous-espace vectoriel $\ker(f - Id_{\mathbb{R}^3})$ est le sous-espace engendré par le vecteur $u = (1; 1; 0)$

Soit $w = (x; y; z) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}
w \in \ker(f - Id_{\mathbb{R}^3}) &\Leftrightarrow f - Id_{\mathbb{R}^3}(w) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
&\Leftrightarrow (A - I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow w = (x; x; 0) \\
&\Leftrightarrow w = x(1; 1; 0)
\end{aligned}$$

Comme w est choisi de manière quelconque dans $\ker(f - id_{\mathbb{R}^3})$ donc $\ker(f - id_{\mathbb{R}^3}) = \text{vect}((1; 1; 0))$

D'où $\ker(f - Id_{\mathbb{R}^3})$ est le sous-espace engendré par le vecteur $u = (1; 1; 0)$

★Prouvons que $v = (0; 0; 1)$ est tel que $\ker(f - id_{\mathbb{R}^3})(v) = u$

$$(A - I) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\ker(f - id_{\mathbb{R}^3})(v) = u$ car la matrice de $\ker(f - id_{\mathbb{R}^3})(v) = u$ est exactement

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$

2-Choisissons un vecteur w de l'espace vectoriel $\ker(f - 2id_{\mathbb{R}^3})$

Soit $\vec{t} = (x; y; z) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}
 \vec{t} = (x; y; z) \in \ker(f - 2\text{id}_{\mathbb{R}^3}) &\Leftrightarrow \ker(f - 2\text{id}_{\mathbb{R}^3})(\vec{t}) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
 &\Leftrightarrow (A - 2I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -x + z \\ -x + z \\ x - y - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} -x + z = 0 \\ -x + z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} -x + z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \vec{t} = (x; 0; x) = x(1; 0; 1)
 \end{aligned}$$

On peut prendre $w = (1; 0; 1)$. Alors w est bien un élément de $\ker(f - 2\text{id}_{\mathbb{R}^3})$

-Prouvons que $(u; v; w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$

$$\det(u; v; w) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$\det(u; v; w) \neq 0$ alors $(u; v; w)$ est une famille libre dans $\mathbb{R}^3$

Comme $\mathbb{R}^3$ est un espace vectoriel de dimension 3 et $(u; v; w)$ a trois vecteurs donc $(u; v; w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$

-Calculons la matrice T de f dans $(u; v; w)$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f(u) = u$$

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow f(v) = u + v$$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow f(w) = 2w$$

Alors $f(u) = u$; $f(v) = u + v$ et $f(w) = 2w$
Donc

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3-Calculons $f^k(v)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} (f - id_{\mathbb{R}^3})(v) = u &\Leftrightarrow f(v) - v = u \\ &\Leftrightarrow f(v) = u + v \\ &\Leftrightarrow f^2(v) = f(u + v) \\ &\Leftrightarrow f^2(v) = f(u) + f(v) \text{ car } f \text{ linéaire} \\ &\Leftrightarrow f^2(v) = u + u + v \text{ car } f(u) = u \text{ et } f(v) = u + v \\ &\Leftrightarrow f^2(v) = 2u + v \\ &\Leftrightarrow f^3(v) = f(2u + v) \\ &\Leftrightarrow f^3(v) = f(2u) + f(v) \\ &\Leftrightarrow f^3(v) = 2f(u) + f(v) \\ &\Leftrightarrow f^3(v) = 2u + u + v \\ &\Leftrightarrow f^3(v) = 3u + v \end{aligned}$$

De proche en proche on a : $f^k(v) = ku + v$

Posons $\mathcal{P}(k) : f^k(v) = ku + v$

Prouvons $\mathcal{P}(k)$ par récurrence

Pour $k = 0$ on a : $f^0(v) = id_{\mathbb{R}^3}(v) = v$ alors $\mathcal{P}(0)$ est vraie

