



Université d'Abomey-Calavi
Faculté des Sciences et Techniques
(FAST)
Département de Mathématiques

Cours d'Analyse Mathématique :
Fonction d'une variable réelle

Table des matières

1	Les nombres réels	5
1.1	Opérations et ordre dans $\mathbb{R}$	5
1.1.1	Quelques ensembles usuels	5
1.2	L'ensemble des nombres réels	6
1.2.1	Addition et multiplication dans $\mathbb{R}$	7
1.3	Relation d'ordre	7
1.3.1	Relations binaires	7
1.3.2	Propriétés d'une relation binaire	8
1.3.3	Relation d'ordre	8
1.3.4	L'ordre dans $\mathbb{R}$	8
1.4	Topologie de $\mathbb{R}$	9
1.4.1	Les intervalles de $\mathbb{R}$	9
1.4.2	Ouverts-Fermés	10
1.4.3	Intérieur et adhérence d'un ensemble	11
1.4.4	Représentation géométrique de $\mathbb{R}$	11
1.5	Borne supérieure et borne inférieure	11
1.6	Propriétés de la borne supérieure sur $\mathbb{R}$	13
1.6.1	Exercice	14
1.6.2	Exercice	14
1.6.3	Exercice	14
1.7	Application : intervalles de $\mathbb{R}$	15
1.8	Axiome d'Archimède	16
1.9	Racine n-ième d'un nombre réel positif	17
1.10	Densité des nombres rationnels et des irrationnels	18
1.10.1	Définition	18
1.10.2	Définition	18
1.11	Approximation d'un réel	19
1.11.1	Notion de valeur absolue	19
1.11.2	Distance sur $\mathbb{R}$	20
1.11.3	Approximation d'un nombre réel	20
1.12	La droite réelle achevée	21
1.12.1	Voisinage de $+\infty, -\infty$	21
1.13	Exercices	21
2	Suites numériques	24
2.1	Le raisonnement par récurrence	24
2.1.1	Principe	24
2.1.2	Point de la méthode	24
2.2	Généralités sur les suites numériques	25
2.2.1	Définition et Notation	25
2.2.2	Mode de détermination d'une suite	26
2.3	Propriétés éventuelles d'une suite	26
2.3.1	Monotonie d'une suite	26

2.3.2	Suite majorée-Suite minorée et Suite bornée	27
2.4	Suite arithmétique-Suite géométrique	28
2.4.1	Suite arithmétique	28
2.4.2	Suite géométrique	29
2.4.3	Exercice	29
2.4.4	Exercice	30
2.4.5	Exercice	30
2.4.6	Exercice	30
2.4.7	Suite arithmético-géométrique	31
2.4.8	Exercice	31
2.4.9	Exercice	31
2.4.10	Exercice	31
2.4.11	Exercice	32
2.4.12	Comportement à l'infini d'une suite	32
2.5	Propriétés de la limite	33
2.5.1	Opérations sur les suites	35
2.6	Suites extraites	37
2.6.1	Suites adjacentes	38
2.6.2	Exercices	40
2.6.3	Limite inférieure-Limite supérieure	41
2.6.4	Suite de Cauchy	45
2.7	Comparaison des suites	47
2.7.1	Suite dominée par une autre	47
2.7.2	Suite négligeable devant une autre	47
2.7.3	Suites équivalentes	47
2.8	Exercices	49
2.8.1	Exercice	49
2.8.2	Exercice	49
2.8.3	Exercice	49
2.8.4	Exercice	50
2.8.5	Exercice	50
2.8.6	Exercice	50
2.8.7	Exercice	50
2.8.8	Exercice	51
2.8.9	Exercice	51
3	Réurrences linéaires d'ordre 2	52
3.1	Introduction	52
3.2	Espace vectoriel des réurrences	52
3.3	Résolution	53
3.3.1	Les racines de l'équation caractéristique sont réelles et distinctes	53
3.3.2	L'équation caractéristique a une racine double	53
3.3.3	Les racines de l'équation caractéristique sont distinctes et complexes conjuguées	54
3.3.4	Applications	54
3.4	Réurrences linéaires et calcul matriciel	54

4 Fonctions numériques d'une variable réelle	56
4.1 Généralités	56
4.1.1 Propriétés globales d'une fonction	56
4.1.2 Propriétés locales d'une fonction	57
4.1.3 Opérations sur les fonctions	57
4.2 Notion de limite d'une fonction	58
4.2.1 Limite d'une fonction en un point	58
4.2.2 Limite infinie en un point	59
4.2.3 Limite finie à l'infini	59
4.2.4 Limite infinie à l'infini	60
4.3 Continuité	61
4.3.1 Continuité en un point	61
4.3.2 Cas des fonctions Lipschitziennes	62
4.3.3 Continuité à droite-Continuité à gauche	62
4.3.4 Continuité sur un intervalle	63
4.4 Comparaison locale d'une fonction	65
4.4.1 Fonction dominante - fonction négligeable	66
4.4.2 Fonctions équivalentes	67
4.4.3 Continuité et Monotonie	68
4.5 Dérivée et Fonction dérivée d'une fonction d'une variable	69
4.5.1 Définition	69
4.5.2 Dérivabilité à gauche et à droite en un point	69
4.5.3 Interprétation géométrique du nombre dérivé	69
4.5.4 Fonction dérivée	71
4.5.5 Dérivées successives-Classe d'une fonction	71
4.5.6 Fonctions dérivées usuelles	74
4.5.7 Règles de dérivation	74
4.5.8 Différentielle d'une fonction d'une variable	75
4.5.9 Différentielle logarithmique	75
4.5.10 Propriétés des fonctions dérivables	76
4.5.11 Exercices	77
4.5.12 Lien entre la dérivée et la monotonie	78
4.6 Fonctions inverses : Quelques rappels	79
4.7 Fonctions inverses de quelques fonctions usuelles	80
4.7.1 Fonction Arcsin	80
4.7.2 Fonction Arccos	81
4.7.3 Fonction Arctangente	82
4.7.4 Exercices	83
4.7.5 Fonction cosinus et sinus hyperbolique	85
4.7.6 Fonction argument cosinus hyperbolique	86
4.7.7 Fonction argument sinus hyperbolique	86
4.7.8 Fonction tangente hyperbolique	87
4.8 Développement limité	89
4.8.1 Développement de Taylor	89
4.8.2 Développement limité des fonctions usuelles	91
4.8.3 Opérations sur les développements limités	92
4.8.4 Recherche d'équivalents et de limites	94
4.8.5 Etude d'une fonction au voisinage d'un point	94

4.9	Fonctions convexes et fonctions concaves	94
4.9.1	Définition	94
4.9.2	Interprétation géométrique de la convexité	94
4.9.3	Quelques applications	97
4.10	Exercices	99
4.10.1	Exercice	99
4.10.2	Exercice	99
4.10.3	Exercice	99
4.10.4	Exercice	99
4.10.5	Exercice	99
4.10.6	Exercice	99
4.10.7	Exercice	99
4.10.8	Exercice	100

Les nombres réels

1.1 Opérations et ordre dans $\mathbb{R}$

1.1.1 Quelques ensembles usuels

On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Comme chaque entier naturel n admet un successeur qui est $n + 1$, on se convainc sans peine que $\mathbb{N}$ est un ensemble infini. On note $\mathbb{N}^*$ l'ensemble $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, c'est-à-dire l'ensemble des entiers naturels non nuls.

Etant donnés deux entiers naturels x et y on sait définir les nombres

$$x + y, x - y, x \times y \text{ et } \frac{x}{y} \text{ si } y \neq 0.$$

On remarque que l'addition et la multiplication sont des opérations qui ont leur résultat dans $\mathbb{N}$. (On dit alors que $\mathbb{N}$ est stable pour l'addition et la multiplication). Par contre le résultat d'une soustraction ou d'une division n'est pas toujours un entier naturel. On crée ainsi de nouveaux nombres (ou de nouveaux ensembles)

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\},$$

l'ensemble des entiers relatifs, on notera $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, et

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

l'ensemble des nombres rationnels dans lequel on identifie la fraction $\frac{a}{b}$ avec $\frac{a.n}{b.n}$ pour tout $a \in \mathbb{Z}$ et $b, n \in \mathbb{Z}^*$.

On a bien entendu les inclusions suivantes :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

et les quatre opérations élémentaires $+$, $-$, $\times$ et $/$ peuvent s'étendre à l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels.

Les grecs classiques ont cru longtemps que toutes les quantités s'exprimaient par des nombres rationnels. Ils se sont aperçu que ce n'est pas toujours le cas. En effet on peut construire des nombres qui ne sont pas rationnels. Considérons par exemple un triangle ABC rectangle en A . Si on note a la longueur du segment $[BC]$, b celle de $[AC]$ et c celle de $[AB]$, alors d'après le théorème de Pythagore on a la relation :

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Ainsi on obtient que la longueur de la diagonale du triangle lorsque $b = c = 1$ est égale à $a = \sqrt{2}$.

Exemple 1.1. Le nombre $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Démonstration. A faire en exercice □

Voici d'autres exemples de nombres irrationnels.

1. Le nombre $\pi = 3,1415\dots$ défini comme étant la circonférence d'un cercle de diamètre 1.
2. le nombre e d'Euler : $e = 2,718\dots$, la base de l'exponentielle, défini comme somme infinie

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{k!} + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}.$$

3. Les racines carrées $\sqrt{n}$ si n est un entier naturel qui n'est pas un carré d'un autre entier naturel.

Preuve de l'irrationalité du nombre d'Euler. Supposons par l'absurde qu'il existe deux entiers $a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$e = \frac{a}{b} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{k!} + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}.$$

Alors $eb! = a(b-1)! \in \mathbb{N}$ et on a $s = \frac{a}{b} \times b! - \left(b! + b! + \frac{b!}{2!} + \frac{b!}{3!} + \dots + \frac{b!}{k!}\right) \in \mathbb{N}$. De plus on a :

$$s = \frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+1)(b+2)} + \frac{1}{(b+1)(b+2)(b+3)} + \dots + \frac{1}{(b+1)(b+2)\dots(b+n)} + \dots.$$

Par ailleurs, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(b+1)(b+2)\dots(b+k) > (b+1)^k$ et on obtient l'encadrement suivant de s :

$$0 < s < \frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^3} + \dots + \frac{1}{(b+1)^n} + \dots = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(b+1)^k}.$$

Or

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(b+1)^k} = \frac{1}{b+1} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{b+1}} = \frac{1}{b},$$

donc

$$0 < s < \frac{1}{b} \leq 1.$$

Ce qui contredit le fait que $s \in \mathbb{N}$. □

1.2 L'ensemble des nombres réels

Nous introduisons l'ensemble des nombres réels en donnant un certain nombre de résultats (axiomes). Ces résultats mettent en évidence les propriétés élémentaires des réels.

1.2.1 Addition et multiplication dans $\mathbb{R}$

L'ensemble des nombres réels est un ensemble où l'on a deux lois internes, une loi dite **somme** et notée "+", une autre loi dite **produit** notée ".". Ces lois satisfont les propriétés suivantes.

Proposition 1.2. *L'addition dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels vérifie les relations suivantes :*

1. *Associativité : $\forall x, y, z$ éléments de $\mathbb{R}$, on a $(x + y) + z = x + (y + z)$.*
2. *Élément neutre : $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $x + 0 = 0 + x = x$.*
3. *Opposé (ou symétrique) : $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $x + (-x) = (-x) + x = 0$.*
4. *Commutativité : $\forall x, y$ éléments de $\mathbb{R}$, on a $x + y = y + x$.*

On dit donc que l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels muni de l'addition est un groupe commutatif.

Proposition 1.3. *La multiplication dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels vérifie les relations suivantes :*

1. *Associativité : $\forall x, y, z$ éléments de $\mathbb{R}$, on a $(xy)z = x(yz)$.*
2. *Élément neutre : $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$.*
3. *inverse : Pour tout nombre réel x tel que $x \neq 0$, il existe un nombre noté $x^{-1} \in \mathbb{R}$ tel que $x^{-1} \cdot x = x \cdot x^{-1} = 1$. On note aussi $x^{-1} = \frac{1}{x}$. Ains on a : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, on a $x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1$.*
4. *Commutativité : $\forall x, y$ éléments de $\mathbb{R}$, on a $x \cdot y = y \cdot x$.*

On dit donc que l'ensemble $\mathbb{R}^*$ des nombres réels non nuls muni de la multiplication est un groupe commutatif.

On dit alors que l'ensemble $\mathbb{R}$ muni des deux lois (l'addition et la multiplication), $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, est un corps commutatif. Dans la suite on note pour tous nombres réels x et y , $x - y$ le nombre réel $x + (-y)$ et par $\frac{x}{y} = x \cdot y^{-1} = x \cdot \frac{1}{y}$ lorsque $y \neq 0$.

1.3 Relation d'ordre

Dans tout ce qui suit, E désigne un ensemble quelconque mais non vide.

1.3.1 Relations binaires

Une relation binaire définie sur E est une propriété que chaque couple (x, y) d'éléments de E est susceptible d'avoir ou non.

Si $\mathcal{R}$ est une relation binaire sur E , on note $x\mathcal{R}y$ pour signifier que x et y sont en relation par $\mathcal{R}$. Ainsi se donner une relation binaire sur E , c'est se donner la partie G de $E \times E$ constituée des couples (x, y) tels que $x\mathcal{R}y$.

Exemples

- Sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, on connaît les relations usuelles :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (x - y) \in \mathbb{R}_+, \text{ c'est la relation notée } \geq$$

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (x - y) \in \mathbb{R}_-, \text{ c'est la relation notée } \leq$$

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (x - y) \in \mathbb{R}_+^*, \text{ c'est la relation notée } >$$

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (x - y) \in \mathbb{R}_-^*, \text{ c'est la relation notée } <$$

- Sur l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs, on peut penser à la relation de divisibilité :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } y = kx.$$

- Sur $\mathbb{Z}$, on peut aussi imaginer la relation $\mathcal{R} \equiv$ définie par : $x \equiv y \Leftrightarrow x - y$ est pair.
- sur l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties d'un ensemble non vide Ω , on connaît
 - ⊗ la relation d'inclusion : $\mathcal{R}B \Leftrightarrow A \subset B$.
 - ⊗ on peut aussi imaginer la relation définie par : $A\delta B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.

1.3.2 Propriétés d'une relation binaire

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble non vide E .

- On dit que $\mathcal{R}$ est réflexive si : $\forall x \in E$ on a : $x\mathcal{R}x$.
- On dit que $\mathcal{R}$ est symétrique si : $\forall x \in E, \forall y \in E$ on a : $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.
- On dit que $\mathcal{R}$ est antisymétrique si : $\forall x \in E, \forall y \in E$ on a : $(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$.
- On dit que $\mathcal{R}$ est transitive si : $\forall x \in E, \forall y \in E, \forall z \in E$ on a : $(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

1.3.3 Relation d'ordre

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble non vide E . On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur E si $\mathcal{R}$ est à la fois réflexive, antisymétrique et transitive.

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur un ensemble non vide E . On dit que $\mathcal{R}$ définit un ordre total sur E lorsque deux éléments quelconques de E sont toujours comparables pour la relation $\mathcal{R}$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \text{ on a : } x\mathcal{R}y \text{ ou } y\mathcal{R}x.$$

Dans le cas contraire, on parle d'ordre partiel.

Exemples

- La relation " $\leq$ " définit un ordre total sur $\mathbb{R}$ (et sur $\mathcal{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$).
- La relation $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } y = kx$. définit un ordre partiel sur $\mathbb{Z}$.
- La relation d'inclusion définit un ordre partiel sur $\mathcal{P}(\Omega)$.

1.3.4 L'ordre dans $\mathbb{R}$

L'ensemble $\mathbb{R}$ est un corps commutatif ordonné, c'est-à-dire il existe une relation notée " $\leq$ " vérifiant les propriétés suivantes.

Proposition 1.4. *La relation d'ordre est compatible avec l'addition par un réel quelconque, et avec la multiplication entre réels positifs.*

1. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$.
2. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x < y \Rightarrow x + z < y + z$
3. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}^+, x \leq y \Rightarrow xz \leq yz$.
4. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}_+^*, x < y \Rightarrow xz < yz$.
5. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}_+^*, x < y \Rightarrow xz > yz$.
6. $\forall x, y \in \mathbb{R}^*, 0 < x \leq y \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$.

$$7. \forall x, y \in \mathbb{R}^*, x \leq y < 0 \iff \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} < 0.$$

$$8. \forall x, y \in \mathbb{R}^*, x < 0 < y \iff \frac{1}{x} < 0 < \frac{1}{y}.$$

$$9. \forall x, y, z, t \in \mathbb{R}, x \leq y \text{ et } z \leq t \implies x + z \leq y + t.$$

$$10. \forall x, y, z, t \in \mathbb{R}, x \leq y \text{ et } z < t \implies x + z < y + t.$$

$$11. \forall x, y \in \mathbb{R}^+, \forall z, t \in \mathbb{R}^+, x \leq y \text{ et } z \leq t \implies xz \leq yt.$$

$$12. \forall x, y \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \text{ on a : } x \leq y \iff x^n \leq y^n.$$

$$13. \forall x \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \forall n, m \in \mathbb{N}, \text{ on a :}$$

$$x \leq 1 \text{ et } n \leq m \implies x^n \geq x^m.$$

$$14. \forall x \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \forall n, m \in \mathbb{N}, \text{ on a :}$$

$$x \geq 1 \text{ et } n \leq m \implies x^n \leq x^m.$$

$$15. \forall x, y \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a :}$$

(a) Formule du binôme de Newton

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

$$(b) x^n - y^n = (x - y) \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k \right).$$

$$16. \text{ Inégalité de Cauchy-Schwarz}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x_1, x_2, \dots, x_n \text{ et } \forall y_1, y_2, \dots, y_n \text{ des nombres réels, on a :}$

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right).$$

Remarque 1.5. 1. On note $y \geq x$ pour signifier que $x \leq y$.

$$2. x < y \iff x \leq y \text{ et } x \neq y.$$

$$3. x = y \iff x \leq y \text{ et } x \geq y.$$

1.4 Topologie de $\mathbb{R}$

1.4.1 Les intervalles de $\mathbb{R}$

Définition 1.6. On appelle intervalle de $\mathbb{R}$, toute partie I de $\mathbb{R}$ qui contient tout élément compris entre deux quelconques de ses éléments. Autrement dit, un ensemble non vide I est un intervalle de $\mathbb{R}$ si :

$$(x \in I, y \in I \text{ et } x \leq z \leq y) \implies z \in I.$$

Exemple 1.7. .

♣ Intervalles bornés de $\mathbb{R}$

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$.

• $\emptyset$ est un intervalle.

• $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$ = intervalle ouvert d'origine a et d'extrémité b .

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$ = intervalle fermé d'origine a et d'extrémité b .
- $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$ = intervalle semi-ouvert à gauche ou semi-fermé à droite.
- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$ = intervalle semi-ouvert à droite ou semi-fermé à gauche.
- $\{a\}$ est un intervalle fermé.

Si I est un intervalle d'origine a et d'extrémité b , le réel $b - a$ est appelé **longueur de l'intervalle**.

♣ Intervalles non bornés de $\mathbb{R}$

- $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} / x > a\}$.
- $] - \infty, a] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq a\}$.
- $] - \infty, a[= \{x \in \mathbb{R} / x < a\}$.
- $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$.
- $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} / x > a\}$.
- $] - \infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

1.4.2 Ouverts-Fermés

Définition 1.8. On dit qu'un sous-ensemble V de $\mathbb{R}$ est un voisinage d'un réel x_0 lorsque V contient un intervalle ouvert de centre x_0 . C'est-à-dire que :

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que }]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[\subset V.$$

Exemple 1.9. 1. $[-1; 4]$ est un voisinage de 0.

2. $[-1; 4]$ n'est pas un voisinage de -1 .

Définition 1.10. On appelle ouvert de $\mathbb{R}$ toute partie de $\mathbb{R}$ qui est voisinage de chacun de ses points.

L'ensemble de tous les ouverts de $\mathbb{R}$ est appelée la topologie de $\mathbb{R}$.

Une partie F de $\mathbb{R}$ est dite fermée si son complémentaire est un ouvert.

Exemple 1.11. 1. Tout intervalle ouvert $]a, b[$ avec $a < b$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

2. $\mathbb{R}$ est un ouvert $\mathbb{R}$.

3. $\emptyset$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Remarque 1.12. $\emptyset$ et $\mathbb{R}$ sont les seuls ensembles ouverts et fermés de $\mathbb{R}$.

Proposition 1.13. 1. Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert.

2. Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Corollaire 1.14. Une intersection quelconque de fermés est un fermé.

Une réunion finie de fermés est un fermé.

de $\mathbb{R}$

1.4.3 Intérieur et adhérence d'un ensemble

Définition 1.15. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et x_0 un nombre réel. On dit que x_0 est intérieur à A si A est un voisinage de x_0 . L'ensemble de tous les points intérieurs à A se note $\overset{\circ}{A}$. est appelé intérieur de A

Remarque 1.16. $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A . On a donc $\overset{\circ}{A} \subset A$.

Exemple 1.17. Déterminer $\overset{\circ}{A}$ dans chacun des cas suivants : $[-3; 6]$; $] - 3; 6]$.

Définition 1.18. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et x_0 un nombre réel. On dit que x_0 est un point adhérent à A si tout ouvert centré en x_0 contient au moins un élément de A . L'ensemble de tous les points adhérents de A est noté $\overline{A}$ et est appelé adhérence de A .

Remarque 1.19. $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A . On a donc $A \subset \overline{A}$.

Exemple 1.20. Déterminer $\overline{A}$ dans chacun des cas suivants : $[-3; 6]$; $] - 3; 6]$.

1.4.4 Représentation géométrique de $\mathbb{R}$

On représente les nombres réels comme les points d'une droite, la droite réelle : on choisit un point pour représenter le réel 0 et un autre pour représenter le réel 1. Chaque point de la droite réelle représente un réel et un seul.

1.5 Borne supérieure et borne inférieure

Définition 1.21 (Majorant-Minorant). .

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

- On dit qu'un nombre réel M est **un majorant** de A lorsque : $\forall x \in A$, on a $x \leq M$.
- On dit que A est **majoré** si l'ensemble des majorants de A est non vide. Autrement dit, A est majoré si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in A$ on a : $x \leq M$.
Dans ce cas le réel M est alors un majorant de A .
- On dit qu'un nombre réel m est **un minorant** de A lorsque : $\forall x \in A$, on a $x \geq m$.
- On dit que A est **minoré** si l'ensemble des minorants de A est non vide. Autrement dit, A est minoré si il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in A$ on a : $x \geq m$.
Dans ce cas le réel m est alors un minorant de A .
- On dit que A est **borné** si A est à la fois majoré et minoré.

Définition 1.22 (Élément maximal-Élément minimal). .

Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}$, M et m deux réels donnés.

- On dit que M est le plus grand élément ou maximum (ou élément maximal) de A si $M \in A$ et M est un majorant de A . On note alors $M = \max A$ ou $M = \max(A)$.
- On dit que m est le plus petit élément ou minimum (ou élément minimal) de A si $m \in A$ et m est un minorant de A . On note alors $m = \min A$ ou $m = \min(A)$.

Remarque 1.23. Pour une partie non vide A de $\mathbb{R}$ on a les équivalences suivantes :

$$z = \max(A) \iff (z \in A \text{ et } \forall x \in A, x \leq z)$$

$$z = \min(A) \iff (z \in A \text{ et } \forall x \in A, z \leq x)$$

Proposition 1.24 (Unicité de l'élément maximal (resp. minimal)). .

Si A possède un maximum (resp. minimum), alors il est unique.

Démonstration. Soient M_1 et M_2 deux réels qui sont maximums d'un même sous-ensemble A de $\mathbb{R}$.

1. Comme M_1 est un majorant de A et $M_2 \in A$, alors $M_2 \leq M_1$.
2. De même M_2 est un majorant de A et $M_1 \in A$, alors $M_1 \leq M_2$.

Par la propriété d'antisymétrie de la relation " $\leq$ ", on déduit que $M_1 = M_2$. □

Proposition 1.25. *Tout ensemble fini non vide possède un élément maximal (resp. minimal), c'est-à-dire un maximum (resp. c'est-à-dire un minimum)*

Démonstration. Soit A un ensemble à n éléments (avec $n \in \mathbb{N}^*$). Nous allons montrer, par récurrence sur n , que A possède un maximum.

- ♣ Pour $n = 1$, A est un singleton $\{a\}$ et a est le maximum de A .
- ♣ Pour $n > 1$, supposons que le résultat est vrai jusqu'à l'ordre $(n - 1)$ et montrons que c'est aussi vrai à l'ordre n . On fixe un élément x de A et on considère l'ensemble $B = A \setminus \{x\}$. Alors B est un sous-ensemble de A (donc de $\mathbb{R}$) possédant $(n - 1)$ élément. Par conséquent, d'après l'hypothèse de récurrence, B possède un maximum $M \in B$. Si $x \leq M$ alors M est aussi un maximum pour A , sinon alors x est le maximum de A .

□

Exemple 1.26. .

1. L'ensemble $A_1 = \left\{ x_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}; \quad n \in \mathbb{N} \right\}$ est majoré par 3. En effet

$$(a) \quad x_0 = \sum_{k=0}^0 \frac{1}{k!} = 1 \leq 3 \text{ et } x_1 = \sum_{k=0}^1 \frac{1}{k!} = 2 \leq 3.$$

(b) Pour tout $n \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned} x_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} &= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \\ &\leq 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} \\ &= 2 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \\ &= 2 + 1 - \frac{1}{n} \\ &\leq 3 \end{aligned}$$

2. L'ensemble $A_2 = \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}; \quad n \in \mathbb{N} \right\}$ n'est pas majoré. En effet, de l'inégalité

$$\ln(1+x) \leq x, \quad \text{pour tout } x > -1 \quad (\text{facile à justifier}),$$

on déduit que pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1)$$

3. Si $A_3 = \mathbb{N}$, $\min A_3 = 0$ tandis que $\max A_3$ n'existe pas.

4. Si $A_4 = \mathbb{Z}$, $\min A_4$ et $\max A_4$ n'existent pas.

Définition 1.27 (Borne supérieure et borne inférieure). .

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On désigne par $\mathcal{M}(A)$ l'ensemble des majorants (resp. des minorants) de A . Si $\mathcal{M}(A)$ possède un minimum (resp. maximum), alors on appelle ce réel la borne supérieure (resp. inférieure) de A et on le note $\sup(A)$ (resp. $\inf(A)$).

Autrement dit, on dit que

- $\alpha \in \mathbb{R}$ est la borne supérieure de A si α est un majorant de A et α est le plus petit des majorants de A . On note alors $\alpha = \sup A$
- $\beta \in \mathbb{R}$ est la borne inférieure de A si β est un minorant de A et β est le plus grand des minorants de A . On note alors $\beta = \inf A$

1.6 Propriétés de la borne supérieure sur $\mathbb{R}$

Théorème 1.28 (Axiome de la borne supérieure). .

Toute partie A non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Autrement dit, si A est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ alors $\sup(A) \in \mathbb{R}$.

Théorème 1.29 (Axiome de la borne inférieure). .

Toute partie A non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure. De plus on a :

$$\inf(A) = -\sup(-A). \quad (1.6.1)$$

où l'ensemble $-A$ est défini par : $-A = \{-a, \quad a \in A\}$.

Autrement dit, si A est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ alors $\inf(A) \in \mathbb{R}$.

Théorème 1.30 (Caractérisation des bornes supérieure et inférieure). .

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

- Si A est majorée alors l'ensemble de ses majorants admet un plus petit élément (un minimum) appelé **borne supérieure** ou **supremum** de A . Il est caractérisé par la propriété suivante appelée **propriété de la borne supérieure** :

$$\gamma = \sup A \iff \begin{cases} \gamma \text{ est un majorant de } A \text{ et} \\ \forall \epsilon > 0, \exists x \in A \text{ tel que } \gamma - \epsilon < x \leq \gamma \end{cases} \quad (1.6.2)$$

- Si A est minorée alors l'ensemble de ses minorants admet un plus grand élément appelé **borne inférieure** ou **infimum** de A . Il est caractérisé par la propriété suivante appelée **propriété de la borne inférieure** :

$$\rho = \inf A \iff \begin{cases} \rho \text{ est un minorant de } A \text{ et} \\ \forall \epsilon > 0, \exists x \in A \text{ tel que } \rho \leq x < \rho + \epsilon \end{cases} \quad (1.6.3)$$

Remarque 1.31. .

♣ La deuxième assertion dans l'accolade (1.6.2) est une réécriture de “**aucun nombre strictement inférieur à $\gamma = \sup(A)$ ne majore A** ”. Autrement dit $\gamma = \sup(A)$ est le plus petit des majorants de A .

$$\gamma = \sup(A) \iff (\forall z \in \mathbb{R}, z < \alpha \implies \exists x \in A \text{ tel que } z < x \leq \alpha) \quad (1.6.4)$$

♣ De même la deuxième assertion dans l'accolade (1.6.3) est une réécriture de “**aucun nombre strictement supérieur à $\rho = \inf(A)$ ne minore A** ”. Autrement dit $\rho = \inf(A)$ est le plus grand des minorants de A .

$$\rho = \inf(A) \iff (\forall z \in \mathbb{R}, \rho < z \implies \exists x \in A \text{ tel que } \rho \leq x < z) \quad (1.6.5)$$

Remarque 1.32. .

1. Si A est une partie bornée de $\mathbb{R}$, alors $\sup A$ et $\inf A$ sont des éléments de $\overline{A}$.
2. Si $\max A$ existe, alors $\sup A$ existe et on a $\max A = \sup A$.
3. Si $\min A$ existe, alors $\inf A$ existe et on a $\min A = \inf A$.

1.6.1 Exercice

On considère les parties de $\mathbb{R}$ suivantes :

$$A =]-3, 10], \quad B = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}, \quad C = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\},$$

$$D = \left\{ (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N}^* \right\}, \quad E = \{(1 - e^{-x}) \sin(x); \quad x \geq 0\}.$$

Déterminer s'ils existent le maximum, le minimum, les bornes supérieure et inférieure de chacun de ces ensembles.

1.6.2 Exercice

Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$. Pour chacun des ensembles suivants déterminer s'ils existent : la borne supérieure, la borne inférieure, l'élément minimal et l'élément maximal.

$$A_1 = \left\{ \frac{y}{n} \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}^* \right\}, \quad A_2 = \left\{ (-1)^n + \frac{y}{n} \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}^* \right\}, \quad A_3 = \mathbb{N},$$

$$A_4 = \left\{ (-1)^n - \frac{y}{n} \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}^* \right\}, \quad A_5 = \left\{ (-1)^n \left(1 + \frac{y}{n}\right) \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}^* \right\},$$

$$A_6 = \left\{ (-1)^n \left(1 - \frac{y}{n}\right) \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

1.6.3 Exercice

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $A_\alpha = \{r \in \mathbb{Q}, \quad r < \alpha\}$. Montrer que $\sup(A_\alpha) = \alpha$.

Proposition 1.33. On considère l'ensemble $F = \{a \in \mathbb{Q} \mid a^2 < 2\}$. Alors F n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

Démonstration. .

- L'ensemble F est non vide car $\frac{1}{2} \in F$.
- F est majoré (par exemple 3 est un majorant de F).

Par conséquent F admet une borne supérieure, c'est-à-dire $\sup(F) \in \mathbb{R}$. Nous allons montrer que $\sup(F) \notin \mathbb{Q}$. Pour cela, on désigne par M un majorant rationnel quelconque de F et on pose

$$M' = \frac{M^2 + 2}{2M} \in \mathbb{Q}.$$

Nous allons montrer que M' est un autre majorant de F et que $M' < M$, ce qui prouve qu'il n'y a pas de plus petit majorant.

- Montrons que M' est un majorant de F . Pour cela il suffit de montrer que $M'^2 > 2$. On a :

$$M'^2 - 2 = \frac{(M^2 + 2)^2}{4M^2} - 2 = \frac{(M^2 - 2)^2}{4M^2} > 0$$

car $M^2 \neq 2$.

- Par ailleurs $M - M' = \frac{M^2 - 2}{2M} > 0$ car M est un majorant rationnel de F .

En prenant le cas particulier $M = \sup(F)$, on obtient une absurdité, car M' devient un majorant de F plus petit que $\sup(F)$. $\square$

1.7 Application : intervalles de $\mathbb{R}$

Définition 1.34. .

Soit I un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On dit que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ si :

pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x < y < z$ on a : $x, z \in I \implies y \in I$.

Théorème 1.35 (Classification des intervalles de $\mathbb{R}$). .

Soit I un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Alors I est un intervalle de $\mathbb{R}$ si et seulement si il est de l'un des dix types suivants :

- ♠ $I = \emptyset$.
- ♠ $I = \mathbb{R}$.
- ♠ $I = [a, b] = \{x \in \mathbb{R}; \quad a \leq x \leq b\}$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a \leq b$).
- ♠ $I = [a, b[= \{x \in \mathbb{R}; \quad a \leq x < b\}$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$).
- ♠ $I =]a, b] = \{x \in \mathbb{R}; \quad a < x \leq b\}$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$).
- ♠ $I =]a, b[= \{x \in \mathbb{R}; \quad a < x < b\}$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$).
- ♠ $I =]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}; \quad x \leq b\}$ (avec $b \in \mathbb{R}$).
- ♠ $I =]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R}; \quad x < b\}$ (avec $b \in \mathbb{R}$).
- ♠ $I = [a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}; \quad a \leq x\}$ (avec $a \in \mathbb{R}$).
- ♠ $I =]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}; \quad a < x\}$ (avec $a \in \mathbb{R}$).

1.8 Axiome d'Archimède

La propriété suivante répond à la question de situer les nombres rationnels par rapport aux nombres réels.

Théorème 1.36 (Axiome d'Archimède). .

Pour tout nombre réel x , il existe un entier naturel n non nul tel que $x < n$.

On dira alors que $\mathbb{R}$ est un **corps commutatif ordonné archimédien**.

Démonstration. On discutera suivant le signe de x .

- Si $x \leq 0$ on peut prendre $n = 1$.
- Supposons que $x > 0$. L'ensemble $A = \{k \in \mathbb{N} : k \leq x\}$ est majoré par x et contient 0. Donc A admet une borne supérieure $\alpha \in \mathbb{R}$. En utilisant la propriété de caractérisation de la borne supérieure (avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$), on déduit l'existence d'un certain $k_0 \in A$ tel que $\alpha - \frac{1}{2} < k_0 \leq \alpha$.
Donc $\alpha < \alpha + \frac{1}{2} < k_0 + 1$ et par conséquent $(k_0 + 1) \notin A$. Ainsi $k_0 + 1 > x$ et on prend $n = k_0 + 1$.

□

Corollaire 1.37. *Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ satisfaisant $0 < y$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x < ny$.*

Démonstration. On applique le principe d'Archimède à $\frac{x}{y}$

□

Théorème 1.38 (Principe d'Archimède pour la loi + dans $\mathbb{R}$). *Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $y > 0$. Alors il existe un et un seul $n \in \mathbb{Z}$ tel que $ny \leq x < (n+1)y$.*

Démonstration. On considère l'ensemble $A = \{py \in \mathbb{R}; \quad p \in \mathbb{Z}\}$.

- Pour $p = 1$, on a $1.y = y \in A$ donc $A \neq \emptyset$.
- Supposons que A est majoré. Alors d'après l'axiome de la borne supérieure $\alpha = \sup(A) \in \mathbb{R}$ et on a : $\alpha - y < \alpha$ (car $y > 0$). Par conséquent il existe $p_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha - y \leq p_0 y < \alpha$, c'est-à-dire $\alpha = \sup(A) < (p_0 + 1)y$ et $(p_0 + 1)y \in A$. Ce qui est absurde. Donc A n'est pas majoré et alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe $q \in \mathbb{Z}$ tels que $qy > x$.
- Montrons de même que A n'est pas minoré. Supposons par l'absurde que A est minoré. Alors $\beta = \inf(A) \in \mathbb{R}$ et on a : $\beta < \beta + y$ (car $y > 0$). D'après la caractérisation de la borne inférieure il existe $p_1 \in \mathbb{Z}$ tel que $\beta \leq p_1 y < \beta + y$. Par conséquent $\alpha = \inf(A) > (p_1 - 1)y$ et $(p_1 - 1)y \in A$, ce qui est absurde.
Ainsi A n'est pas minoré et il existe $l \in \mathbb{Z}$ tel que $ly < x$. On déduit alors que $ly < x < qy$ et on a :

$$x \in [ly, qy[= \cup_{i=l}^{q-1} [iy, (i+1)y[$$

D'où il existe de façon unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $ny \leq x < (n+1)y$.

□

Proposition 1.39. *Quel que soit le réel x , il existe un unique entier relatif p satisfaisant*

$$p \leq x < p + 1. \quad (1.8.1)$$

L'entier p est appelé **partie entière de x** et on note $p = E(x) = [x]$.

Démonstration. On applique le principe d'Archimède pour la loi $+$ dans $\mathbb{R}$, en prenant $y = 1$. $\square$

Remarque 1.40. 1. $E(x) = \max(\{n \in \mathbb{Z}; n \leq x\})$.

2. Pour tout nombre réel x , on a : $E(x) \in \mathbb{Z}$ et $E(x) \leq x < E(x) + 1$.

3. Pour tous nombres réels x et y , on a : $x \leq y \implies E(x) \leq E(y)$.

4. Pour tous nombres réels x et y , on a : $x < y \implies E(x) \leq E(y)$.

5. Le réel $m(x) = x - E(x)$ est appelé **mantisse de x** et on a : $\forall x \in \mathbb{R}, m(x) = x - E(x) \in [0, 1]$.

Théorème 1.41 (Principe d'Archimède pour la loi $\times$ dans $\mathbb{R}_+^*$). Soit $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $x > 1$. Alors il existe un et un seul $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x^n \leq y < x^{n+1}$.

1.9 Racine n -ième d'un nombre réel positif

Théorème 1.42 (Racine $n^{\text{ième}}$ d'un réel positif). Pour tout nombre réel strictement positif x et pour tout entier naturel non nul n , il existe un unique réel positif y tel que $y^n = x$. Le réel y est appelé racine $n^{\text{ième}}$ de x . On note

$$y = \sqrt[n]{x} \text{ ou bien } y = x^{\frac{1}{n}}.$$

Démonstration. Soit $A = \{a \in \mathbb{R}_+^* \text{ tel que } a^n \leq x\}$. On va montrer que A est non vide et admet une borne supérieure.

- Si $x < 1$ alors $x \in A$, car $x^n \leq x < 1$, par conséquent A est non vide.
- Si $x \geq 1$ alors on a : $1^n \leq x \leq x^n$, donc $1 \in A$ et par conséquent A est non vide.
- Si $z \in A$ alors $z^n \leq x$, ce qui implique que $z \leq x$. Donc A est majoré par x .

On déduit alors que A est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, donc il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $y = \sup(A)$. Nous allons montrer quel $y^n = x$.

- Supposons par l'absurde que $y^n < x$ et posons $\varepsilon = x - y^n > 0$. On va chercher $h \in]0, 1[$ tel que $(y + h) \in A$. On a :

$$\begin{aligned} (y + h)^n &= y^n + ny^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}y^{n-2}h^2 + \dots + h^n \\ &= y^n + h[ny^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}y^{n-2}h + \dots + h^{n-1}] \\ &\leq y^n + h[ny^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}y^{n-2} + \dots + 1] = y^n + h[(y+1)^n - y^n] \end{aligned}$$

On choisit $h \in]0, 1[$ tel que $h < \frac{\varepsilon}{(y+1)^n - y^n}$ et ainsi on a :

$$\begin{aligned} (y + h)^n &= y^n + h[(y+1)^n - y^n] < y^n + \varepsilon \\ &< x \end{aligned}$$

Par conséquent $(y + h) \in A$ et $y + h > y = \sup(A)$, ce qui est absurde.

- Supposons maintenant que $y^n > x$ et posons $h = \frac{y^n - x}{ny^{n-1}}$, alors on a : $0 < h < y$. Soit $t > 0$ tel que $t \geq y - h$. En utilisant l'identité

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$$

valable pour tout réels a et b , et le fait que $y - h \leq y$ on a :

$$y^n - (y - h)^n = h[y^{n-1} + y^{n-2}(y - h) + \cdots + (y - h)^{n-1}] \leq hny^{n-1} = y^n - x.$$

Ainsi

$$y^n - t^n \leq y^n - (y - h)^n \leq y^n - x$$

et par conséquent $x < t^n$, d'où on conclut que $t \notin A$. En d'autres termes $(y - h)$ est un majorant de A et $y - h < y$, en contradiction avec le fait que y soit le plus petit des majorants de A .

On conclut alors que $y^n = x$ et y est unique.

□

Proposition 1.43. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} \quad \sqrt[n]{a^n} = a.$$

Démonstration. A montrer en exercice

□

Remarque 1.44. .

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que n est pair. Alors pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$ on a : $y^n = (-y)^n > 0$.
 (a) Ainsi pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$ pair, l'équation $y^n = x$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$: $y_1 = \sqrt[n]{x}$ et $y_2 = -\sqrt[n]{x}$.
 (b) Par contre pour $x \in \mathbb{R}_-^*$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$ pair, l'équation $y^n = x$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$ impair on a : pour tout $y \in \mathbb{R}^*$ on a : $(-y)^n = -y^n > 0$. Ainsi pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ impair, l'équation $y^n = x$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$: $y = \text{signe}(x) \sqrt[n]{|x|}$.

1.10 Densité des nombres rationnels et des irrationnels

1.10.1 Définition

Un nombre réel est dit irrationnel lorsqu'il n'appartient pas à l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels. L'ensemble des nombres irrationnels est donc $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

1.10.2 Définition

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On dit que A est *dense dans $\mathbb{R}$* si A rencontre tout intervalle ouvert $]a, b[$, avec $a < b$. Autrement dit A est dense dans $\mathbb{R}$ lorsque pour tous a et b réels, on a :

$$a < b \implies \exists x \in A, \quad a < x < b.$$

Par contraposée A est une partie non dense dans $\mathbb{R}$ s'il existe au moins deux réels x et y tels que

$$x < y \text{ et } \forall a \in A, \quad x \geq a \text{ ou } y \leq a.$$

Exemple 1.45. $\mathbb{Z}$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$.

Proposition 1.46. .

- Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, il existe un rationnel $c \in \mathbb{Q}$ tel que $a < c < b$. On dit alors que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
- Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, il existe un irrationnel $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $a < c < b$. On dit alors que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. .

- Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$, on pose $x = \frac{1}{b-a} > 0$. Soit q un entier strictement supérieur à x (un tel entier existe d'après le théorème d'Archimède) et soit p le plus petit entier strictement supérieur à aq (p existe d'après le théorème d'Archimède). On a donc :

$$p-1 \leq aq < p \text{ et } \frac{p}{q} - \frac{1}{q} \leq a < \frac{p}{q} \text{ (puisque } q > 0).$$

D'où

$$a < \frac{p}{q} \leq a + \frac{1}{q} < b, \text{ et } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}.$$

- De même en considérant les réels $A = \frac{a}{\sqrt{2}}$ et $B = \frac{b}{\sqrt{2}}$, il existe un rationnel r tel que $A < r < B$, c'est-à-dire $a < r\sqrt{2} < b$.
 - (a) Si $r \neq 0$ alors $r\sqrt{2}$ est un irrationnel et on a : $a < r\sqrt{2} < b$.
 - (b) Si $r = 0$ on prend l'intervall $] \frac{a}{\sqrt{2}}, 0[$ qui est inclus dans l'intervalle $] \frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}[;] \frac{a}{\sqrt{2}}, 0[$ contient un rationnel $r_1 \neq 0$. Dans ce cas on a $r_1\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $a < r_1\sqrt{2} < b$.

□

Une conséquence de cette proposition est le résultat suivant

Corollaire 1.47. Dans tout intervalle de $\mathbb{R}$, différent d'un singleton, il y a une infinité de nombres rationnels (et de nombres irrationnels).

Proposition 1.48. Tout intervalle de $\mathbb{R}$, différent d'un singleton, et $\mathbb{R}$ lui même sont non dénombrables. Dès lors ils contiennent une infinité non dénombrable de nombres irrationnels.

Théorème 1.49. Axiome de Cantor

Soit $I_n = [a_n, b_n]$ une suite décroissante d'intervalles fermés (c'est-à-dire $I_{n+1} \subset I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Alors l'intersection $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$ est un intervalle non vide.

On dira alors que $\mathbb{R}$ est un **corps commutatif ordonné archimédien et complet**. On connaît également l'axiome de Cantor sous le nom de la **propriété des intervalles emboîtés**.

Démonstration. A démontrer plus tard.

□

1.11 Approximation d'un réel

1.11.1 Notion de valeur absolue

Définition 1.50. On appelle valeur absolue d'un nombre réel x , le réel noté $|x|$ défini par :

$$|x| = \max\{x, -x\}.$$

Remarque 1.51. Il résulte de cette définition de la valeur absolue d'un nombre réel x que :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| = |-x|$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq 0$ et $|x| = 0 \iff x = 0$.

Proposition 1.52. Soient x et y des nombres réels. On a :

1. $|xy| = |x||y|$.
2. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ si $y \neq 0$.
3. $||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$.
4. $|x| = |y| \iff x^2 = y^2$.
5. $|x| \leq |y| \iff x^2 \leq y^2$.
6. Pour tout $\epsilon > 0$, $|x - a| < \epsilon \iff a - \epsilon < x < a + \epsilon$.
7. Pour tout $\epsilon > 0$, $|x - a| \leq \epsilon \iff a - \epsilon \leq x \leq a + \epsilon$.

1.11.2 Distance sur $\mathbb{R}$

Définition 1.53. On appelle distance sur $\mathbb{R}$ toute application d définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant pour tous x et y :

1. $d(x, y) \geq 0$;
 2. $d(x, y) = 0 \iff x = y$;
 3. $d(x, y) = d(y, x)$;
 4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.
- $d(x, y)$ est appelé distance entre les réels x et y .

Exemple 1.54. Considérons l'application d définie par :

$$\begin{aligned} d : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto |x - y| \end{aligned}$$

Montrer que d est une distance sur $\mathbb{R}$. C'est la distance usuelle sur $\mathbb{R}$.

1.11.3 Approximation d'un nombre réel

Soit x un nombre réel, p un entier naturel. On a :

$$E(x \cdot 10^p) \leq x \cdot 10^p < E(x \cdot 10^p) + 1.$$

D'où $10^{-p}E(x \cdot 10^p) \leq x < 10^{-p}E(x \cdot 10^p) + 10^{-p}$. Ainsi, $10^{-p}E(x \cdot 10^p)$ est un nombre décimal approchant x à 10^{-p} près par défaut et $10^{-p}E(x \cdot 10^p) + 10^{-p}$ est un nombre décimal approchant x à 10^{-p} près par excès.

Exemple 1.55. Donner une approximation de π à 10^0 près, à 10^{-1} près, à 10^{-2} près et à 10^{-3} près.

1.12 La droite réelle achevée (11)

L'ensemble $\mathbb{R}$ n'a ni plus grand ni plus petit élément. On lui ajoute les deux éléments $-\infty$ et $+\infty$ de façon à obtenir l'ensemble noté $\overline{\mathbb{R}}$ appelé la droite réelle achevée. Ainsi la droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$ est l'ensemble obtenu par adjonction à $\mathbb{R}$ des deux nouveaux éléments $+\infty$ et $-\infty$, muni de la relation d'ordre total obtenue en prolongeant l'ordre de $\mathbb{R}$ par les conditions

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

On a alors

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

On peut prolonger partiellement à $\overline{\mathbb{R}}$ la structure algébrique en posant :

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $-\infty < x < +\infty$.
2. $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $x \neq -\infty$, on a $x + (+\infty) = +\infty$.
3. $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $x \neq +\infty$, on a $x + (-\infty) = -\infty$.
4. $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $x > 0$, on a $x \cdot (-\infty) = -\infty$.
5. $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $x < 0$, on a $x \cdot (-\infty) = +\infty$.

Il est impossible de définir $(+\infty) + (-\infty)$ et $0 \cdot (\pm\infty)$.

Remarque 1.56. . Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

- Si A n'est pas minoré, on pose $\inf A = -\infty$.
- Si A n'est pas majoré on pose $\sup A = +\infty$

1.12.1 Voisinage de $+\infty$, $-\infty$

On appelle voisinage de $+\infty$, toute partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle de la forme $]a, +\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$.

On appelle voisinage de $-\infty$, toute partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle de la forme $]-\infty, a[$ avec $a \in \mathbb{R}$.

1.13 Exercices

Exercice 1

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ telle que $A \subset]0; +\infty[$. Démontrer que $\inf\{\frac{1}{a}, a \in A\} = 0$ si et seulement si $\sup A = +\infty$.

Exercice 2

Démontrer les relations suivantes où a et b désignent deux réels quelconques.

1. $2 \cdot |ab| \leq a^2 + b^2$.
2. $\sqrt{a^2 + b^2} \leq |a| + |b| \leq \sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2}$.
3. $\max\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$.
4. $\min\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|)$.

Exercice 3

Montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz : Si a_i, b_i avec $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, sont des nombres réels arbitraires alors

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right)$$

Exercice 4

Montrer l'inégalité de Minkowski : Si a_i, b_i avec $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, sont des nombres réels arbitraires alors

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}$$

Exercice 5

Soient a_i avec $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, des nombres réels positifs non nuls. Montrer que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \geq \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \right]^{-1}$$

Exercice 6

Déterminer les bornes inférieure et supérieure, lorsqu'elles existent, des ensembles suivants :

1.

$$A = \left\{ \frac{n}{mn+1}; m \in \mathbb{N}^* \text{ et } n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

2.

$$B = \left\{ \frac{1}{n} + (-1)^n; n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Exercice 7

Soit $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ une famille quelconque de parties non vides de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1. Montrer que, si pour tout $\alpha \in \mathcal{I}$, $\mathcal{A}_\alpha$ est majorée et si l'ensemble

$$U = \{\sup \mathcal{A}_\alpha \text{ tels que } \alpha \in \mathcal{I}\}$$

est majoré, alors $\cup_{\alpha \in \mathcal{I}} \mathcal{A}_\alpha$ est majoré et on a :

$$\sup(\cup_{\alpha \in \mathcal{I}} \mathcal{A}_\alpha) = \sup(\sup \mathcal{A}_\alpha \text{ tels que } \alpha \in \mathcal{I}).$$

2. Par un contre exemple, montrer que ce résultat n'est pas vraie si l'hypothèse "U majoré" n'est pas vérifiée.

Exercice 8

1. Soient A et B deux parties non vides et majorées de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. On note

$$A + B = \{z \in \mathbb{R}; \exists x \in A \exists y \in B \text{ et } z = x + y\}.$$

Montrer que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

2. Soient A et B deux parties non vides de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels telles que

$$\forall x \in A, \forall y \in B \text{ on a } x \leq y.$$

(a) Prouver l'existence de $\sup A$ et de $\inf B$ et montrer que $\sup A \leq \inf B$

(b) Montrer que

$$\sup A = \inf B \iff \forall \epsilon > 0, \exists x \in A \exists y \in B \text{ tels que } |x - y| < \epsilon.$$

Suites numériques

Nous débutons ce chapitre par le raisonnement par récurrence qui est un raisonnement souvent utilisé pour l'étude d'une suite.

2.1 Le raisonnement par récurrence

2.1.1 Principe

Le raisonnement par récurrence est une belle machine permettant de démontrer qu'une proposition est vraie quelque soit l'entier naturel n . Le principe est le suivant : soit $P(n)$ une proposition dépendant d'un entier naturel n . Si $P(0)$ est vraie et si, pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'implication " $P(n) \implies P(n+1)$ " est vraie, alors la proposition $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

2.1.2 Point de la méthode

Dans une démonstration par récurrence, procéder de la manière suivante :

1. Exprimer clairement la proposition $P(n)$ que l'on veut prouver vraie pour tout entier naturel n .
2. Vérifier que $P(n_0)$ est vraie. Bien entendu que si c'est n_0 la petite valeur que peut prendre n .
3. Faire l'hypothèse de récurrence : " $P(n)$ vraie pour un entier naturel n . Utiliser cette hypothèse pour prouver (par des calculs, des raisonnements, de l'intuition) que " $P(n+1)$ est vraie.

Exemple 2.1. Démontrons par récurrence que :

$$\forall n \geq 1, 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Résolution

1. Pour $n = 1$ on a : $\frac{1(1+1)(2 \times 1 + 1)}{6} = \frac{6}{6} = 1 = 1^2$. Donc la propriété est vraie pour $n = 1$.
2. Supposons que la propriété est vraie jusqu'à un ordre k (avec $k \geq 1$), c'est-à-dire supposons que :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Montrons que la propriété est aussi vraie à l'ordre $(k + 1)$, c'est-à-dire montrons qu'on a :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (k + 1)^2 = \frac{(k + 1)[(k + 1) + 1][2(k + 1) + 1]}{6}.$$

On a :

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (k + 1)^2 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k + 1)^2 \\ &= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2) + (k + 1)^2 \\ &= \frac{k(k + 1)(2k + 1)}{6} + (k + 1)^2 \\ &= \frac{k(k + 1)(2k + 1) + 6(k + 1)^2}{6} \\ &= \frac{(k + 1)[k(2k + 1) + 6(k + 1)]}{6} \\ &= \frac{(k + 1)[2k^2 + 7k + 6]}{6} \\ &= \frac{(k + 1)[(k + 2)(2k + 3)]}{6} \\ &= \frac{(k + 1)[(k + 1) + 1][2(k + 1) + 1]}{6} \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie à l'ordre $(k + 1)$. On conclut alors que :

$$\forall n \geq 1, 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}.$$

Exemple 2.2. Montrer que pour tout entier naturel n , on a

$$0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Exemple 2.3. Soit f une application strictement croissante définie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $f(n) \geq n$.

Exemple 2.4. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, 5^{2n} - 3^n$ est divisible par 11.

2.2 Généralités sur les suites numériques

Les suites numériques sont utilisées pour modéliser des phénomènes discrets, c'est-à-dire que l'on observe à intervalles de temps réguliers.

2.2.1 Définition et Notation

Définition 2.5. On appelle suite numérique, toute application u définie d'une partie I de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} u : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto u(n) \end{aligned}$$

La suite se notera $(u_n)_{n \in I}$, $(u_n)_n$ ou tout simplement (u_n) . L'image $u(n)$ de l'entier naturel n sera notée u_n ; u_n est le terme général de la suite $(u_n)_n$.

2.2.2 Mode de détermination d'une suite

Une suite peut être déterminée de deux manières :

- par la donnée de son terme général u_n en fonction de n . On dit dans ce cas que la suite est donnée sous sa forme explicite.
- par la donnée de ses p premiers termes et une relation de récurrence entre $(p+1)$ termes consécutifs.

Exemple 2.6. .

1. Déterminer les 4 premiers termes de chacune des suites :

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} : u_n = \frac{2 - (-1)^n}{n^2 + 3}; \quad (v_n)_{n \in \mathbb{N}} : \begin{cases} v_0 &= 2 \\ v_1 &= -1 \\ v_{n+2} &= 3v_{n+1} + 4v_n - 2 \end{cases}$$

2. La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Fibonacci est définie par :

$$\begin{cases} a_0 = 0, & a_1 = 1 \text{ et} \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, & \text{pour tout } n \geq 2. \end{cases}$$

Calculer a_2 , a_3 , a_4 et a_5 .

Remarque 2.7. Une suite complexe est une suite à valeurs dans l'ensemble des nombres complexes. c'est donc une application définie d'une partie de $\mathbb{N}$ dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes. D'une manière générale une suite complexe $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se met sous la forme :

$$z_n = a_n + ib_n.$$

2.3 Propriétés éventuelles d'une suite

2.3.1 Monotonie d'une suite

1. Une suite $(u_n)_{n \in I}$ est croissante si $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout $n \in I$.
2. Une suite $(u_n)_{n \in I}$ est strictement croissante si $u_n < u_{n+1}$ pour tout $n \in I$.
3. Une suite $(u_n)_{n \in I}$ est décroissante si $u_n \geq u_{n+1}$ pour tout $n \in I$.
4. Une suite $(u_n)_{n \in I}$ est strictement décroissante si $u_n > u_{n+1}$ pour tout $n \in I$.
5. Une suite $(u_n)_{n \in I}$ est constante si $u_n = u_{n+1}$ pour tout $n \in I$.
6. Une suite $(u_n)_{n \in I}$ est monotone si elle est croissante ou décroissante.
7. Une suite $(u_n)_{n \in I}$ est strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Exemple 2.8. .

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de terme général : $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$. Étudions le sens de variation de cette suite :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{-2}{n(n+1)(n+2)}.$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$, la suite (u_n) est donc décroissante.

2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} v_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = v_n^2 + v_n + 1 \end{cases}$$

Pour tout entier naturel non nul on a : $v_{n+1} - v_n = v_n^2 + 1$. Par conséquent, on a : $v_{n+1} - v_n > 0$; la suite (v_n) est donc croissante.

3. Soit $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $t_n = f(n) = n - \sqrt{n^2 + 1}$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad t_{n+1} - t_n = [(n+1) - \sqrt{(n+1)^2 + 1}] - [n - \sqrt{n^2 + 1}] = 1 - \sqrt{(n+1)^2 + 1} + \sqrt{n^2 + 1}.$$

Le signe de cette expression est difficile à étudier. Par conséquent nous allons étudier une autre méthode. En étudiant les variations de la fonction : $x \mapsto f(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$, on montre que f est croissante sur $]0, +\infty[$. On en déduit que, pour tout entier naturel, on a : $f(n+1) > f(n)$, c'est à dire $t_{n+1} > t_n$. Par conséquent la suite (t_n) est croissante.

Remarque

Si la suite $(u_n)_{n \in I}$ est à termes strictement positifs (c'est-à-dire, pour tout $n \in I$, $u_n > 0$), alors pour étudier le sens de variation de $(u_n)_{n \in I}$, on peut comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1.

- Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ alors la suite (u_n) est croissante.
- Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ alors sera dite décroissante.

2.3.2 Suite majorée-Suite minorée et Suite bornée

1. Une suite $(u_n)_{n \in I}$ est dite majorée si il existe un nombre réel M tel que $u_n \leq M$ pour tout $n \in I$; c'est-à-dire que l'ensemble $\{u_n; n \in I\}$ est majorée.
2. Une suite $(u_n)_{n \in I}$ est dite minorée si il existe un nombre réel m tel que $u_n \geq m$ pour tout $n \in I$; c'est-à-dire que l'ensemble $\{u_n; n \in I\}$ est minorée.
3. Une suite $(u_n)_{n \in I}$ est dite bornée si elle est à la fois majorée et minorée ; c'est-à-dire qu'il existe deux nombres réels m et M tels que $m \leq u_n \leq M$ pour tout $n \in I$.
4. Une suite $(u_n)_{n \in I}$ est dite stationnaire s'il existe un entier $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $u_n = u_{N_0}$ pour tout $n \geq N_0$. Dans ce cas, on dit que la suite $(u_n)_{n \in I}$ est stationnaire à partir du rang N_0 .
5. Une suite $(u_n)_{n \in I}$ est dite périodique de période p si p est le plus petit entier naturel non nul tel que

$$\forall n \in I, u_{n+p} = u_n.$$

Exemple 2.9. .

— Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de terme général : $u_n = n^2 - 2n - 2$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (n-1)^2 - 3, \quad \text{et} \quad (n-1)^2 \geq 0.$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq -3$ et donc la suite (u_n) est minorée par -3 .

— On considère la suite numérique $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général $v_n = \frac{3n}{n+1}$.

- La suite est positive, c'est à dire que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n \geq 0$. La suite est donc minorée par 0.
- De plus (v_n) est majorée par 3. En effet, pour tout entier naturel n , on a :

$$v_n - 3 = -\frac{3}{n+1} < 0$$

Au total on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq v_n < 3$ et par conséquent la suite (v_n) est bornée.

Exemple 2.10. Considérons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $u_n = \frac{1}{n^2 + 1}$. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite strictement monotone et bornée.

Proposition 2.11. Une suite $(u_n)_{n \in I}$ est bornée si et seulement si la suite $(|u_n|)_{n \in I}$ est bornée.

Démonstration. Supposons que $(u_n)_{n \in I}$ est bornée. Alors $(u_n)_{n \in I}$ est majorée et minorée. Il existe donc deux constantes K et L telles que $L < 0 < K$ et pour tout $n \in I$, $L \leq u_n \leq K$. Soit $M = \max(K, -L)$, alors pour tout $n \in I$ on a : $-M \leq L \leq u_n \leq K \leq M$, c'est-à-dire $|u_n| \leq M$.

Réciproquement supposons que $(|u_n|)_{n \in I}$ est majorée. Il existe une constante réelle $M > 0$ telle que, pour tout $n \in I$, $|u_n| \leq M$. Ce qui est équivalent à $-M \leq u_n \leq M$; M est donc un majorant et $-M$ un minorant de la suite $(u_n)_{n \in I}$. $\square$

2.4 Suite arithmétique-Suite géométrique

2.4.1 Suite arithmétique

Définition

Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite numérique. On dit que la suite (u_n) est arithmétique s'il existe une constante réelle r telle que, pour tout $n \in I$, on a : $u_{n+1} - u_n = r$.

Le nombre réel r est appelé la raison de la suite (u_n) .

Propriétés

Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite arithmétique de premier terme u_a (où a est le plus petit élément de I) et de raison r . Alors on les propriétés suivantes :

- Le terme général de (u_n) est : $u_n = u_a + (n - a)r$ pour tout $n \in I$.
En particulier si le premier terme de la suite est u_0 alors son terme général est : $u_n = u_0 + nr$; si u_1 est le premier terme alors le terme général est $u_n = u_1 + (n - 1)r$.
- Pour tous entiers p et q éléments de I , on a : $u_p = u_q + (p - q)r$.
- Si a, b et c sont dans cet ordre trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, alors on a : $a + c = 2b$.
- Si $r > 0$ alors la suite (u_n) est croissante ; si $r < 0$ la suite (u_n) est décroissante.
- Somme des termes consécutifs

Soit $S = u_a + u_{a+1} + u_{a+2} + \dots + u_n$, alors on a :

$$S = \frac{[(n - a) + 1][u_n + u_a]}{2}.$$

D'une manière générale, si S est la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique, alors on a :

$$S = \frac{[\text{Nombre de termes dans la somme}][\text{Premier terme} + \text{Dernier terme}]}{2}$$

Nombre de termes dans la somme = Indice du dernier terme - Indice du premier terme + 1

Ainsi

$$S_1 = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{(n + 1)(u_n + u_0)}{2},$$

$$S_1 = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n(u_n + u_1)}{2}.$$

Exemple

a°) Soit à calculer la somme $S_1 = 1 + 2 + \cdots + n$. Pour cela, on pose $u_n = n$. La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme $u_1 = 1$ car pour tout entier on a : $u_{n+1} - u_n = (n+1) - n = 1$. Par conséquent,

$$S_1 = 1 + 2 + \cdots + n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \frac{n(u_n + u_1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

b°) Soit à calculer la somme $S_2 = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n+1)$. On pose $v_n = 2n+1$. La suite (v_n) est arithmétique de premier terme $v_0 = 1$ et de raison $r = 2$. On a alors :

$$S_2 = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n = \frac{(n+1)(v_n + v_0)}{2} = \frac{(n+1)[(2n+1) + 1]}{2} = (n+1)^2$$

2.4.2 Suite géométrique

Définition

Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite numérique. On dit que la suite (u_n) est géométrique s'il existe une constante réelle q telle que, pour tout $n \in I$, $u_{n+1} = qu_n$. Le nombre réel q est appelé raison de la suite (u_n) .