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Supposons $\mathcal{P}(n) : f^n(v) = nu + v$ et montrons $\mathcal{P}(n+1) : f^{n+1}(v) = (n+1)u + v$

$$\begin{aligned} f^{n+1}(v) &= f(f^n(v)) \\ &= f(nu + v) && \text{hypothèse de récurrence} \\ &= f(nu) + f(v) \\ &= nf(u) + f(v) \\ &= nu + u + v \\ f^{n+1}(v) &= (n+1)u + v \end{aligned}$$

Alors

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}; f^n(v) = nu + v}$$

-Dédudisons T^k pour tout $k \in \mathbb{N}$

$f(u) = u \Rightarrow f^2(u) = f(f(u)) = f(u) = u$; donc $\forall k \in \mathbb{N}; f^k(u) = u$ (1)

$f(w) = 2w \Rightarrow f^2(w) = f(f(w)) = f(2u) = 2f(w) = 2^2w$; donc $\forall k \in \mathbb{N}; f^k(w) = 2^k w$ (2)

NB : On pourra aussi démontrer par récurrence (1) et (2)

Donc

$$T^k = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$$

4-Calculons A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$

Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base $(u; v; w)$ alors $T = P^{-1}AP$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculons P^{-1}

$$\begin{aligned} \begin{cases} e_1 + e_2 = u \\ e_3 = v \\ e_1 + e_3 = w \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} e_1 + e_2 = u \\ e_3 = v \\ e_1 = w - e_3 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} e_1 + e_2 = u \\ e_3 = v \\ e_1 = w - v \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} e_1 = -v + w \\ e_2 = u + v - w \\ e_3 = v \end{cases} \end{aligned}$$

Alors

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} T = P^{-1}AP &\Leftrightarrow A = PTP^{-1} \\ &\Leftrightarrow A^k = PT^kP^{-1} \end{aligned}$$

NB : On pourra démontrer A^k par récurrence

$\forall k \in \mathbb{N}; A^k = PT^kP^{-1}$

$$\begin{aligned} A^k &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \forall k \in \mathbb{N} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & k & 2^k \\ 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \forall k \in \mathbb{N} \\ A^k &= \begin{pmatrix} 2^k - k & k - 2^k + 1 & k \\ -k & k + 1 & k \\ 2^k - 1 & 1 - 2^k & 1 \end{pmatrix}; \forall k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Donc

$$A^k = \begin{pmatrix} 2^k - k & k - 2^k + 1 & k \\ -k & k + 1 & k \\ 2^k - 1 & 1 - 2^k & 1 \end{pmatrix}; \forall k \in \mathbb{N}$$

Ainsi $\ker f^3 = E$ (2)

Soit $x \in \ker f$

$$\begin{aligned} x \in \ker f &\Leftrightarrow f(x) = \{0_E\} \\ &\Leftrightarrow f^2(x) = f(\{0_E\}) = \{0_E\} \\ &\Leftrightarrow x \in \ker f^2 \end{aligned}$$

donc $\ker f \subset \ker f^2$ (3)

$$\begin{aligned} x \in \ker f^2 &\Leftrightarrow f^2(x) = f(\{0_E\}) \\ &\Leftrightarrow f^3(x) = f^2(\{0_E\}) = \{0_E\} \\ &\Leftrightarrow x \in \ker f^3 \end{aligned}$$

donc $\ker f^2 \subset \ker f^3$ (4)

De (1); (2); (3) et (4) on conclut que $\{0_E\} = \ker f \subset \ker f^2 \subset \ker f^3 \subset E$