Propriétés

Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_a (où a est le plus petit élément de I). On suppose $q \neq 0$ et $q \neq 1$. On a alors les propriétés suivantes :

- Le terme général est : $u_n = u_a q^{n-a}$.
En particulier si u_0 est le premier terme alors le terme général est de la forme : $u_n = u_0 q^n$;
si u_1 est le premier terme alors $u_n = u_1 q^{n-1}$.
- Si m et n sont deux éléments quelconques de I , alors on a : $u_m = u_n q^{m-n}$.
- Si a , b et c sont dans cet ordre trois termes consécutifs d'une suite géométrique, alors on a : $b^2 = ac$.
- Somme des termes consécutifs
Soit $S = u_a + u_{a+1} + \cdots + u_n$, alors on a :

$$S = u_a \frac{1 - q^{n-a+1}}{1 - q}.$$

D'une manière générale si S est la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique, alors on a :

$$S = \text{Premier terme} \left(\frac{1 - q^{\text{Nombre de termes dans la somme}}}{1 - q} \right).$$

2.4.3 Exercice

On considère la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_n = \frac{1}{e^{2n+1}}$.

1. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.
2. On pose $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Exprimer S_n en fonction de n puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.
- 3.(a) On pose $v_n = \ln u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.

(b) Calculer en fonction de n la somme $S'_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.

(c) Calculer le produit $P_n = u_0 \cdot u_1 \cdot u_2 \cdots u_n$ et la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$.

2.4.4 Exercice

Trois nombre complexes z_1, z_2 et z_3 sont tels que leurs modules sont dans cet ordre trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison 2 et leurs arguments dans cet ordre trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison $\frac{\pi}{4}$. Déterminer ces nombres complexes sachant que leurs arguments sont tous des éléments de $]0, \pi[$ et que $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = -64i$.

2.4.5 Exercice

Soit $\mathcal{P}$ un plan euclidien orienté rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $u = re^{i\frac{5\pi}{4}}$, où r est un nombre réel strictement positif fixé.

1. On définit les points A_n de $\mathcal{P}$ de la manière suivante :

- A_0 est l'origine du repère $\mathcal{R}$.
- A_1 est le point d'affixe i .
- Pour tout entier $n \geq 2$, le point A_n est l'image du point A_{n-2} par la similitude directe de centre A_{n-1} , de rapport r et dont une mesure de l'angle est $\alpha = \frac{5\pi}{4}$.

On note z_n l'affixe du point A_n .

(a) Ecrire, pour tout entier $n \geq 2$, une relation entre z_n, z_{n-1} et z_{n-2} .

(b) Démontrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a : $z_n - z_{n-1} = i(-u)^{n-1}$.

(c) Exprimer z_n en fonction de n et de u .

2. Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe S telle que $S(A_0) = A_1$ et $S(A_1) = A_2$.

2.4.6 Exercice

Une boîte contient six jetons indiscernables au toucher. Deux de ces jetons sont numérotés 1, trois jetons portent le numéro 2, un des six jetons porte le numéro 0.

1. On tire au hasard et simultanément deux jetons de cette boîte. on désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeur la somme des nombre marqués sur ces deux jetons tirés.

Déterminer la loi de probabilité de X et calculer l'écart-type σ de X .

2. On joue maintenant au jeu suivant : on tire au hasard un jeton de la boîte puis on note le numéro marqué :

- Si le jeton tiré porte le numero 0, alors on est éliminé.
- Si le jeton tiré ne porte pas le numero 0, alors on le remet dans la boîte, puis on effectue un deuxième tirage.

On procède ainsi de suite. On continue les tirages tant qu'on est pas éliminé.

Pour tout entier naturel non nul, on désigne par p_n la probabilité d'être éliminé lors du n ème tirage.

(a) Calculer p_1, p_2, p_3 et plus généralement, p_n .

(b) Calculer la somme $S = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n$.

2.4.7 Suite arithmético-géométrique

ok

2.4.8 Exercice

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 4. \end{cases}$$

1. Le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Tracer les droites $(\mathcal{D})$ et (Δ) d'équations respectives $y = \frac{1}{2}x + 4$ et $y = x$, puis construire les 4 premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses.
2. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n - 8$.
 - (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme v_0 .
 - (b) Exprimer v_n , puis u_n en fonction de n .
 - (c) Calculer les sommes $S_1 = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ et $S_2 = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ en fonction de n .

2.4.9 Exercice

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4} \end{cases}$$

1. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq u_n < 1$.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. On considère la suite (v_n) définie par : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$.
 - (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
 - (b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
 - (c) Calculer la somme $S = v_2 + v_3 + \dots + v_n$ en fonction de n .

2.4.10 Exercice

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $u_0 = 20.000$ et $u_{n+1} = 1,05u_n + 1000$.
 - (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n + a$, où a est une constante réelle. Déterminer le nombre réel a sachant que la suite (v_n) est géométrique. Déterminer la raison et le premier terme de la suite (v_n) .
 - (b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
2. Au premier Janvier 1990, une ville possède 20.000 habitants. A partir de cette année la population augmente de 5% l'an. De plus durant la même période, 1000 personnes viennent s'établir dans cette ville chaque année. Quelle sera la population de la ville le 1^{er} Janvier 2000 ?
3. Dans cette ville, l'ensemble des élèves de l'enseignement primaire représente 20% de la population totale. On estime qu'il faut un instituteur pour 40 élèves.
Quel devra être le nombre d'instituteurs au 1^{er} Janvier 2000.

2.4.11 Exercice

On définit les nombres complexes z_n de la manière suivante : $z_0 = 1$ et pour tout n entier naturel non nul, $z_{n+1} = \frac{1}{3}z_n + \frac{2}{3}i$.

1. Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = z_n - i$.

(a) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .

(b) En déduire u_n en fonction de n .

2.(a) Exprimer en fonction de n , la partie réelle x_n et la partie imaginaire y_n de u_n . Calculer les limites des suites (x_n) et (y_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

(b) On note A_n le point du plan complexe d'affixe u_n . Calculer le module et un argument de u_n . Prouver que les points A_n appartiennent à une même droite (Δ) dont on donnera une équation cartésienne.

2.4.12 Comportement à l'infini d'une suite

Définition 2.12. Une suite $(u_n)_{n \in I}$ est convergente ou qu'elle tend vers un réel l lorsque

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N) \implies (|u_n - l| \leq \epsilon).$$

Ce qui veut dire que l'on peut rendre u_n assez proche de l autant que l'on veut pour les valeurs de plus en plus grandes de n . On note

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l.$$

Exemple 2.13. Considérons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par $u_n = \frac{1}{n}$. Montrer que cette suite converge vers 0.

Définition 2.14. 1. Une suite $(u_n)_{n \in I}$ tend vers $+\infty$ si

$$\forall B > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N) \implies (u_n \geq B).$$

Ce qui veut dire que l'on peut rendre u_n assez grand autant que l'on veut pour les valeurs de plus en plus grandes de n . On note

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

2. Une suite $(u_n)_{n \in I}$ tend vers $-\infty$ si la suite $(-u_n)_{n \in I}$ tend vers $+\infty$. On note

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty.$$

Définition 2.15. Lorsque la suite $(u_n)_{n \in I}$ n'a pas de limite ou bien si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \text{ ou bien } -\infty,$$

on dit que la suite $(u_n)_{n \in I}$ est divergente.

Exemple 2.16. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général $u_n = n^2$ est divergente.

Théorème 2.17. Lorsqu'une suite admet une limite, cette limite est unique.

Démonstration. Nous faisons la preuve pour le cas où cette limite est finie. Supposons alors par absurde l'existence de deux nombres réels distincts l_1 et l_2 qui sont tous deux limites de la suite $(u_n)_{n \in I}$.

Posons $\epsilon = \frac{1}{3}|l_1 - l_2|$. D'après la définition de la convergence de la suite, on aura :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_1) \implies |u_n - l_1| \leq \epsilon.$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_2) \implies |u_n - l_2| \leq \epsilon.$$

Posons $N = \max\{N_1, N_2\}$. On a :

$$|l_1 - l_2| = |l_1 - u_N + u_N - l_2| \leq |l_1 - u_N| + |u_N - l_2|.$$

Ainsi, on a :

$$|l_1 - l_2| \leq 2\epsilon = \frac{2}{3}|l_1 - l_2|.$$

Ce qui signifie que $1 \leq \frac{2}{3}$. D'où l'absurdité. $\square$

Remarque 2.18. On ne modifie pas la nature d'une suite en modifiant un nombre fini de ses termes.

Théorème 2.19. Soit f une fonction définie sur $[p, +\infty[$ avec $p \in \mathbb{N}$. Considérons la suite $(u_n)_{n \in I}$ telle que pour tout $n \in I$, on a $u_n = f(n)$. Alors si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ (l fini ou non), alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

Démonstration. Admise $\square$

2.5 Propriétés de la limite

Proposition 2.20. Si (u_n) est une suite bornée et si (v_n) est une suite qui converge vers 0, alors la suite $(u_n v_n)$ converge vers 0.

Démonstration. Par hypothèse (u_n) est bornée, alors la suite $(|u_n|)$ est majorée. Il existe donc une constante $M > 0$ telle que pour tout n , $|u_n| \leq M$. Par ailleurs, comme (v_n) converge vers 0, on a : pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $(n \geq n_0 \implies |v_n| < \frac{\epsilon}{M})$. Ainsi, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $(n \geq n_0 \implies |u_n v_n| = |u_n| |v_n| < M \cdot \frac{\epsilon}{M} = \epsilon)$. $\square$

Proposition 2.21. Toute suite convergente est bornée.

Démonstration. Soit (u_n) une suite convergente qui converge vers le réel l . Pour $\epsilon = 1$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $(n \geq n_0 \implies |u_n - l| < 1)$. Donc pour $n \geq n_0$ on a :

$$|u_n| = |u_n - l + l| \leq |u_n - l| + |l| < 1 + |l|.$$

Soit $A = \{|u_p|, p \in I \text{ et } p < n_0\}$, A admet un plus grand élément noté u_{p_0} . Posons $M = \max\{u_{p_0}, 1 + |l|\}$, on déduit que pour tout $n \in I$, $|u_n| \leq M$. $\square$

Remarque 2.22. La réciproque n'est pas toujours vraie. Il existe des suites bornées non convergentes. On a plutôt une condition nécessaire (mais pas suffisante) pour avoir la convergence d'une suite : une suite qui n'est pas bornée ne peut pas converger vers un réel.

Proposition 2.23. Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite de nombres réels et soit $a, l \in \mathbb{R}$.

1. La suite $(u_n)_{n \in I}$ converge vers l si et seulement si la suite $v_n = |u_n - l|$ converge vers 0.
2. Si $u_n \geq a$ (resp. $u_n \leq a$) pour tout $n \in \mathbb{R}$ (ou à partir d'un certain rang) et si (u_n) converge vers l alors $l \geq a$ (resp. $l \leq a$).

Démonstration. La première partie de la proposition est évidente en utilisant la définition même de la convergence d'une suite.

Soit (u_n) une suite convergeant vers l telle que pour un certain $n_1 \in \mathbb{N}$ $u_n \geq a$ à partir du rang n_1 . Nous allons montrer que $l \geq a$. Supposons par l'absurde que $l < a$. Pour $\varepsilon = a - l > 0$ il existe $n_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que $(n \geq n_2 \implies |u_n - l| < a - l)$. Posons $n_0 = \max(n_1, n_2)$, alors pour $n \geq n_0$ on a $|u_n - l| < a - l$ et $u_n \geq a$; c'est-à-dire $2l - a < u_n < a$. Ceci contredit l'hypothèse $u_n \geq a$ pour $n \geq n_0 \geq n_1$. $\square$

Proposition 2.24. Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques vérifiant à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$.

1. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.
2. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration. Soit n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $u_n \leq v_n$ et supposons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$. Prouvons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$. Soit alors $B > 0$. Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, il existe donc $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier naturel n on ait : $(n \geq N_1) \implies u_n \geq B$. Prenons $N = \max\{n_0, N_1\}$. Alors, pour tout entier naturel $n \geq N$, on a $v_n \geq u_n \geq B$. Ce qui justifie le fait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$. $\square$

Exemple 2.25. Considérons la suite définie pour tout entier naturel on nul n par $u_n = 2n + (-1)^n$. Donner la nature de la suite $(u_n)_n$. On remarquera que $u_n \geq n$.

Proposition 2.26. Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques vérifiant à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$. Si (u_n) converge vers l et (v_n) converge vers l' , alors $l \leq l'$.

Démonstration. Supposons par l'absurde que $l > l'$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < \frac{l-l'}{2}$ (ce qui est équivalent à $\varepsilon + l' < l - \varepsilon$). Il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$(n \geq n_1 \implies |u_n - l| < \varepsilon).$$

De même il existe $n_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$(n \geq n_2 \implies |v_n - l'| < \varepsilon).$$

Enfin il existe $n_3 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$(n \geq n_3, \quad u_n \leq v_n).$$

Ainsi pour $n \geq n_0 = \max(n_1, n_2, n_3)$ les trois inégalités sont vraies. On en déduit que

$$v_n < l' + \varepsilon < l - \varepsilon < u_n.$$

Ceci contredit l'hypothèse $u_n \leq v_n$ à partir du rang n_3 . $\square$

Corollaire 2.27 (Théorème des gendarmes). Considérons trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n) vérifiant à partir d'un certain rang

$$v_n \leq u_n \leq w_n.$$

Si les suites (v_n) et (w_n) convergent vers la même limite l , alors (u_n) est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $(n_1, n_2) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que

$$(n \geq n_1 \implies |v_n - l| < \varepsilon) \quad \text{et} \quad (n \geq n_2 \implies |w_n - l| < \varepsilon)$$

Par ailleurs il existe $n_3 \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$(n \geq n_3 \implies v_n \leq u_n \leq w_n.)$$

Donc si $n \geq n_0 = \max(n_1, n_2, n_3)$ on a :

$$l - \varepsilon < v_n < u_n < w_n < l + \varepsilon.$$

On déduit que $|u_n - l| < \varepsilon$ à partir du rang n_0 . Ce qui prouve que la suite (u_n) converge vers l . $\square$

Exemple 2.28. Prouver que la suite (u_n) de terme général $u_n = \frac{\cos(3n^2 - 1)}{n}$ converge vers 0.

Proposition 2.29. Soit $(u_n)_n$ une suite de réels strictement positifs.

1. Si $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$ alors la suite $(\frac{1}{u_n})_n$ tend vers 0.
2. Si $(u_n)_n$ tend vers 0 alors la suite $(\frac{1}{u_n})_n$ tend vers ∞ .

Démonstration. • Fixons $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $(n \geq n_0 \implies u_n > \frac{1}{\varepsilon})$, c'est-à-dire $0 < \frac{1}{u_n} < \varepsilon$. Ce qui prouve que $\frac{1}{u_n}$ tend vers 0.

- Fixons maintenant $A > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $(n \geq n_0 \implies 0 < u_n < \frac{1}{A})$. Donc $u_n > A$ à partir du rang n_0 pour tout $A > 0$, ce qui prouve que $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$. $\square$

2.5.1 Opérations sur les suites

Théorème 2.30. Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels convergeant respectivement vers les nombres a et b ; soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors on a :

1. La suite $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $a + b$.
2. La suite $(\lambda a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers λa .
3. La suite $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $a \cdot b$.
4. Si $a \neq 0$, la suite $(\frac{1}{a_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie pour n grand et converge vers $\frac{1}{a}$.

Démonstration. 1. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$ tel que $(n \geq n_1 \implies |a_n - a| < \frac{1}{2}\varepsilon)$ et $(n \geq n_2 \implies |b_n - b| < \frac{1}{2}\varepsilon)$. On en déduit que pour $n \geq n_0 = \max(n_1, n_2)$ on a :

$$|a_n - a| < \frac{1}{2}\varepsilon \text{ et } |b_n - b| < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire on a :

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon, \quad \text{pour } n \geq n_0.$$

Ceci prouve que $(a_n + b_n)_n$ tends vers $a + b$.

2. Pour $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $(n \geq n_0 \implies |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{1+|\lambda|})$. On a donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \implies |\lambda a_n - \lambda a| = |\lambda| |a_n - a| < \frac{|\lambda| \varepsilon}{1+|\lambda|} < \varepsilon)$$

3. Faisons remarquer que $a_nb_n = b_n(a_n - a) + ab_n$; comme $(a_n - a)$ tend vers 0 et b_n est bornée, on déduit que $b_n(a_n - a)$ tend vers 0. De plus ab_n tend vers ab et par conséquent a_nb_n tend vers ab .
4. Montrons que si $(a_n)_n$ converge vers $a \neq 0$, alors la suite $(\frac{1}{a_n})_n$ est bien définie et converge vers $\frac{1}{a}$.

Soit $\varepsilon = \frac{1}{2}|a| > 0$; comme $a_n \rightarrow a$ alors il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $(n \geq n_1) \implies |a_n - a| < \frac{1}{2}|a|$. Par ailleurs

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \frac{1}{2}|a|, \quad \text{pour } n \geq n_1$$

donc

$$|a_n| > |a| - \frac{1}{2}|a| = \frac{1}{2}|a| > 0 \text{ pour } n \geq n_1$$

et la suite $(\frac{1}{a_n})_n$ est bien définie.

On va maintenant établir la convergence de cette suite. On a

$$\left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a} \right| = \frac{|a_n - a|}{a_n a},$$

et pour $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq n_0 \implies |a_n - a| \leq \frac{2\varepsilon}{|a|^2}).$$

Donc on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq \max(n_0, n_1) \implies \left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a} \right| = \frac{|a_n - a|}{a_n a} < \frac{2\varepsilon}{|a|^2} \cdot \frac{|a|^2}{2} = \varepsilon).$$

□

Théorème 2.31.

1. Toute suite (u_n) de nombres réels croissante et majorée est convergente et converge vers $l = \sup\{u_n, n \in I\}$.
2. Toute suite (u_n) de nombres réels décroissante et minorée est convergente et converge vers $l' = \inf\{u_n, n \in I\}$.
3. Toute suite (u_n) de nombres réels qui est croissante et non majorée tend vers $+\infty$.
4. Toute suite (u_n) de réels qui est décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.

Démonstration.

1. Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite croissante et majorée par un réel M . Alors l'ensemble $\{u_n; n \in I\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ qui est majorée par M . Cet ensemble admet donc une borne supérieure que l'on note l . On a, en utilisant la caractérisation de la borne supérieure :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \quad l - \epsilon \leq u_n \leq l.$$

Ce qui implique :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \quad l - \epsilon \leq u_n \leq l + \epsilon,$$

ou bien

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N \implies |u_n - l| \leq \epsilon.$$

Ce qui justifie la convergence de la suite (u_n) vers le réel l .

- La deuxième partie du théorème s'obtient en appliquant la première partie du théorème à la suite $(-u_n)$.
- Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite croissante et non majorée. La non majoration de $(u_n)_{n \in I}$ se traduit par :

$$\forall M \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}; \quad u_{n_0} > M.$$

La suite étant croissante, pour tout entier naturel n tel que $n \geq n_0$, on a :

$$u_n \geq u_{n_0} > M.$$

Ainsi on a :

$$\forall M \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } (n \geq n_0) \implies (u_n > M).$$

Ce qui traduit que la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

- La dernière partie du théorème s'obtient en appliquant la troisième partie du théorème à la suite $(-u_n)$.

□

Exemple 2.32. Considérons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général

$$u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt.$$

Prouver que la suite (u_n) est convergente.

2.6 Suites extraites

Définition 2.33. Une suite réelle (v_n) est une suite extraite (aussi appelée sous-suite) de la suite numérique (u_n) lorsqu'il existe une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ (appelée application extractive) telle que $v_n = u_{\varphi(n)}$.

Rappelons que si $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante alors on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) \geq n.$$

Exemple 2.34. 1. Prenons la suite définie par $u_n = (-1)^n$, l'application $\varphi : n \mapsto 2n$ donne la sous-suite $v_n = u_{2n} = (-1)^{2n} = 1$. De même l'application $\varphi : n \mapsto 2n+1$ donne la sous-suite $t_n = u_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1$.

2. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \sin(\frac{2\pi n}{17})$. Elle est périodique de période $T = 17$. L'application $\varphi : n \mapsto 17n$ donne la sous-suite $v_n = u_{17n} = \sin(2\pi n) = 0$. De même l'application $\varphi : n \mapsto 17n+1$ donne la sous-suite $w_n = u_{17n+1} = \sin(\frac{2\pi}{17})$.

Théorème 2.35. Soit $(a_n)_{n \in I}$ une suite numérique. Pour que $(a_n)_{n \in I}$ soit convergente et converge vers un réel l il faut et il suffit que toutes les suites extraites de la suite $(a_n)_{n \in I}$ convergent vers la même limite l .

Démonstration. Supposons que toutes les sous-suites de la suite $(u_n)_{n \in I}$ convergent vers la même limite l . En particulier pour $\varphi(n) = n$ la suite $(u_{\varphi(n)})$ est une sous-suite de la suite $(u_n)_{n \in I}$, elle converge donc vers l .

Réciproquement soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite convergeant vers un nombre réel l . Et considérons la suite $v_n = u_{\varphi(n)}$ où φ est une application extractive. Prouvons que la suite (v_n) converge aussi vers l .