(b) Prouvons que $\text{Im} f^2 \subset \ker f$

Soit $y \in \text{Im} f^2$

$$\begin{aligned} y \in \text{Im} f^2 &\Rightarrow \exists x \in E; y = f^2(x) \\ &\Rightarrow f(y) = f^3(x) = \{0_E\} \\ &\Rightarrow y \in \ker f \end{aligned}$$



donc

$$\boxed{\text{Im} f^2 \subset \ker f}$$

★ Déduisons que $\text{rg}(f^2) \leq \dim \ker f^2$

On sait que $\text{Im} f^2 \subset \ker f$ or $\ker f \subset \ker f^2$ d'après (a)

donc $\text{Im} f^2 \subset \ker f^2$ ainsi $\dim \text{Im} f^2 \leq \dim \ker f^2$ donc $\text{rg}(f^2) \leq \dim \ker f^2$

car $\dim \text{Im} f^2 = \text{rg}(f^2)$

Alors

$$\boxed{\text{rg}(f^2) \leq \dim \ker f^2}$$



★ Montrons que $\text{rg}(f^2) = 1$

D'après la formule du rang on a : $\dim \ker f^2 + \dim \text{Im} f^2 = \dim(E) = 3$

alors $\text{rg}(f^2) = 3 + \dim \ker f^2$ donc $\text{rg}(f^2) \leq 1$ par conséquent $\text{rg}(f^2) = \{0; 1\}$

-si $\text{rg}(f^2) = 0$ alors $\dim \text{Im} f^2 = 0$

$\dim \text{Im} f^2 = 0 \Leftrightarrow \text{Im} f^2 = \{0\} \Leftrightarrow \exists x \in E; f^2(x) = 0$ or l'indice de nilpotence est $n = 3$

donc $\text{rg}(f^2) \neq 0$

D'où

$$\boxed{\text{rg}(f^2) = 1}$$

(c) Prouvons que $\text{Im} f^2 \neq \text{Im} f$

Supposons que $\text{Im} f^2 = \text{Im} f$

D'après la formule du rang on a : $\dim(E) = \dim \ker f^2 + \dim \text{Im} f^2$

et $\dim(E) = \dim \ker f + \dim \text{Im} f$

Alors $\dim \ker f^2 = \dim \ker f$ or $\ker f^2 \subset \ker f$ donc $\ker f^2 = \ker f$ Soit $u \in E$

$$\begin{aligned} u \in \ker f^2 &\Leftrightarrow f^2(u) = 0 \\ &\Leftrightarrow f(u) = 0 \text{ car } f^2(u) = f^3(u) = f(u) = 0 \\ &\Leftrightarrow f = 0_{\mathcal{L}(E)} \text{ ce qui est absurde car l'indice de nilpotence est } 3 \end{aligned}$$

Alors

$$\boxed{\operatorname{Im} f^2 \neq \operatorname{Im} f}$$

★ Déduisons que $\dim_{\mathbb{K}} \ker f = 1$

d'après la formule du rang on a : $\dim(E) = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$
alors

$$\begin{aligned} \dim \ker f &= \dim(E) - \dim \operatorname{Im} f \\ &= 3 - \dim \operatorname{Im} f \end{aligned}$$

or $\dim \operatorname{Im} f^2 \neq \dim \operatorname{Im} f$ alors $\dim \operatorname{Im} f = 2$ car $\operatorname{Im} f \neq 0$
donc $\dim \ker f = 3 - 2 = 1$

$$\boxed{\dim \ker f = 1}$$

Exercice

$\mathcal{B}(e_1; e_2; e_3)$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1-Déterminons le rang de f

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(f) &= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \operatorname{rg}(f) &= 2 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\operatorname{rg}(f) = 2}$

★ Montrons si f est bijective

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$\det(M) = 0$ donc f n'est pas bijective.

★ Dédoublons $\dim \ker f$

D'après la formule du *rang* on a : $\dim E = \dim \ker f + \text{rg}(f)$

$$\dim \ker f = \dim E - \text{rg}(f) = 3 - 2 = 1$$

$$\boxed{\dim \ker f = 1}$$

2-Calculons la matrice $\mathcal{M}at(f^k)$ de f^k

$$\mathcal{M}at(f^1) = M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}at(f^2) = M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}at(f^2) = M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$$

Alors $\boxed{\forall k \geq 1, \mathcal{M}at(f^k) = 0_3}$

3- $v \notin \ker f^2$

(a) Prouvons que $\mathcal{C} = (f^2(v); -f(v); v)$ est une base de E

Soit $v = (x; y; z) \in \mathbb{R}^3$

$\ker f^2 = \{v \in \mathbb{R}^3; f^2(v) = 0\}$ or $v \notin \ker f^2$ alors $f^2(v) \neq 0$