Soit alors $\epsilon > 0$; Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier naturel n tel que $n \geq n_0$, on ait $|u_n - l| \leq \epsilon$. Puisque φ est strictement croissante et que $n \geq n_0$, on a

$$\varphi(n) \geq \varphi(n_0) \geq n_0.$$

Cela implique que

$$|u_{\varphi(n)} - l| \leq \epsilon.$$

D'où la preuve □

Remarque 2.36. On utilise souvent ce résultat pour montrer qu'une suite diverge : si l'on trouve deux sous-suites de la même suite (u_n) qui tendent vers deux limites distinctes, alors la suite (u_n) est divergente.

Exemple 2.37. Montrer que, en utilisant le fait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ que l'on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} = 0$$

Exemple 2.38. 1. Montrer que la suite de terme général $u_n = (-1)^n$ est divergente.

2. Montrer que la suite de terme général $v_n = \sin(\frac{2\pi n}{17})$ est divergente.

Théorème 2.39. Une suite (u_n) est convergente si et seulement si les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite.

Définition 2.40. On appelle valeur d'adhérence d'une suite (u_n) , tout nombre réel x qui est limite d'une suite extraite de (u_n) .

Exemple 2.41. Quelles sont les valeurs d'adhérence de la suite de terme général $u_n = (-1)^n$?

Proposition 2.42. Une suite réelle est convergente si et seulement si elle admet une et une seule valeur d'adhérence.

2.6.1 Suites adjacentes

Définition

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites numériques. On dit qu'elles sont adjacentes si : l'une est croissante et l'autre est décroissante ; leur différence converge vers 0.

Théorème 2.43. Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite.

Démonstration. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites adjacentes. On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$. Posons $t_n = v_n - u_n$; la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0. On déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $t_n \geq 0$, c'est-à-dire $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$. Ainsi la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par u_0 ; elle est donc convergente. De même $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par v_0 , elle converge donc. Par ailleurs comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$, on déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$. □

Exemples

1. Montrons que les suites (u_n) et (v_n) définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$$

sont adjacentes.

- $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} > 0$ donc (u_n) est strictement croissante.
- $v_{n+1} - v_n = (u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!}) - (u_n + \frac{1}{nn!}) = \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$ donc (v_n) est strictement décroissante.
- De plus $v_n - u_n = \frac{1}{nn!}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$. On déduit donc que (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes.

2. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$ et $v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$. On va montrer que ces deux suites sont adjacentes. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \\ &= \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} \right) \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} > 0 \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \sum_{k=n+1}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \\ &= \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} \right) \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{-3n-2}{2n(n+1)(2n+1)} < 0. \end{aligned}$$

De plus

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

On déduit alors que ces deux suites sont adjacentes.

En utilisant le graphique de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $[n, 2n]$ et la méthode des rectangles pour calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe de cette fonction, l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = n$ et $x = 2n$, on déduit graphiquement que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq \ln 2 \leq v_n$$

et par conséquent $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ln 2$.

3. Soient u_0 et v_0 deux réels tels que $v_0 > u_0 > 0$. On définit les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Vérifier ces deux suites sont adjacentes. On pourra établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{v_n - u_n}{2}.$$

2.6.2 Exercices

1. Soit $0 < a < b$ et les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = a, \quad v_0 = b, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \quad v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n}.$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers une limite commune et exprimer cette limite à l'aide de l'unique réel $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\cos \alpha = \frac{a}{b}$.

2. Montrer que les suites :

$$S_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(k+1)^2} \quad \text{et} \quad S'_n = S_n + \frac{1}{3n^2}$$

sont adjacentes.

3. On pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$. Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Plus généralement, soit (v_n) une suite de réels strictement positifs, décroissante et convergent vers 0. Démontrer que la suite $u_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k v_k$ converge.

Théorème 2.44 (Théorème des segments emboîtés). Soit $I_n = [a_n, b_n]$ une suite de segments emboîtés, c'est-à-dire $I_{n+1} \subset I_n$. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - a_n) = 0$ alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ est un singleton.

Démonstration. Puisque $I_{n+1} \subset I_n$ alors on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$. Ainsi les suites (a_n) et (b_n) sont respectivement croissante et décroissante. Comme par hypothèse $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - a_n) = 0$, alors les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes. Elles convergent vers un même réel l . Par ailleurs pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $a_n \leq l \leq b_n$ donc $l \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$. Si l' est un autre élément de cette intersection alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq l' \leq b_n$ et par conséquent $|l - l'| \leq b_n - a_n$. Par passage à la limite, on déduit que $l = l'$ et ainsi $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ ne contient que le seul élément l . $\square$

Théorème 2.45 (Théorème de Bolzano-Weierstrass). De toute suite bornée de nombres réels on peut extraire une suite convergente dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. Soit (x_n) une suite réelle bornée. Donc il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n| \leq M$. On pose $a_1 = -M$ et $b_1 = M$ et alors on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_1 \leq x_n \leq b_1.$$

Soit $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$. Les sous-intervalles $[a_1, c_1]$ et $[c_1, b_1]$ sont d'amplitude $\frac{b_1-a_1}{2}$ et l'un d'eux contient une infinité de termes de la suite (x_n) . Soit $[a_2, b_2]$ cet sous-intervalle qui contient une infinité de termes de la suite, i.e $[a_2, b_2] = [a_1, c_1]$ ou $[a_2, b_2] = [c_1, b_1]$. Dans tous les cas on a $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$. On pose alors $c_2 = \frac{a_2+b_2}{2}$; $[a_2, c_2]$ ou $[c_2, b_2]$ contient une infinité de termes de la suite (x_n) et chacun d'eux a une longueur de $\frac{b_2-a_2}{2} = \frac{b_1-a_1}{2^2}$. Soit $[a_3, b_3]$ cet intervalle contenant une infinité de termes de la suite (x_n) ($[a_3, b_3] = [a_2, c_2]$ ou $[a_3, b_3] = [c_2, b_2]$); $[a_3, b_3] \subset [a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$. On itère ce processus et on suppose que $[a_k, b_k] \subset [a_{k-1}, b_{k-1}]$ avec $[a_k, b_k]$ contenant une infinité de termes de la suite (x_n) . Soit $c_k = \frac{a_k+b_k}{2}$, alors $[a_k, c_k]$ et $[c_k, b_k]$ sont de longueur $\frac{b_k-a_k}{2}$ et soit $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ celui qui contient une infinité de termes de la suite (x_n) , c'est-à-dire ($[a_{k+1}, b_{k+1}] = [a_k, c_k]$ ou $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [c_k, b_k]$). On a $\frac{b_{k+1}-a_{k+1}}{2} = \frac{b_k-a_k}{2}$ et on montre par récurrence que $\frac{b_k-a_k}{2} = \frac{b_1-a_1}{2^{k-1}}$. On a ainsi construire une suite $(I_n = [a_n, b_n])_n$ d'intervalles emboîtés d'amplitude $\frac{b_1-a_1}{2^{n-1}}$ qui tend vers 0, telle que chaque $I_n = [a_n, b_n]$ contient une infinité de termes de la suite (x_n) . D'après le théorème des segments emboîtés, l'intersection des intervalles I_n est le segment $\{l\}$. Dans chaque I_n , il y a une infinité de termes de la suite.

Construisons une sous-suite de la suite (x_n) qui converge vers l . soit $k_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $x_{k_1} \in \{x_n\}_n \subset [a_1, b_1]$. On prend $k_2 > k_1$ tel que $x_{k_2} \in [a_2, b_2]$. De proche en proche on prend $k_n > k_{n-1}$ tel que $x_{k_n} \in [a_n, b_n]$. Montrons que la suite (x_{k_n}) converge vers l . Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $a_n < l \leq x_{k_n} \leq b_n$ et $a_n \leq l \leq b_n$ donc $a_n - b_n \leq x_{k_n} - l \leq b_n - a_n$, c'est-à-dire

$$|x_{k_n} - l| \leq b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}},$$

ce qui permet de conclure de (x_{k_n}) converge vers l □

2.6.3 Limite inférieure-Limite supérieure

Définition et Théorème

Soit (u_n) une suite réelle et bornée. On désigne par A l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) . Alors A est borné et contient $\inf A$ et $\sup A$. Par définition $\sup A$ est la limite supérieure de la suite (u_n) et $\inf A$ est la limite inférieure de la suite (u_n) . On note :

$$\sup A = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup x_n \text{ (ou } \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} u_n) = \lim_{p \rightarrow +\infty} (\inf_{n \geq p} u_n) = \sup_p (\inf_{n \geq p} u_n)$$

$$\inf A = \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf x_n \text{ (ou } \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} u_n) = \lim_{p \rightarrow +\infty} (\sup_{n \geq p} u_n) = \inf_p (\sup_{n \geq p} u_n)$$

- La suite (v_p) définie par $v_p = \inf_{n \geq p} u_n$ est croissante donc elle converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ de limite l , avec

$$l = \lim_{p \rightarrow +\infty} v_p = \lim_{p \rightarrow +\infty} (\inf_{n \geq p} u_n) = \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sup_p (\inf_{n \geq p} u_n)$$

- De même la suite (w_p) définie par $w_p = \sup_{n \geq p} u_n$ est décroissante donc elle converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ de limite l' , avec

$$l' = \lim_{p \rightarrow +\infty} w_p = \lim_{p \rightarrow +\infty} \sup_{n \geq p} u_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} u_n = \inf_p (\sup_{n \geq p} u_n)$$

Proposition 2.46. Les limites inférieure et supérieure vérifient les propriétés suivantes

- $\underline{\lim} u_n \leq \overline{\lim} u_n$ et il y a égalité si et seulement si la suite (u_n) converge.

- $\liminf u_n$ et $\limsup u_n$ sont respectivement la plus petite et la plus grande des valeurs d'adhérence de la suite (u_n) .

En particulier, si A est l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (u_n) alors

$$(a) \quad A \subset [\liminf u_n, \limsup u_n].$$

- (b) Il existe une suite extraite $(v_n = u_{\varphi(n)})$ (respectivement $w_n = u_{\psi(n)}$) de la suite (u_n) qui converge vers $\limsup u_n$ (respectivement vers $\liminf u_n$).

Remarque 2.47 (Autre preuve du Théorème de Bolzano-Weierstrass). Soit (u_n) une suite réelle bornée. Posons $v_n = \inf_{m \geq n} u_m$; alors la suite (v_n) est une suite croissante (car si pour n fixé, l'ensemble $A_n = \{m \in \mathbb{N}, m \geq n\}$ est tel que $A_{n+1} \subset A_n$). De plus on a : $v_n \leq u_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Comme (u_n) est bornée, on déduit que (v_n) est majorée et par conséquent (v_n) est convergente.

Proposition 2.48. Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. On suppose que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur I et on considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 & \in I \\ u_{n+1} & = f(u_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Si la suite (u_n) converge vers l , alors $f(l) = l$.

Exemple 2.49. Etudions la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 & > -\frac{3}{2} \\ u_{n+1} & = \sqrt{2u_n + 3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

La fonction $f : x \mapsto \sqrt{2x + 3}$ est définie et continue et croissante sur $[-\frac{3}{2}, +\infty[$. Donc une limite éventuelle l de la suite (u_n) est telle que $l = \sqrt{2l + 3}$, c'est-à-dire $l = 3$. Par ailleurs on a : $u_1 = \sqrt{2u_0 + 3}$

- Si $-\frac{3}{2} \leq u_0 < 3$, alors la suite (u_n) est croissante. En effet, montrons d'abord, par récurrence, que la suite (u_n) est majorée par 3.

$$\begin{aligned} -\frac{3}{2} < u_0 < 3 & \implies 0 < u_1 = f(u_0) < f(3) = 3 \text{ (car } f \text{ est croissante sur } [-\frac{3}{2}, +\infty[) \\ u_1 < 3 & \implies u_2 = f(u_1) < f(3) = 3 \\ & \vdots \\ & \vdots \\ u_{n-1} < 3 & \implies u_n = f(u_{n-1}) < f(3) = 3 \end{aligned}$$

Donc (u_n) est majorée par 3. Par ailleurs

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sqrt{2u_n + 3} - u_n \\ &= \frac{2u_n + 3 - u_n^2}{\sqrt{2u_n + 3} + u_n} \\ &= -\frac{(u_n - 3)(u_n + 1)}{\sqrt{2u_n + 3} + u_n} \geq 0 \end{aligned}$$

(u_n) est croissante et majorée. Par conséquent (u_n) est convergente et converge vers $l = f(l) = 3$.

- De même si $u_0 > 3$, alors la suite (u_n) est décroissante. On montre d'abord que (u_n) est minorée par 3.

$$\begin{aligned}
 u_0 > 3 &\implies u_1 = f(u_0) > f(3) = 3 \text{ (car } f \text{ est croissante sur } [-\frac{3}{2}, +\infty[) \\
 u_1 > 3 &\implies u_2 = f(u_1) > f(3) = 3 \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 u_{n-1} > 3 &\implies u_n = f(u_{n-1}) > f(3) = 3
 \end{aligned}$$

Donc (u_n) est minorée par 3. Par ailleurs

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - u_n &= \sqrt{2u_n + 3} - u_n \\
 &= \frac{2u_n + 3 - u_n^2}{\sqrt{2u_n + 3} + u_n} \\
 &= -\frac{(u_n - 3)(u_n + 1)}{\sqrt{2u_n + 3} + u_n} \leq 0
 \end{aligned}$$

La suite (u_n) est donc minorée et décroissante, par conséquent elle est convergente et converge vers $l = f(l) = 3$.

- Si $u_0 = 3$, la suite (u_n) est constante et égale à 3.

Proposition 2.50. Soit

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{ax+b}{cx+d} \end{array} \quad (ad - bc \neq 0) .$$

On considère la suite numérique (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \\ u_{n+1} = h(u_n) \end{cases}$$

1. Si l'équation $h(x) = x$ admet deux solutions distinctes α et β , alors il existe un réel $k_1 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$y = h(x) \iff \frac{y - \beta}{y - \alpha} = \left(\frac{x - \beta}{x - \alpha} \right) k_1$$

et alors

$$\frac{u_n - \beta}{u_n - \alpha} = \left(\frac{u_0 - \beta}{u_0 - \alpha} \right) k_1^n.$$

2. Si l'équation $h(x) = x$ admet une solution unique λ alors il existe $k_2 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$y = h(x) \iff \frac{1}{y - \lambda} = \frac{1}{x - \lambda} + k_2$$

et alors

$$\frac{1}{u_n - \lambda} = \frac{1}{u_0 - \lambda} + nk_2$$

Démonstration. • Supposons que l'équation $h(x) = x$ admette deux solutions distinctes α et β . Alors on a : $b - d\alpha = c\alpha^2 - a\alpha$ et $b - d\beta = c\beta^2 - a\beta$. Dans ce cas on a :

$$\begin{aligned} y - \alpha &= \frac{ax + b}{cx + d} - \alpha \\ &= \frac{ax + b - \alpha cx - \alpha d}{cx + d} \\ &= \frac{ax - \alpha cx + c\alpha^2 - a\alpha}{cx + d} \\ &= \frac{(a - c\alpha)(x - \alpha)}{cx + d} \end{aligned}$$

De même on a :

$$y - \beta = \frac{(a - c\beta)(x - \beta)}{cx + d}$$

On déduit donc que

$$y = h(x) \iff \frac{y - \beta}{y - \alpha} = \left(\frac{x - \beta}{x - \alpha} \right) \times \frac{a - c\beta}{a - c\alpha}.$$

En prenant $x = u_n$ et $y = h(u_n) = u_{n+1}$, on déduit que

$$\frac{u_{n+1} - \beta}{u_{n+1} - \alpha} = k_1 \left(\frac{u_n - \beta}{u_n - \alpha} \right), \quad \text{avec } k_1 = \frac{a - c\beta}{a - c\alpha}.$$

On conclut par itération que

$$\frac{u_n - \beta}{u_n - \alpha} = \left(\frac{u_0 - \beta}{u_0 - \alpha} \right) k_1^n.$$

- Supposons que l'équation $h(x) = x$ admette une solution unique λ . Alors on a :

$$c\lambda^2 + d\lambda = a\lambda + b \text{ et } \lambda = \frac{a - d}{2c}.$$

Par ailleurs on a :

$$y - \lambda = \frac{ax + b}{cx + d} - \lambda = \frac{(a - c\lambda)(x - \lambda)}{cx + d}$$

et par conséquent

$$\frac{1}{y - \lambda} = \frac{cx + d}{(a - c\lambda)(x - \lambda)} = \frac{c(x - \lambda) + c\lambda + d}{(a - c\lambda)(x - \lambda)}.$$

De l'égalité $\lambda = \frac{a - d}{2c}$ on déduit que $c\lambda + d = a - c\lambda$ et alors

$$\frac{1}{y - \lambda} = \frac{c(x - \lambda) + a - c\lambda}{(a - c\lambda)(x - \lambda)} = \frac{1}{x - \lambda} + \frac{c}{a - c\lambda}.$$

En prenant $x = u_n$ et $y = h(u_n) = u_{n+1}$, on déduit que

$$\frac{1}{u_{n+1} - \lambda} = \frac{1}{u_n - \lambda} + \frac{c}{a - c\lambda}$$

et par itération on a :

$$\frac{1}{u_n - \lambda} = \frac{1}{u_0 - \lambda} + \left(\frac{c}{a - c\lambda} \right) n.$$

$$\text{Ici } k_2 = \frac{c}{a - c\lambda} = \frac{2c}{a + d} \text{ car } \lambda = \frac{a - d}{2c}.$$

□

Corollaire 2.51. *Soit*

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{ax + b}{cx + d} \end{array} \quad (ad - bc \neq 0).$$

On considère la suite numérique (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \\ u_{n+1} = h(u_n) \end{cases}$$

1. On suppose que l'équation $h(x) = x$ admet deux solutions distinctes α et β et on pose

$$k = \frac{a - c\beta}{a - c\alpha}.$$

(a) Si $|k| > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$, à moins que $u_0 = \beta$.

(b) Si $|k| < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \beta$, à moins que $u_0 = \alpha$.

(c) Si $|k| = 1$, la suite (u_n) n'admet pas de limite.

2. On suppose que l'équation $h(x) = x$ admet une solution unique λ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lambda = \frac{a - d}{2c}$

Exemple 2.52. *Etudier la suite définie par :*

$$\begin{cases} u_0 \neq \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{3 - 2u_n} \end{cases}$$

2.6.4 Suite de Cauchy

Définition 2.53. La suite (u_n) est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ si elle vérifie la condition :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, (m \geq N \text{ et } n \geq N) \implies |u_n - u_m| \leq \epsilon.$$

Exemple 2.54. 1. Prouver que la suite de terme général $u_n = \frac{1}{n^2}$ est une suite de Cauchy.

$$2. \text{ Soit } \begin{cases} v_1 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n + \frac{2}{v_n}), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Vérifier que (v_n) est une suite de Cauchy.

Proposition 2.55. Toute suite réelle de Cauchy est bornée.

Démonstration. Soit (u_n) une suite numérique. On suppose que (u_n) est de Cauchy. Alors il existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall n > N_0, |u_n - u_{N_0+1}| < 1 \text{ (ici on a pris } \epsilon = 1, p = n, q = N_0 + 1)$$

De plus on a :

$$|u_n| = |u_n - u_{N_0+1} + u_{N_0+1}| \leq |u_n - u_{N_0+1}| + |u_{N_0+1}| < 1 + |u_{N_0+1}|, \quad \text{pour tout } n > N_0.$$

Soit $M = \max\{|u_0|, |u_1|, |u_2|, \dots, |u_{N_0}|, |u_{N_0+1}|, 1 + |u_{N_0+1}|\}$, alors on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq M$$

donc (u_n) est bornée. □

Proposition 2.56. *Toute suite convergente est une suite de Cauchy.*

Démonstration. Soit (u_n) une suite telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$.

$$|u_p - u_q| = |(u_p - l) - (u_q - l)| \leq |u_p - l| + |u_q - l|.$$

Comme (u_n) converge vers l alors on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^* \setminus (p \geq n_0, q \geq n_0) \implies |u_p - l| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } |u_q - l| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^* \setminus (p \geq n_0, q \geq n_0) \implies |u_p - u_q| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

et par conséquent (u_n) est une suite de Cauchy. □

Théorème 2.57. *Une suite réelle est de Cauchy si et seulement si elle est convergente. On dit donc que $\mathbb{R}$ est complet.*

Démonstration. Soit (x_n) une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Alors (x_n) est bornée et d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite $(x_{k(n)})$ qui converge vers x . Nous allons montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$.

Comme $x_{k(n)} \rightarrow x$ alors on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } n > N_1 \implies |x_{k(n)} - x| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par ailleurs (x_n) étant de Cauchy, alors il existe $N_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$n > N_2 \implies |x_n - x_{k(n)}| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ car } k(n) \geq n > N_2.$$

De plus

$$|x_n - x| = |x_n - x_{k(n)} + x_{k(n)} - x| \leq |x_n - x_{k(n)}| + |x_{k(n)} - x|.$$

On prend donc $N_0 = \max N_1, N_2$ et on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}^* \setminus (n > N_0) \implies |x_n - x| < \varepsilon$$

et par suite on déduit que (x_n) converge vers x . □

Exemple 2.58. *Considérons la suite de terme général $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Prouver qu'elle n'est pas de Cauchy et en déduire sa nature.*

Remarque 2.59. *Attention : le fait que $|u_{n+1} - u_n|$ tende vers 0 ne suffit pas pour conclure que la suite (u_n) est de Cauchy (exemple précédent).*

2.7 Comparaison des suites

2.7.1 Suite dominée par une autre

Définition 2.60. Soit (u_n) une suite de nombres réels non nuls. On dit que la suite (v_n) est dominée par la suite (u_n) lorsque la suite quotient $\left(\frac{v_n}{u_n}\right)$ est bornée. On note

$$v_n = O(u_n), \text{ lire } v_n \text{ est un grand } o \text{ de } u_n.$$

Exemple 2.61. Montrer que $n \sin n = O(n)$.

2.7.2 Suite négligeable devant une autre

Définition 2.62. Soit (u_n) une suite de nombres réels non nuls. On dit que la suite (v_n) est négligeable devant la suite (u_n) lorsque la suite quotient $\left(\frac{v_n}{u_n}\right)$ converge vers 0. On note

$$v_n = o(u_n), \text{ lire } v_n \text{ est un petit } o \text{ de } u_n.$$

C'est-à-dire :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0) \implies \left| \frac{v_n}{u_n} \right| \leq \epsilon.$$

Exemple 2.63. Montrer que $n \sin n = o(n^2)$.

2.7.3 Suites équivalentes

Définition 2.64. Deux suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes lorsque la suite quotient $\left(\frac{v_n}{u_n}\right)$ converge vers 1. On note

$$(v_n) \sim (u_n), \text{ lire } (v_n) \text{ est équivalent à } (u_n).$$

C'est-à-dire :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0) \implies \left| \frac{v_n}{u_n} - 1 \right| \leq \epsilon.$$

Exemple 2.65. Montrer que $\sqrt{n^2 + 3} \sim n$.

Proposition 2.66. Soit (u_n) une suite de nombres réels non nuls et (v_n) une suite réelle quelconque. On a les équivalences suivantes :

1. $v_n \sim u_n \iff v_n - u_n = o(u_n)$.
2. Si la suite (u_n) est équivalente à la suite (v_n) alors la suite (v_n) est équivalente à la suite (u_n) .

Démonstration. Triviale. □

Proposition 2.67.

1. Si $v_n \sim u_n$ alors, pour toute suite de nombres réels non nuls (w_n) , on a : $v_n w_n \sim u_n w_n$.
2. Si (a_n) , (u_n) et (v_n) sont non nulles à partir d'un certain rang et si $v_n \sim u_n$ alors $\frac{a_n}{u_n} \sim \frac{a_n}{v_n}$.

3. Si $v_n \sim u_n$ et $w_n \sim t_n$ alors $\frac{v_n}{w_n} \sim \frac{u_n}{t_n}$.
4. La relation $\sim$ est une relation d'équivalence dans l'ensemble de toutes les suites de nombres réels non nuls.
5. L'équivalence des suites n'est pas compatibles avec l'addition.

Exemple 2.68. $n+1 \sim n-1$ et $-n \sim -n$ mais 1 n'est pas équivalent à -1 .

Proposition 2.69. Soit (u_n) une suite et $\lambda \in [0, 1[$. Si à partir d'un certain rang N on a :

$$|u_{n+1}| \leq \lambda |u_n|, \quad \forall n \geq N \quad (2.7.1)$$

alors (u_n) tend vers 0.

Démonstration. En itérant k fois l'inégalité (2.7.1), on obtient

$$|u_{N+k}| \leq \lambda |u_{N+k-1}| \leq \lambda^2 |u_{N+k-2}| \leq \dots \leq \lambda^k |u_N|.$$

Par conséquent

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} |u_{N+k}| \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda^k |u_N| = \left(\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda^k \right) |u_N| = 0.$$

On déduit donc que $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_{N+k} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. □

Proposition 2.70. Soient (u_n) et (v_n) deux suites strictement positives. Soit $\lambda \in [0, 1[$. On suppose qu'à partir d'un certain rang N on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \lambda \frac{v_{n+1}}{v_n}. \quad (2.7.2)$$

Alors (u_n) est négligeable devant (v_n) .

Proposition 2.71. On considère les suites

1. Pour $n \geq 2$, soit $u_n = (\ln n)^\beta$, avec $\beta > 0$.
2. Pour $n \geq 1$, soit $v_n = n^\alpha$, avec $\alpha > 0$.
3. Pour $n \geq 0$, soit $w_n = a^n$, avec $a > 1$.
4. Pour $n \geq 0$, on pose $z_n = n!$.

Alors $u_n = o(v_n)$, $v_n = o(w_n)$ et $w_n = o(z_n)$.

Démonstration. .

1. Montrons d'abord que $v_n = o(w_n)$. Un calcul simple montre que

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha \quad \text{et} \quad \frac{w_{n+1}}{w_n} = a > 1.$$

En utilisant le fait que la suite $\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$ est décroissante, et puisque $1 < \frac{a+1}{2} < a$ et

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = 1$, il existe N tel que si $n \geq N$ alors $\frac{v_{n+1}}{v_n} < \frac{a+1}{2}$. En prenant $\lambda = \frac{a+1}{2a}$ on a :

$$\lambda \in [0, 1[\quad \text{et} \quad \frac{v_{n+1}}{v_n} < \frac{a+1}{2} = \lambda a = \lambda \frac{w_{n+1}}{w_n}.$$

Les conditions de la proposition ci-dessus sont satisfaites et il vient que $v_n = o(w_n)$.

2. Montrons que $u_n = o(v_n)$. Il suffit de prouver que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} = 0$. On a :

$$\frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} = \frac{1}{\gamma^\beta} \left(\frac{\ln(n^\gamma)}{n^\gamma} \right)^\beta, \quad \text{avec } \gamma = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\gamma = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, on déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} = 0$.

3. Montrons que $w_n = o(z_n)$. Pour cela on a :

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = a \quad \text{et} \quad \frac{z_{n+1}}{z_n} = n + 1.$$

Pour n assez grand on a

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} = n + 1 \geq 2a.$$

Donc il existe un entier N tel que $n \geq N$ on a :

$$a = \frac{w_{n+1}}{w_n} \leq \frac{1}{2} \frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{n+1}{2}.$$

En prenant $\lambda = \frac{1}{2}$ dans la proposition ci-dessus, on déduit le résultat attendu. □

2.8 Exercices

2.8.1 Exercice

Démontrer, en utilisant la définition de la limite d'une suite, que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n-1}{2n+3} = \frac{3}{2}.$$

2.8.2 Exercice

Soit (u_n) une suite et $l \in \mathbb{R}$. Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

1. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = |l|$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$. La réciproque est-elle vraie ? **faux**
2. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^2 = l$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{l}$. **faux**
3. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = a \neq 1$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. **vrai**

2.8.3 Exercice

Que pensez-vous de chacun des trois raisonnements suivants ?

1. $1 + \frac{1}{k} \rightarrow 1$ quand $k \rightarrow +\infty$ et $(1 + \frac{1}{k})^k$ est le produit de k facteurs $(1 + \frac{1}{k})$. Comme la limite d'un produit vaut le produit des limites, on conclut que $(1 + \frac{1}{k})^k \rightarrow 1$ quand $k \rightarrow +\infty$. **faux**
2. Comme $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} = 0$ alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{k})^k = \lim_{k \rightarrow +\infty} 1^k = 1$. **faux**
3. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $1 + \frac{1}{k} > 1$. Or on sait que $\lim_{k \rightarrow +\infty} r^k = +\infty$ pour tout $r > 1$. d'où il résulte que $\lim_{k \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{k})^k = +\infty$. **faux**

2.8.4 Exercice

1. Montrer que la suite de terme général $u_n = n(1 + \cos(\frac{n\pi}{4}))$ est divergente.
2. Etudier la convergence des suites suivantes :

$$u_n = \sqrt{n^2 + 2n + 2} - \sqrt{n} \quad v_n = \frac{n \cos(\frac{1}{n})}{n+1} \quad w_n = \frac{(-1)^n + n}{n+1}.$$

2.8.5 Exercice

Étudier la convergence de chacune des suites définies par :

1. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \quad n \in \mathbb{N};$

2. $u_n = 5 - \frac{8}{5}n \quad n \in \mathbb{N};$

3. $u_n = 7^n \quad n \in \mathbb{N};$

4. $u_n = (-\frac{1}{9})^n \quad n \in \mathbb{N};$

5. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} \quad n \in \mathbb{N}^* ;$

6. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \quad n \in \mathbb{N}^* ? ;$

7. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad n \in \mathbb{N}^*.$

2.8.6 Exercice

Étudier la convergence de chacune des suites définies par :

1. $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N};$

2. $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left| u_n + \frac{2}{u_n} \right| \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

2.8.7 Exercice

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 10$ et la relation de récurrence : pour tout n , $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3$.

$(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite définie par la relation : pour tout n , $v_n = u_n - 4$.

1. Démontrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. Exprimer v_n en fonction de n .
2. En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
3. Donner l'expression de

$$s_n = \sum_{k=0}^n v_k$$

et en déduire celle de

$$t_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

4. Etudier la nature de la suite définie par la relation de récurrence : $a_0 = 10$ et $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + 1$

2.8.8 Exercice

Etudier les suites définies par :

1. $u_0 = 1, u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n^2}.$

2. $u_0 \in \mathbb{R}_+^*, u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a^2}{u_n}\right), a > 0.$

2.8.9 Exercice

Etablir la convergence de la suite $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$

Réurrences linéaires d'ordre 2

3.1 Introduction

Etant donné deux nombres réels a et b , on désire déterminer le terme général de la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n, \quad n \geq 0 \quad (3.1.1)$$

où u_0 et u_1 sont donnés. Ce type de suite est appelé *réurrence linéaire d'ordre 2*.

3.2 Espace vectoriel des réurrences

Etant donnés les nombres réels a et b , on désigne par $\mathcal{E}_{a,b} = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} : u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$ l'ensemble des suites qui vérifient la relation de récurrence (3.1.1).

Proposition 3.1. *L'ensemble $\mathcal{E}_{a,b}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites.*

Démonstration. Rappelons les opérations définies sur l'espace vectoriel des suites :

1. Addition de deux suites : $(u + v)_n := u_n + v_n$, $n \in \mathbb{N}$.
2. Multiplication d'une suite par un scalaire : pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $(\alpha u)_n := \alpha u_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. L'ensemble $\mathcal{E}_{a,b}$ est alors un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites muni de ces deux opérations. En effet
 - (a) La suite nulle $\Theta \in \mathcal{E}_{a,b}$ car $\Theta_{n+2} = 0 = a\Theta_{n+1} + b\Theta_n$ pour tout $n \geq 0$.
 - (b) Toute combinaison linéaire de deux suites u et v , éléments de $\mathcal{E}_{a,b}$ est un élément de $\mathcal{E}_{a,b}$.
En effet si $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ et $v_{n+2} = av_{n+1} + bv_n$ alors pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (\lambda u + \mu v)_{n+2} &= \lambda u_{n+2} + \mu v_{n+2} \\ &= \lambda(au_{n+1} + bu_n) + \mu(av_{n+1} + bv_n) \\ &= a(\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1}) + b(\lambda u_n + \mu v_n) \\ &= a(\lambda u + \mu v)_{n+1} + b(\lambda u + \mu v)_n \end{aligned}$$

□

Proposition 3.2. $\dim[\mathcal{E}_{a,b}] = 2$

Proposition 3.3. Soient $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites définies par :

1. $e_0 = 1$, $e_1 = 0$ et $e_{n+2} = ae_{n+1} + be_n$ pour tout $n \geq 0$.

2. $f_0 = 1$, $f_1 = 0$ et $f_{n+2} = af_{n+1} + bf_n$ pour tout $n \geq 0$.

Ces deux suites sont indépendantes : soit λ et β tels que $\alpha e_n + \beta f_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors on a pour $n = 0$ $\alpha e_0 + \beta f_0 = 0$ et $n = 1$ $\alpha e_1 + \beta f_1 = 0$, ce qui donne $\alpha = 0$ et $\beta = 0$.

Montrons que ces deux suites sont génératrices de $\mathcal{E}_{a,b}$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{E}_{a,b}$, on cherche des coefficients x et y tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = xe_n + yf_n$. En prenant $n = 0$ puis $n = 1$ on trouve $x = u_0$ et $y = u_1$. Vérifier alors que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la formes $u_n = u_0 e_n + u_1 f_n$ sont des éléments de $\mathcal{E}_{a,b}$. On a :

$$\begin{aligned} au_{n+1} + bu_n &= a(u_0 e_{n+1} + u_1) + b(u_0 e_n + u_1 f_n) \\ &= u_0(ae_{n+1} + be_n) + u_1(af_{n+1} + bf_n) \\ &= u_0 e_{n+2} + u_1 f_{n+2} \\ &= u_{n+2} \end{aligned}$$

3.3 Résolution

Résoudre une récurrence d'ordre 2 signifie déterminer l'expression explicite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en fonctions des nombres u_0, u_1, a, b et n .

Définition 3.4. L'équation caractéristique de la récurrence (3.1.1) est :

$$x^2 = ax + b \quad (3.3.1)$$

Dans la suite, on désignera par α et β , les racines de (3.3.1).

3.3.1 Les racines de l'équation caractéristique sont réelles et distinctes

Dans ce cas on a :

Proposition 3.5. Les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ solutions de (3.1.1) sont de la forme

$$u_n = \lambda \alpha^n + \mu \beta^n, \forall n \in \mathbb{N}$$

avec λ et μ tels que

$$\begin{cases} \lambda + \mu = u_0 \\ \lambda \alpha + \mu \beta = u_1 \end{cases}$$

Démonstration. 1. Les deux suites $(\alpha^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\beta^n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifient la récurrence (3.1.1) (vérification facile).

2. Elles sont indépendantes : $\lambda \alpha^n + \mu \beta^n = 0, \forall n \in \mathbb{N} \implies \lambda = 0 = \mu$.

3. La dimension de $\mathcal{E}_{a,b}$ étant égale à 2, on déduit que ces deux suites sont génératrices de $\mathcal{E}_{a,b}$, ainsi les deux suites $(\alpha^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\beta^n)_{n \in \mathbb{N}}$ constituent une base de $\mathcal{E}_{a,b}$. Par conséquent la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ solution de (3.1.1) est une combinaison linéaire de des suites $(\alpha^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\beta^n)_{n \in \mathbb{N}}$. $\square$

3.3.2 L'équation caractéristique a une racine double

Dans ce cas $a^2 - 4b = 0$ et alors $\alpha = \beta = \frac{a}{2}$.

Proposition 3.6. Les solutions de (3.1.1) sont les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la forme :

$$u_n = \lambda \alpha^n + \mu n \alpha^n, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \text{avec } \lambda = u_0 \quad \text{et} \quad (\lambda + \mu) \alpha = u_1.$$

Démonstration. • La suite $(n\alpha^n)$ vérifie la relation de récurrence (3.1.1).

- Les suites $(n\alpha^n)$ et $(\mu n\alpha^n)$ sont indépendantes puisque l'identité $\lambda\alpha^n + \mu n\alpha^n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ implique $\lambda = 0$ pour $n = 0$ et $(\lambda + \mu)\alpha = 0$ pour $n = 1$. Mais puisque $0 \neq b = \frac{a^2}{4}$, on déduit que $\alpha = \frac{a}{2} \neq 0$, de sorte que $\mu = \lambda = 0$.

□

3.3.3 Les racines de l'équation caractéristique sont distinctes et complexes conjuguées

On suppose que $\alpha = r + is$, $\beta = r - is$ avec $r = \rho \cos \theta$, $s = \rho \sin \theta$, $\rho > 0$ et $\theta \in]0, 2\pi[\setminus \{\pi\}$. Dans ce cas on le résultat suivant

Proposition 3.7. Les solutions de (3.1.1) sont les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la forme

$$u_n = \rho^n (\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta))$$

avec $\lambda = u_0$ et $\rho(\lambda \cos \theta + \mu \sin \theta) = u_1$.

Démonstration. Il suffit de prouver que les suites $(c_n = \rho^n \cos(n\theta))$ et $(s_n = \rho^n \sin(n\theta))$ vérifient (3.1.1) et sont indépendantes.

Notons que, par la formule de Moivre, on a :

$$c_n + is_n = \rho^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)] = \rho^n (\cos \theta + i \sin \theta)^n,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} c_{n+2} + is_{n+2} - a(c_{n+1} + is_{n+1}) - b(c_n + is_n) &= \\ \rho^{n+2} (\cos \theta + i \sin \theta)^{n+2} - a\rho^{n+1} (\cos \theta + i \sin \theta)^{n+1} - b\rho^n (\cos \theta + i \sin \theta)^n &= \\ \rho^n (\cos \theta + i \sin \theta)^n [(r + is)^2 - a(r + is) - b] &= 0 \end{aligned}$$

Les parties réelles et imaginaires de l'expression précédente sont donc nulles :

$$c_{n+2} - ac_{n+1} - bc_n = s_{n+2} - as_{n+1} - bs_n = 0$$

de sorte que $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifient la récurrence. Elles sont aussi indépendantes (vérification facile). □

3.3.4 Applications

Déterminer les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que

$$\begin{cases} u_0 = 0, & u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, & n \geq 0 \end{cases} ; \quad v_{n+2} = 4v_{n+1} - 4v_n, \quad n \geq 0; \quad w_{n+2} = -w_{n+1} - w_n, \quad n \geq 0$$

3.4 Réurrences linéaires et calcul matriciel

Une récurrence linéaire d'ordre 2

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

possède une écriture matricielle de la forme :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$U_{n+1} = AU_n \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$$

Par analogie avec les suites géométriques, on montre que

$$U_n = A^n U_0 \tag{3.4.1}$$

et la question est maintenant de calculer la matrice A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Fonctions numériques d'une variable réelle

4.1 Généralités

Définition 4.1. On appelle fonction numérique à variable réelle, toute fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ et définie sur une partie E de $\mathbb{R}$.

Se donner une telle fonction f , c'est se donner une partie E de $\mathbb{R}$ et un procédé associant à chaque $x \in E$, un réel y (noté $f(x)$) bien déterminé.

Exemple 4.2. Considérons la fonction f définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = |x + 3| - 2|-x + 1| + 3x \end{aligned}$$

Ecrire $f(x)$ sans le symbole valeur absolue puis construire la fonction f dans un repère orthogonal.

4.1.1 Propriétés globales d'une fonction

Une fonction f définie sur $D \subset \mathbb{R}$ est dite :

1. croissante si

$$\forall (x, y) \in D^2, (x < y) \implies f(x) \leq f(y).$$

2. décroissante si

$$\forall (x, y) \in D^2, (x < y) \implies f(x) \geq f(y).$$

3. strictement croissante si

$$\forall (x, y) \in D^2, (x < y) \implies f(x) < f(y).$$

4. strictement décroissante si

$$\forall (x, y) \in D^2, (x < y) \implies f(x) > f(y).$$

5. monotone si f est croissante ou bien décroissante.

6. strictement monotone si f est strictement croissante ou bien strictement décroissante.

7. majorée si

$$\exists M \in \mathbb{R}; \forall x \in D, f(x) \leq M.$$

8. *minorée*

$$\exists m \in \mathbb{R}; \forall x \in D, f(x) \geq m.$$

9. *bornée si f est à la fois majorée et minorée.*

10. *paire si*

$$\forall x \in D, -x \in D \text{ et } f(-x) = f(x).$$

11. *impaire si*

$$\forall x \in D, -x \in D \text{ et } f(-x) = -f(x).$$

12. *périodique, si il existe $T \in \mathbb{R}_+^*$ tel que*

$$\forall x \in D, x + T \in D \text{ et } f(x + T) = f(x).$$

13. *lipschitzienne, si il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que*

$$\forall (x, y) \in D^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

On dit que f est lipschitzienne de rapport k .

Exemple 4.3. Montrer que la fonction partie entière est croissante sur $\mathbb{R}$.

4.1.2 Propriétés locales d'une fonction

Définition 4.4. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$; on dit d'une fonction f possède une certaine propriété au voisinage de a , s'il existe un intervalle ouvert I centré en a tel que f possède cette propriété sur l'ensemble $I \cap D_f$.

Exemple 4.5. Montrer que

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{x} + \sin x \end{aligned}$$

est bornée au voisinage de $+\infty$.

4.1.3 Opérations sur les fonctions

Soit $D \subset \mathbb{R}$ tel que $D \neq \emptyset$. On notera $\mathbb{R}^D$ l'ensemble des applications définies de D dans $\mathbb{R}$. On définit sur $\mathbb{R}^D$:

1. *une addition*

$$\begin{aligned} + &: \mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D \longrightarrow \mathbb{R}^D \\ (f, g) &\longmapsto f + g \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} f + g &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (f + g)(x) = f(x) + g(x). \end{aligned}$$

2. *une multiplication interne*

$$\begin{aligned} \times &: \mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D \longrightarrow \mathbb{R}^D \\ (f, g) &\longmapsto fg \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} fg &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (fg)(x) = (f(x)) \times (g(x)). \end{aligned}$$

3. une multiplication externe

$$\begin{aligned} \times &: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^D \longrightarrow \mathbb{R}^D \\ (\alpha, f) &\longmapsto \alpha f \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \alpha f &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (\alpha f)(x) = \alpha(f(x)). \end{aligned}$$

4. une relation d'ordre

$$f \leq g \iff \forall x \in D, f(x) \leq g(x).$$

Cet ordre est partiel.