Soit $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ la matrice de v

$$M^2.V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ -2x - 2y - 2z \\ x + y + z \end{pmatrix}$$

$$M.V = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ 3x - y + z \\ x - z \end{pmatrix}$$

Soit $(\alpha; \beta; \gamma) \in \mathbb{R}^3; \alpha f^2(v) - \beta f(v) + \gamma v = 0$

Alors

$$\begin{aligned}
\alpha M^2.V - \beta M.V + \gamma V = 0_3 &\Rightarrow V(\alpha M^2 - \beta M + \gamma I_3) = 0_3 \\
&\Rightarrow \alpha M^2 - \beta M + \gamma I_3 = 0_3 \text{ car } V \neq 0_3 \\
&\Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \beta \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0_3 \\
&\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ -2\alpha & -2\alpha & -2\alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2\beta & \beta & 0 \\ -3\beta & -\beta & \beta \\ \beta & 0 & -\beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} = 0_3 \\
&\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha - 2\beta + \gamma & \alpha - \beta & \alpha \\ -2\alpha + 3\beta & -2\alpha + \beta + \gamma & -2\alpha + \gamma \\ \alpha - \beta & \alpha & \alpha + \beta + \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \begin{cases} \alpha - 2\beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ -2\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ -2\alpha + \gamma = 0 \\ -2\alpha + 3\beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Alors les vecteurs $f^2(v); -f(v)$ et v sont linéairement indépendantes or $\dim \mathcal{R}^3 = 3$ donc $\mathcal{C} = (f^2(v); -f(v); v)$ est une base de E

4- On pose $N = M + I_3$ où I_3 est la matrice unité d'ordre 3

(a) Calculons N^n en fonction de M pour $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
N^n &= (M + I_3)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k M^k I_3^{n-k} \\
&= C_n^0 M^0 I_3^n + C_n^1 M I_3^{n-1} + C_n^2 M^2 I_3^{n-2} + \dots + C_n^n M^n I_3^0 \\
N^n &= I_3 + nM + \frac{n(n-1)}{2} M^2
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{N^n = I_3 + nM + \frac{n(n-1)}{2} M^2; \forall n \in \mathbb{N}}$

(b) Déduisons l'expression de N^n en fonction de $n; n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
 N^n &= I_3 + nM + \frac{n(n-1)}{2}M^2; \forall n \in \mathbb{N} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2n & n & 0 \\ -3n & -n & n \\ n & 0 & -n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}n(n-1) & \frac{1}{2}n(n-1) & \frac{1}{2}n(n-1) \\ -n(n-1) & -n(n-1) & -n(n-1) \\ \frac{1}{2}n(n-1) & \frac{1}{2}n(n-1) & \frac{1}{2}n(n-1) \end{pmatrix} \\
 N^n &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}n(n-1) + 1 & \frac{1}{2}n(n-1) & \frac{1}{2}n(n-1) \\ -n(n+2) & n^2 + 1 & n(n+2) \\ \frac{1}{2}n(n+1) & \frac{1}{2}n(n-1) & \frac{1}{2}n(n-3) + 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Donc $N^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}n(n-1) + 1 & \frac{1}{2}n(n-1) & \frac{1}{2}n(n-1) \\ -n(n+2) & n^2 + 1 & n(n+2) \\ \frac{1}{2}n(n+1) & \frac{1}{2}n(n-1) & \frac{1}{2}n(n-3) + 1 \end{pmatrix}$

(b) Ecrivons la matrice M' de f relativement à la base $\mathcal{C}$

$P^{-1}MP = M'$ avec P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$

$$P = \begin{pmatrix} x+y+z & 2x+y & x \\ -2x-2y-2z & -3x-y+z & y \\ x+y+z & x-z & z \end{pmatrix}$$