5. $\sup(f, g)$ définie pour tout $x \in D$ par $\sup(f, g)(x) = \max(f(x), g(x))$.

6. $\inf(f, g)$ définie pour tout $x \in D$ par $\inf(f, g)(x) = \min(f(x), g(x))$.

4.2 Notion de limite d'une fonction

4.2.1 Limite d'une fonction en un point

Définition 4.6. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et f une fonction définie sur I sauf peut-être en a . On dit que f admet une limite l en a s'il existe une fonction $\tilde{f}$ prolongeant f par continuité en a . On a donc :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \tilde{f}(a) = l.$$

c'est-à-dire :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0; \forall x \in D, |x| \leq \alpha \implies |f(x) - f(a)| \leq \epsilon.$$

Si la fonction f est définie au point a , f est continue en a équivaut à f admet une limite en a et on a

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Si f n'est pas définie en a , il existe donc un nombre réel l tel que $\tilde{f}$ est définie par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D \setminus \{a\} \\ l & \text{si } x = a \end{cases}$$

D'une manière générale on dit que f admet $l \in \mathbb{R}$ comme limite quand x tend vers a (a pouvant ne pas être dans le domaine de définition de f) si :

$$\forall \epsilon, \exists \eta = \eta(\epsilon) / (\forall x \in D, 0 < |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - l| < \epsilon).$$

Définition 4.7 (Limite à droite et limite à gauche). Supposons que f soit définie à droite de c . On dit que la fonction f admet une limite l à droite en c si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, (\forall x \in D, 0 < x - c < \eta \implies |f(x) - l| < \epsilon).$$

On écrira alors $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = l$.

On définit de manière analogue la limite à gauche.

Remarque 4.8. La notion de limite de $f(x)$ quand x tend vers c est une notion locale dans le sens qu'elle ne dépend que des valeurs de f au voisinage du point c .

Exemple 4.9. La fonction $f(x) = E(x)$ admet en tout point une limite à droite et une limite à gauche avec

$$\lim_{x \rightarrow c^+} E(x) = c > c - 1 = \lim_{x \rightarrow c^-} E(x).$$

Théorème 4.10. Si f admet une limite en un point a , cette limite est unique.

Calculer la limite au point 2 de la fonction f définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x^3 - 3x^2 + x + 1}{x - 1} . \end{aligned}$$

Proposition 4.11. Une fonction f admet une limite en un point a si et seulement si elle admet une limite à gauche en a , une limite à droite en a et

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x). \end{aligned}$$

Exemple 4.12. Etudier la limite en 0 de la fonction f définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto E(x^2) . \end{aligned}$$

4.2.2 Limite infinie en un point

Définition 4.13. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et f une fonction définie sur I sauf en a .

1. On dit qu'une fonction $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a si

$$\forall B > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tels que } \forall x \in D, |x - a| \leq \alpha \implies f(x) \geq B.$$

On note

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty.$$

2. On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers a si $-f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a . On note

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty.$$

4.2.3 Limite finie à l'infini

Définition 4.14. 1. Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$. On dit qu'une fonction $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers $+\infty$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists A > 0 \text{ tels que } \forall x \in D, x > A \implies |f(x) - l| \leq \epsilon.$$

On note

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l.$$

2. Soit f une fonction définie au voisinage de $-\infty$. On dit qu'une fonction $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers $-\infty$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists A > 0 \text{ tels que } \forall x \in D, x < -A \implies |f(x) - l| \leq \epsilon.$$

On note

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l.$$

4.2.4 Limite infinie à l'infini

Définition 4.15. 1. Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$. On dit qu'une fonction $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ si

$$\forall B > 0, \exists A > 0 \text{ tels que } \forall x \in D, x > A \implies f(x) > B.$$

On note

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

2. Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$. On dit qu'une fonction $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ si

$$\forall B > 0, \exists A > 0 \text{ tels que } \forall x \in D, x > A \implies f(x) < -B.$$

On note

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

3. Soit f une fonction définie au voisinage de $-\infty$. On dit qu'une fonction $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$ si

$$\forall B > 0, \exists A > 0 \text{ tels que } \forall x \in D, x < -A \implies f(x) > B.$$

On note

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

4. Soit f une fonction définie au voisinage de $-\infty$. On dit qu'une fonction $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$ si

$$\forall B > 0, \exists A > 0 \text{ tels que } \forall x \in D, x < -A \implies f(x) < -B.$$

On note

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

Proposition 4.16. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $c, l, l' \in \mathbb{R}$. Supposons que f est définie à côté de c si $c \in \mathbb{R}$ ou dans un voisinage de $\pm\infty$ si $c = \pm\infty$.

1. **Unicité** : Si f admet l et l' pour limites en c , alors $l = l'$.
2. Une fonction admet une limite à droite et une limite à gauche en c et ces limites sont égales à l si et seulement si f tend vers l quand x tend vers c .

Proposition 4.17 (Opérations sur les limites). Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $c \in \overline{\mathbb{R}}$ et $l, l' \in \mathbb{R}$. Supposons que les fonctions f et g sont définies à côté de c si $c \in \mathbb{R}$ ou dans un voisinage de c si $c = \pm\infty$.

1. **Somme** ($\lim_c f = l$ et $\lim_c g = l'$) $\implies \lim_c (f + g) = l + l'$.
2. **Produit** ($\lim_c f = l$ et $\lim_c g = l'$) $\implies \lim_c (f \cdot g) = l \cdot l'$.
3. **Quotient** ($\lim_c f = l$ et $\lim_c g = l' \neq 0$) $\implies \lim_c \left(\frac{f}{g}\right) = \frac{l}{l'}$.
4. **Composition** Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ définie à côté de c (ou dans un voisinage de $\pm\infty$ si $c = \pm\infty$), $g : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ définie à côté de l , où $\overline{D}$ est tel que $f(D) \subset \overline{D} \setminus \{l\}$. Alors ($\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$ et $\lim_{y \rightarrow l} g(y) = l'$) $\implies \lim_{x \rightarrow c} (g \circ f)(x) = l'$.

5. **Limites et inégalités** Si $g \leq f$ à côté de c (ou dans un voisinage de $\pm\infty$ si $c = \pm\infty$) alors $(\lim_c g = l_1 \text{ et } \lim_c f = l_2) \implies l_1 \leq l_2$.

Théorème 4.18 (Théorème d'encadrement ou des gendarmes). Soit $f, g, h : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Supposons que f, g et h soient définies à côté de c si $c \in \mathbb{R}$ ou dans un voisinage de $\pm\infty$ si $c = \pm\infty$. Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ pour tout x à côté de c (ou dans un voisinage de $\pm\infty$ si $c = \pm\infty$) et $\lim_c g = \lim_c h = l$, alors la fonction f admet une limite en c et $\lim_c f = l$.

4.3 Continuité

4.3.1 Continuité en un point

Définition 4.19. Soit f une fonction de domaine de définition D , $a \in D$. On dit que f est continue au point a , si l'on peut rendre $f(x)$ assez voisin de $f(a)$ autant que l'on veut quand x est suffisamment proche de a . C'est-à-dire :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0; (\forall x \in D, |x - a| \leq \alpha) \implies |f(x) - f(a)| \leq \epsilon.$$

Exemple 4.20. .

- Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 1. Soit $\epsilon > 0$, on cherche $\delta > 0$ tel que :

$$(x \in [0, +\infty[\text{ et } 0 < |x - 1| \leq \delta) \implies |\sqrt{x} - 1| < \epsilon.$$

Pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a :

$$|\sqrt{x} - 1| = \frac{|x - 1|}{\sqrt{x} + 1} \leq |x - 1|.$$

En prenant $\delta \in]0, \epsilon[$ on a le résultat.

- Montrons que la fonction $x \mapsto 3x^2 + 1$ est continue en tout point $a \in \mathbb{R}$. Soit $\epsilon > 0$, on cherche $\delta > 0$ tel que

$$(0 < |x - a| \leq \delta) \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

On a :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= 3|x - a||x + a| = 3|x - a|((x - a) + 2a) \\ &\leq 3|x - a|(|x - a| + 2|a|) \\ &\leq \delta(\delta + 2|a|). \end{aligned}$$

On prend alors $\delta \in]0, 1[$ et on a :

$$|f(x) - f(a)| \leq 3\delta(1 + 2|a|).$$

Ainsi $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ implique que $\delta < \frac{\epsilon}{3(1 + 2|a|)}$. En conclusion si $0 < \delta < \min(1, \frac{\epsilon}{3(1 + 2|a|)})$ on a le résultat espéré.

Théorème 4.21. Toute fonction continue en un point a est bornée au voisinage de a .

Démonstration. Puisque f est continue au point a alors on a :

$$\forall \epsilon, \exists \delta > 0 / (x \in D_f \text{ et } 0 < |x - a| \leq \delta) \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Ainsi pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\text{pour tout } x \in]a - \delta, a + \delta[\cap D_f, \quad -\epsilon + f(a) < f(x) < \epsilon + f(a),$$

et ainsi f est bornée au voisinage du point a . □

4.3.2 Cas des fonctions Lipschitziennes

Théorème 4.22. *Toute fonction lipschitzienne sur D est continue en tout point de D .*

Démonstration. Soit f une fonction Lipschitzienne de rapport k sur D .

1. Si $k = 0$, alors f est une fonction constante sur D ; elle est donc continue en tout point de D .
2. Si $k > 0$; soit $a \in D$. Soit $\epsilon > 0$, on cherche $\alpha > 0$ tel que

$$(\forall x \in D, |x - a| \leq \alpha) \implies |f(x) - f(a)| \leq \epsilon.$$

La fonction f étant une fonction Lipschitzienne de rapport k , on a :

$$|f(x) - f(a)| \leq k|x - a| \leq k\alpha.$$

Donc en imposant $k\alpha \leq \epsilon$, c'est-à-dire $0 < \alpha \leq \frac{\epsilon}{k}$, on a alors : $|f(x) - f(a)| \leq \epsilon$.

□

4.3.3 Continuité à droite-Continuité à gauche

Définition 4.23. Soit $f \in \mathbb{R}^D$ et $a \in D$. La fonction f est dite continue à droite en a si la restriction de f à $[a, +\infty[$ est continue en a . On note :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = f(a).$$

Soit $f \in \mathbb{R}^D$ et $a \in D$. La fonction f est dite continue à gauche en a si la restriction de f à $] -\infty, a]$ est continue en a . On note

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = f(a).$$

Exemple 4.24. Montrons que la fonction partie entière E est continue à droite en tout point $a \in \mathbb{R}$ mais n'est pas continue à gauche en a .

Proposition 4.25. Soit $f \in \mathbb{R}^D$ et $a \in D$. f est continue au point a si et seulement si elle est continue à droite et à gauche en a .

Exemple 4.26. Considérons la fonction f définie par :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x|.$$

1. Calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0, x < 0} f(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f(x).$$

2. f admet-elle une limite en 0?

Théorème 4.27 (Conservation locale du signe). Soit f une fonction continue en un point a . Si $f(a) > 0$ (respectivement $f(a) < 0$) alors il existe un voisinage V de a tel que :

$$\forall x \in V, f(x) > 0, \quad (\text{ respectivement } f(x) < 0)$$

Démonstration. Puisque f est continue au point a alors on a :

$$\forall \varepsilon, \exists \delta > 0 / (x \in D_f \text{ et } 0 < |x - a| \leq \delta) \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Ainsi pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\text{pour tout } x \in]a - \delta, a + \delta[\cap D_f, \quad -\varepsilon + f(a) < f(x) < \varepsilon + f(a).$$

- Si $f(a) < 0$ alors on prend $\varepsilon = -\frac{1}{2}f(a) > 0$ et on a :

$$\frac{3}{2}f(a) < f(x) < \frac{1}{2}f(a) < 0 \text{ pour tout } x \in]a - \delta, a + \delta[\cap D_f = V.$$

- Si $f(a) > 0$ alors on prend $\varepsilon = \frac{1}{2}f(a) > 0$ et on a :

$$0 < \frac{1}{2}f(a) < f(x) < \frac{3}{2}f(a) \text{ pour tout } x \in]a - \delta, a + \delta[\cap D_f = V.$$

□

Définition 4.28. .

- Soit f une fonction numérique de la variable réelle dont le domaine de définition est notée D_f et soit $a \in D_f$. Si f n'est pas continue au point a , on dit que f est discontinue en a ou que a est un point de discontinuité de f .
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \in \mathbb{R}$ et si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$, alors on dit que f présente une discontinuité artificielle en a .
- Si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \in \mathbb{R}$ tels que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \in \mathbb{R} \neq \lim_{x \rightarrow a} f(x) \in \mathbb{R}$, alors on dit que a est un point de discontinuité de première espèce.
- Si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ n'existe pas dans $\mathbb{R}$ alors on dit que a est un point de discontinuité de seconde espèce pour f .

4.3.4 Continuité sur un intervalle

Définition 4.29. Soit f définie sur un intervalle ouvert J de $\mathbb{R}$. On dit que f est continue sur J lorsque f est continue en tout point de J .

Définition 4.30. On dit que f est continue sur un segment $[a, b]$ lorsque la fonction f est continue sur $]a, b[$, continue à droite en a et continue à gauche en b . De même, on dit que f est continue sur $[a, +\infty[$ lorsque f est continue sur $]a, +\infty[$ et continue à droite en a . La continuité sur $] - \infty, a[$ se définit de façon analogue.

Théorème 4.31 (Théorème des bornes atteintes). L'image d'un intervalle fermé et borné par une fonction continue est un intervalle fermé et borné.

En particulier si f est continue sur l'intervalle $[a, b]$, alors il existe $c, d \in \mathbb{R}$ tels quel

$$f(c) \leq f(x) \leq f(d) \quad \forall x \in [a, b].$$

Notons que, la valeur $m = f(c)$ est le minimum de $f([a, b])$ et $M = f(d)$ est le maximum de $f([a, b])$. Ces valeurs sont atteintes par f .

Démonstration. Montrons que $f([a, b])$ est bornée. Pour cela supposons par l'absurde que f est continue et non bornée sur $[a, b]$.

$$\forall M > 0, \exists x \in [a, b] \text{ tel que } |f(x)| > M;$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe une suite (x_n) d'éléments de $[a, b]$ telle que $|f(x_n)| > n$. Ainsi la suite (x_n) est bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire de la suite (x_n) une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ vers $c \in [a, b]$ telle que $|f(x_{\varphi(n)})| > \varphi(n) \geq n$. Comme f est continue en $c \in [a, b]$ alors la suite $(f(x_{\varphi(n)}))$ converge vers $f(c)$. Or $|f(x_{\varphi(n)})| > n$ pour tout n , ce qui est absurde car toute suite convergente est bornée. On conclut que f est bornée sur $[a, b]$.

Soit $M = \sup f([a, b]) = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ et $m = \inf f([a, b]) = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$. Montrons qu'il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = M$. Pour cela on suppose que pour tout $x \in [a, b]$ $f(x) \neq M$ et soit g la fonction définie sur $[a, b]$ par $g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$. Puisque f est continue sur $[a, b]$ et $M - f(x) \neq 0$ pour tout $x \in [a, b]$ alors g est continue sur $[a, b]$ et $g(x) > 0$ pour tout $x \in [a, b]$. D'après la première partie de la preuve, g est bornée sur $[a, b]$. Ainsi il existe $M_1 \in \mathbb{R}_+$ tel quel

$$0 < g(x) \leq M_1, \quad \forall x \in [a, b],$$

c'est-à-dire

$$f(x) \leq M - \frac{1}{M_1}, \quad \forall x \in [a, b].$$

Ainsi $M - \frac{1}{M_1}$ est un majorant de f sur $[a, b]$ et par conséquent $M - \frac{1}{M_1} \leq M$, ce qui est absurde puisque $M_1 > 0$. D'où il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = M$.

En considérant la fonction $x \mapsto -f(x)$ sur $[a, b]$; $-f$ étant continue sur $[a, b]$ donc bornée et on a

$$\sup_{[a, b]}(-f(x)) = -\inf_{[a, b]} f(x) = -m.$$

Or d'après ce qui précède, il existe $\beta \in [a, b]$ tel que $\sup_{[a, b]}(-f(x)) = -f(\beta)$, d'où $-m = -f(\beta)$

c'est-à-dire $m = f(\beta)$. □

Remarque 4.32. La continuité sur un intervalle fermé et borné est une hypothèse essentielle dans le théorème précédent.

Exemple 4.33. .

- La fonction $x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$ est continue sur $]0, 1]$ mais n'est pas bornée sur cet intervalle. En effet soit $M > 0$, on cherche $x \in]0, 1]$ tel que $f(x) > M$.

$$\begin{cases} f(x) > M \\ x \in]0, 1] \end{cases} \iff \begin{cases} x \in]0, 1] \\ x < \frac{1}{M} \end{cases}$$

Soit δ tel que $0 < \delta \leq \min(1, \frac{1}{M})$, alors on a :

$$\forall x \in]0, \delta] \subset]0, 1], \quad x < \frac{1}{M}.$$

Donc pour tout $x \in]0, 1]$, $f(x) > M$ et par conséquent f est non bornée.

Théorème 4.34 (Théorème des valeurs intermédiaires). *L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. En particulier si f est continue sur l'intervalle $[a, b]$, alors toute valeur λ entre $f(a)$ et $f(b)$ est prise au moins une fois par la fonction f , c'est-à-dire, il existe au moins un point $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$.*

Démonstration. .

- Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et soit f une fonction continue sur I . Montrons que $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit x et y deux éléments de $f(I)$ et soit $z \in \mathbb{R}$ tel que $x < z < y$. Nous allons montrer que $z \in f(I)$.

Puisque $x \in f(I)$ il existe $\alpha \in I$ tel que $x = f(\alpha)$; de même il existe $\beta \in I$ tel que $y = f(\beta)$. Ainsi $x < z < y$ implique $z \in]f(\alpha), f(\beta)[$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe x_0 entre α et β tel que $z = f(x_0)$. Il ne nous reste qu'à montrer que $x_0 \in I$ pour déduire que $z \in f(I)$. Mais puisque x_0 est entre α et β qui sont deux éléments de I , la conclusion est évidente d'après définition d'un intervalle.

- Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et soit f une fonction numérique continue sur $[a, b]$ telle que $f(a) \neq f(b)$. Soit y un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Nous allons montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $y = f(c)$.

Supposons que $f(a) < f(b)$ (les arguments similaires à ceux ci-dessous marchent lorsque $f(a) > f(b)$) et soit $y \in]f(a), f(b)[$. On définit sur $[a, b]$ la fonction $x \mapsto g(x) = f(x) - y$; g est alors continue sur $[a, b]$. Soit $A = \{x \in [a, b], g(x) < 0\}$.

► $g(a) = f(a) - y < 0$ donc $a \in A$ et par conséquent A est une partie non vide de $\mathbb{R}$.

► De plus comme $A \subset [a, b]$, alors A est une partie majorée et non vide de $\mathbb{R}$.

Par conséquent A admet une borne supérieure $c \in \mathbb{R}$, $c = \sup A$.

► Par ailleurs pour tout $x \in A$ on a $a \leq x \leq b$ donc b est un majorant de A et par conséquent $a \leq c \leq b$.

Nous allons montrer que $g(c) = 0$.

► Supposons que $g(c) < 0$. Comme g est continue en c , alors il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in]c - \delta, c + \delta[\subset [a, b], \quad g(x) < 0.$$

En particulier $g(c + \frac{\delta}{2}) < 0$, donc $(c + \frac{\delta}{2}) \in A$ et par conséquent $c + \frac{\delta}{2} < c$ (ce qui est absurde).

► Supposons que $g(c) > 0$. Comme g est continue en c , alors il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in]c - \delta, c + \delta[\subset [a, b], \quad g(x) > 0.$$

On déduit que pour tout $x \in A$ on a : $x \in [a, c - \delta]$. Par conséquent $c - \delta$ est un majorant de A et donc $c - \delta \geq c$ (absurde)

En conclusion $g(c) = 0$, ce qui est équivalent à dire que $f(c) = y$. Ainsi il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$ pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

□

4.4 Comparaison locale d'une fonction

Dans cette section, on désigne par a un élément de $\overline{\mathbb{R}}$.

4.4.1 Fonction dominante - fonction négligeable

Définition 4.35. Soient f et g deux fonctions réelles d'une variable réelle définies sur un voisinage de a , sauf peut-être en a avec $g(x) \neq 0$ pour tout x de ce voisinage, $x \neq a$. On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a s'il existe un voisinage V de a et une application φ définie sur V sauf peut-être en a tels que :

$$\forall x \in V \setminus \{a\}, f(x) = \varphi(x)g(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0.$$

On note :

$$f(x) =_a o(g(x)) \text{ ou bien } f =_a o(g).$$

Remarque 4.36. 1. Si g est la fonction nulle ; On dira que :

$$f =_a o(0) \iff f \equiv 0 \text{ au voisinage de } a.$$

Ce qui signifie que f coïncide avec la fonction nulle dans un voisinage de a .

2. Si la fonction g ne s'annule pas dans un voisinage de a , on a :

$$f(x) =_a o(g(x)) \iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

3.

$$f =_a o(g_1) \text{ et } f =_a o(g_2) \nRightarrow g_1 = g_2 \text{ au voisinage de } a.$$

Exemple 4.37. Démontrer les affirmations suivantes :

$$\ln|x| =_0 o\left(\frac{1}{|x|}\right); \quad \ln(x) =_0 o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Définition 4.38. Soient f et g deux fonctions réelles d'une variable réelle définies sur un voisinage de a , sauf peut-être en a . On dit que f est dominée par g au voisinage de a s'il existe un voisinage V de a et une application h définie et bornée sur $V \setminus \{a\}$ telle que :

$$\forall x \in V \setminus \{a\}, f(x) = h(x)g(x).$$

On note :

$$f(x) =_a O(g(x)) \text{ ou bien } f =_a O(g).$$

Remarque 4.39. Si la fonction g ne s'annule pas au voisinage de a , alors :

$$f =_a O(g) \iff \frac{f}{g} \text{ est bornée au voisinage de } a.$$

Exemple 4.40. Démontrer les affirmations suivantes :

$$x \sin x =_1 O(x); \quad \frac{E(x)}{x-1} =_4 O\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

Proposition 4.41. 1.

$$\begin{cases} f_1 =_a O(g) \\ f_2 =_a O(g) \end{cases} \implies f_1 + f_2 =_a O(g)$$

2.

$$f =_a O(g) \implies \lambda f =_a O(g) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^*.$$

3.

$$\begin{cases} f_1 =_a O(g_1) \\ f_2 =_a O(g_2) \end{cases} \implies f_1 \times f_2 =_a O(g_1 \times g_2)$$

4. Si f et g ne s'annulent pas au voisinage de a , alors

$$f =_a O(g) \implies \frac{1}{g} =_a O\left(\frac{1}{f}\right).$$

Proposition 4.42. les affirmations suivantes sont vraies :

1.

$$x^\alpha =_{+\infty} O(x^\beta) \text{ si } \alpha < \beta.$$

2.

$$x^\alpha =_0 O(x^\beta) \text{ si } \alpha > \beta.$$

3.

$$(\ln x)^\alpha =_{+\infty} O(x^\beta) \text{ si } \alpha \text{ et } \beta \text{ appartiennent à } \mathbb{R}_+^*.$$

$$|\ln x|^\alpha =_0 O\left(\frac{1}{x^\beta}\right) \text{ si } \alpha \text{ et } \beta \text{ appartiennent à } \mathbb{R}_+^*.$$

$$(x)^\beta =_{+\infty} O(e^{\alpha x}) \text{ si } \alpha \text{ et } \beta \text{ appartiennent à } \mathbb{R}_+^*.$$

$$|x|^\beta =_{-\infty} O(e^{-\alpha x}) \text{ si } \alpha \text{ et } \beta \text{ appartiennent à } \mathbb{R}_+^*.$$

4.4.2 Fonctions équivalentes

Soit $a \in \mathbb{R}$, f et g deux fonctions réelles d'une variable réelle définies sur un voisinage de a , sauf peut-être en a .

Définition 4.43. On dit que f et g sont équivalentes quand x tend vers a , s'il existe un voisinage V de a et une application h définie sur $V \setminus \{a\}$ telle que :

$$\forall x \in V \setminus \{a\}, f(x) = h(x)g(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} h(x) = 1.$$

On note $f \sim_a g$ ou bien $f(x) \sim_a g(x)$.

Remarque 4.44. 1. $f \sim_a 0 \iff f \equiv 0$ au voisinage de a .

2. Si la fonction g ne s'annule pas au voisinage de a , on a :

$$f \sim_a g \iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Exemple 4.45. Montrer que les fonctions suivantes sont équivalentes au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = x^3 + 2x^2 + 5x \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g(x) = x^3 + 5x \end{aligned}$$

Exemple 4.46. On considère la fonction h définie par :

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto h(x) = \frac{\sqrt{1+3x^4}-2}{x^2-1} . \end{aligned}$$

Montrer que $h \sim_1 \frac{3}{2}$.

Définition 4.47. Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle de la forme $]a, +\infty[$, $a \in \mathbb{R}$ (respectivement $] -\infty, a[$, $a \in \mathbb{R}$). On dit que f et g sont équivalentes quand x tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$), lorsque

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \text{ (respectivement } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1).$$

On note $f \sim_{+\infty} g$ (respectivement $f \sim_{-\infty} g$).

Exemple 4.48. Montrer que les fonctions suivantes sont équivalentes au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = x^3 + 2x^2 + 5x \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g(x) = x^3 + 5x \end{aligned}$$

Proposition 4.49. Toute fonction polynôme est équivalente à son terme de plus bas degré au voisinage de 0 et à son terme de plus haut degré au voisinage de l'infini.

Proposition 4.50. Soient f_1, g_1, f_2 et g_2 des fonctions définies sur un voisinage de a sauf peut-être en a . Si $f_1 \sim_a g_1$ et $f_2 \sim_a g_2$ alors :

$$f_1 f_2 \sim_a g_1 g_2 \text{ et } \frac{f_1}{f_2} \sim_a \frac{g_1}{g_2}.$$

Remarque 4.51. Ces propriétés restent vraies si on remplace a par $+\infty$ ou $-\infty$. Cependant, si $f_1 \sim_a g_1$ et $f_2 \sim_a g_2$, on ne peut rien dire concernant les fonctions $f_1 + f_2$ et $g_1 + g_2$.

4.4.3 Continuité et Monotonie

Définition 4.52. Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ et soit $f : A \longrightarrow B$ une fonction.

1. f est dite croissante (resp. strictement croissante) si $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$ (resp. $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$).
2. f est dite décroissante (resp. strictement décroissante) si $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$ (resp. $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$).
3. Les fonctions croissantes ou décroissantes sont dites monotones.

Proposition 4.53. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est strictement monotone si et seulement si f est injective

Démonstration. • Il résulte immédiatement que tout fonction strictement monotone est injective.

- Réciproquement si f est continue et injective alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout $u, v, w \in I$ avec $u < v < w$ on a $f(v)$ qui se trouve entre $f(u)$ et $f(w)$

□

La fonction réciproque de toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle est strictement monotone. Plus précisément on a le résultat suivant :

Proposition 4.54. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone. Posons $J = f(I)$. Alors $f^{-1} : J \rightarrow I$ est continue et strictement monotone.

4.5 Dérivée et Fonction dérivée d'une fonction d'une variable

4.5.1 Définition

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dont le domaine de définition est D_f et soit $a \in D_f$. On dit que f est dérivable en a si la limite

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

existe (dans $\mathbb{R}$). On note alors $f'(a)$ cette limite.

Si f est dérivable en a le nombre $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est appelé **nombre dérivé** de f au point a .

On note également $f'(a) = \frac{df}{dx}(a)$.

4.5.2 Dérivabilité à gauche et à droite en un point

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dont le domaine de définition est D_f et soit $a \in D_f$. Si

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

existe et est finie, alors on dit que f est dérivable à droite au point a . Cette limite est notée parfois $f'_+(a)$ et est appelée nombre dérivé à droite de f . Ainsi on a

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \in \mathbb{R}.$$

On définit d'une manière analogue la dérivée à gauche :

$$f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \in \mathbb{R}.$$

4.5.3 Interprétation géométrique du nombre dérivé

Si f est dérivable au point a , le nombre dérivé de f au point a noté $f'(a)$ donne la pente de la tangente au point de coordonnées $(a, f(a))$ au graphe de f . Ainsi si f est dérivable au point a , alors une équation cartésienne de la tangente au point $(a, f(a))$ appartenant à la courbe représentative de la fonction f est :

$$T_{(a, f(a))} : y = (x - a)f'(a) + f(a).$$

Remarque 4.55. 1. Si f est dérivable à droite au point a , alors une équation cartésienne de la demi-tangente à la courbe représentative de f au point $(a, f(a))$ est :

$$T_{(a, f(a))}^d : y = (x - a)f'_+(a) + f(a).$$

2. De même, si f est dérivable à gauche au point a alors une équation cartésienne de la demi-tangente à la courbe représentative de f au point $(a, f(a))$ est :

$$T_{(a, f(a))}^g : y = (x - a)f'_-(a) + f(a).$$

Proposition 4.56. Soit f une fonction numérique de variable réelle. f est dérivable au point a si et seulement si f est dérivable à gauche au point a , f est dérivable à droite au point a et on a $f'_-(a) = f'_+(a)$. Autrement dit

$$(f \text{ est dérivable au point } a) \iff (f \text{ est dérivable à gauche et à droite du point } a \text{ et } f'_-(a) = f'_+(a)).$$

Démonstration. Facile à démontrer. □

Proposition 4.57. Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dont le domaine de définition est D_f et soit $a \in D_f$. Si f est dérivable en a alors f est continue en a .

Démonstration. Soit $l = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}$. Comme la fonction $x \mapsto x$ est continue en a , on a $\lim_{x \rightarrow a} (x - a) = 0$. D'où en utilisant la propriété des limites relative au produit on a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) &= \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right] \times \lim_{x \rightarrow a} (x - a) \\ &= l \times 0 \\ &= 0 \quad (\text{car } l \text{ est un nombre réel}). \end{aligned}$$

On déduit alors que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ et par suite f est continue en a . □

Remarque 4.58. 1. La réciproque de cette proposition n'est pas toujours vraie. Par exemple la fonction $x \mapsto f(x) = |x|$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

2. Il existe des fonctions continues qui ne sont pas dérivables en aucun point de leur domaine de définition.

Proposition 4.59. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction admettant un extremum local en a . Si f est dérivable en a alors $f'(a) = 0$.

Démonstration. Supposons que l'extremum local soit un maximum (le cas d'un minimum se traite de la même manière en remplaçant dans les lignes suivantes f par $-f$). Alors (par définition d'extremum local) il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que :

$$\text{pour tout } x \in I \cap D_f, \text{ on a : } f(x) \leq f(a).$$

- Si $x > a$ on a $x - a > 0$ et $f(x) - f(a) \leq 0$. Donc $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$ et par passage à la limite, on obtient $f'(a) \leq 0$.
- Si $x < a$ on a $x - a < 0$ et $f(x) - f(a) \leq 0$. Donc $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$ et par passage à la limite, on obtient $f'(a) \geq 0$.

En combinant les deux inégalités on déduit que $f'(a) = 0$. □

Remarque 4.60. La réciproque de cette proposition n'est pas vraie. Prenons le cas de la fonction $x \mapsto f(x) = x^3$, on a $f'(0) = 0$ mais 0 n'est pas un extremum local pour f .

4.5.4 Fonction dérivée

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dont le domaine de définition est D_f . Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $I \subset D_f$. On dit que f est dérivable sur I lorsque f est dérivable en tout point de I .

Si f est dérivable sur I , on définit sa fonction dérivée f' par

$$\begin{aligned} f' : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x) \end{aligned}$$

4.5.5 Dérivées successives-Classe d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle non vide I de $\mathbb{R}$.

- Si f est dérivable sur I et si $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en un point c alors on note : $f''(c) = (f')'(c)$ ou $\frac{d^2 f}{dx^2}(c)$. Le nombre $f''(c)$ est appelé **dérivée seconde de f au point c** .
- Si f est dérivable sur I et si $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur I , on dit que f est deux fois dérivable sur I et on pose $f'' = (f')'$, **la fonction dérivée seconde de f sur I** .
Si f'' est dérivable sur I , la fonction dérivée d'ordre 3 de f sur I est notée f''' ou $f^{(3)}$ telle que $f''' = f^{(3)} = (f'')'$. De proche en proche, soit $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle fonction dérivée d'ordre n de la fonction f sur I , la fonction notée $f^{(n)}$ telle que : $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.
- Si f est dérivable sur I et si f' est continue sur I alors on dit que f est de **classe C^1 sur I** . On note par $C^1(I)$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I dont les dérivées premières sont continues sur I .
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f est dite de classe C^n sur I si f est n fois dérivable sur I et si $f^{(n)}$ est continue sur I . On écrira dans ce cas : $f \in C^n(I)$.

Proposition 4.61. Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

1. Si f et g sont deux fonctions dérivables sur I , alors les fonctions $f + g$ et fg sont dérivables sur I et on a :

$$(f + g)' = f' + g' \text{ et } (fg)' = f'g + g'f.$$

2. Si f ne s'annule pas sur I , alors la fonction $\frac{1}{f}$ est dérivable sur I et on a :

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}.$$

3. Si f et g sont deux fonctions dérivables sur I et si g ne s'annule pas sur I alors $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et on a :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}, \quad \forall x \in I.$$

Démonstration. • Pour la formule de la dérivée d'une somme de fonction, on la déduit aisément en utilisant le résultat concernant l'addition de limites finies. Plus précisément, pour tout point $a \in I$, on a la décomposition suivante :

$$\begin{aligned} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(a)}{x - a} &= \frac{f(x) + g(x) - f(a) - g(a)}{x - a} \\ &= \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \end{aligned}$$

Par passage à la limite on déduit le résultat espéré.

- Pour le produit, on écrit

$$\frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} = \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) g(x) + \left(\frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) f(a).$$

La fonction g étant dérivable au point a , alors g est continue en a et on a : $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$.

Par ailleurs, puisque f est dérivable en a on a :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \in \mathbb{R} \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a) \in \mathbb{R}.$$

En utilisant les propriétés des limites de produit et de sommes on déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} = f'(a)g(a) + g'(a)f(a), \text{ pour tout point } a \in I.$$

- Pour l'inverse, on écrit :

$$\frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)}}{x - a} = -\frac{1}{f(x)} \times \frac{1}{f(a)} \times \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

qui a un sens si $|x - a|$ est assez petit. Quand x tend vers a , alors $f(x)$ tend $f(a)$ (puisque f est continue) et $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ tend vers $f'(a)$. On obtient alors la formule désirée, c'est-à-dire :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)}}{x - a} = -\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{f(x)} \times \frac{1}{f(a)} \times \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) = -\frac{f'(a)}{[f(a)]^2}.$$

- La formule de la dérivation du quotient de deux fonctions se déduit aisément en utilisant les formules de dérivation de l'inverse d'une fonction et le produit de deux fonctions, car $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$.

□

Proposition 4.62 (Dérivation de la composée de deux fonctions dérivables). Soient $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(A) \subset B$. Si f est dérivable en $a \in A$ et g est dérivable en $f(a) \in B$, alors la composée $g \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en a et on a :

$$(g \circ f)'(a) = g'[f(a)] \times f'(a).$$

Démonstration. Par définition de la dérivée on a :

$$(g \circ f)'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g[f(x)] - g[f(a)]}{x - a}.$$

On suppose, pour simplifier, qu'il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que $f(x) \neq f(a)$, pour tout $x \in (I \cap A) \setminus \{a\}$. On peut écrire alors :

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g[f(x)] - g[f(a)]}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left[\left(\frac{g[f(x)] - g[f(a)]}{f(x) - f(a)} \right) \times \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{g[f(x)] - g[f(a)]}{f(x) - f(a)} \right) \times \left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right). \end{aligned}$$

La première limite est la composée des fonctions $x \mapsto f(x)$ et $y \mapsto \frac{g(y)-g[f(a)]}{y-f(a)}$. Comme f est continue en a , alors $f(x)$ tend vers $f(a)$. La fonction g étant dérivable en $f(a)$ on a :

$$\lim_{y \rightarrow f(a)} \frac{g(y) - g[f(a)]}{y - f(a)} = g'[f(a)].$$

On déduit alors (par composition) que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g[f(x)] - g[f(a)]}{f(x) - f(a)} = g'[f(a)]$$

et la formule de la dérivée de la composée de deux fonctions dérivables s'en suit. $\square$

Proposition 4.63 (Dérivation de la fonction réciproque). *Soit $f : A \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe une fonction réciproque $g : B \rightarrow A$, c'est-à-dire que :*

$$g[f(x)] = x \quad \forall x \in A \quad \text{et} \quad f[g(y)] = y \quad \forall y \in B.$$

Si f est dérivable au point a et si $f'(a) \neq 0$, alors g est dérivable au point $f(a)$ et on a :

$$(f^{-1})'[f(a)] = g'[f(a)] = \frac{1}{f'(a)}.$$

Démonstration. Admettons l'existence du nombre $g'[f(a)]$. On sait que pour tout $x \in A$ on a : $g[f(x)] = x$. En appliquant la formule relative à la dérivée de la composée de deux fonctions dérivables, on obtient (par dérivation membre à membre de l'égalité $g[f(x)] = x$) :

$$1 = (g \circ f)'(a) = g'[f(a)] \times f'(a),$$

et la formule s'en déduit. $\square$

Remarque 4.64. *En posant dans la formule précédente $b = f(a)$, c'est-à-dire $a = f^{-1}(b) = g(b)$, on a :*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'[f^{-1}(b)]},$$

en tout point $b \in B$ tel que $f'[f^{-1}(b)] \neq 0$.

4.5.6 Fonctions dérivées usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	Condition sur x
$f(x) = a$, a constante réelle	$f'(x) = 0$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = ax$, a constante réelle non nulle	$f'(x) = a$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = ax^n$, a constante réelle et $n \in \mathbb{N}^*$	$f'(x) = nax^{n-1}$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{a}{x}$, a constante réelle non nulle	$f'(x) = \frac{-a}{x^2}$	$x \in \mathbb{R}^*$
$f(x) = \frac{a}{x^n}$, a réelle non nulle et $n \in \mathbb{N}^*$	$f'(x) = \frac{-a}{x^{n+1}}$	$x \in \mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{ax+b}$	$f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$	$ax+b > 0$
$f(x) = \sqrt{u(x)}$	$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	$u(x) > 0$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \sin(u(x))$	$f'(x) = u'(x) \cos(u(x))$	$u(x)$ existe
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \cos(u(x))$	$f'(x) = -u'(x) \sin(u(x))$	$u(x)$ existe
$f(x) = \exp x$	$f'(x) = \exp(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \exp(u(x))$	$f'(x) = u'(x) \exp(u(x))$	$u(x)$ existe
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = 1/x$	$x > 0$
$f(x) = \ln(u(x))$	$f'(x) = u'(x)/u(x)$	$u(x) > 0$

4.5.7 Règles de dérivation

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I de dérivées respectives u' et v' . On a :

$f(x)$	$f'(x)$
$f(x) = u(x) + v(x)$	$f'(x) = u'(x) + v'(x)$
$f(x) = au(x)$, a constante réelle	$f'(x) = au'(x)$
$f(x) = u(x) \cdot v(x)$	$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
$f(x) = \frac{1}{u(x)}$, $u(x) \neq 0$	$f'(x) = \frac{-u'(x)}{[u(x)]^2}$
$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$	$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$
$f(x) = [u(x)]^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $n \neq 1$	$f'(x) = n u'(x) \cdot [u(x)]^{n-1}$
$f(x) = \frac{a}{[u(x)]^n}$, $u(x) \neq 0$, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $n \neq 1$	$f'(x) = \frac{-n a u'(x)}{[u(x)]^{n+1}}$

Proposition 4.65. Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$ et toute fonction rationnelle est dérivable sur son domaine de définition.

Exemple 4.66. Dans chacun des cas suivants, calculer $f'(x)$ après avoir précisé le domaine de dérivabilité.

$$\begin{array}{ll}
 f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\
 x \longmapsto -3x^3 + x^2 - 5 ; & x \longmapsto \frac{x+1}{x^2+5} \\
 h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\
 x \longmapsto \frac{\sqrt{x+1}}{x^2} ; & x \longmapsto \sin(x^2+1) .
 \end{array}$$

4.5.8 Différentielle d'une fonction d'une variable

Définition 4.67. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I , de dérivée f' , x_0 un élément de I . Pour de petites variations Δx de x à partir de x_0 , on a la relation $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Lorsque Δx est un accroissement infiniment petit de x , il est noté dx . La différentielle de la fonction f en x_0 est $\Delta x \cdot f'(x_0)$ et se note df_{x_0} .

$$df_{x_0} = \Delta x \cdot f'(x_0) = dx \cdot f'(x_0).$$

Remarque 4.68. $\Delta f = \Delta y$ et $df = dy$ sont deux grandeurs différentes.

Exemple 4.69. Calculer la différentielle de chacune des fonctions suivantes :

$$y = \sin x; \quad y = \sqrt{x}.$$

De la définition de la différentielle d'une fonction f , on déduit la notation différentielle de la dérivée :

$$f'(x) = \frac{df}{dx}.$$

Théorème 4.70. Si $f'(x_0) \neq 0$, Δy et dy sont équivalents quand Δx tend vers 0.

La différentielle dy réalise une approximation de la variation de la variation Δy de la fonction f lorsque Δx est assez petit. On a l'approximation :

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) \simeq f'(x) dx.$$

Exemple 4.71. Comparer Δy et dy pour $y = f(x) = x^2$.

Proposition 4.72. Soient les fonctions différentiables f et g de différentielles :

$$df = f'(x)dx \quad \text{et} \quad dg = g'(x)dx.$$

On a :

1. $d(f + g) = df + dg$;
2. $d(\lambda f) = \lambda df$, pour tout nombre réel λ ;
3. $d(f \cdot g) = g \cdot df + f \cdot dg$;
4. $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \cdot df - f \cdot dg}{g^2}$ pour tout x tel que $g(x) \neq 0$;

4.5.9 Différentielle logarithmique

Définition 4.73. Soit f une fonction différentiable sur un intervalle I telle qu'en tout $x \in I$ on ait $f(x) \neq 0$. La fonction $\ln f$ est donc différentiable sur I . on appelle différentielle logarithmique de la fonction f , la différentielle de la fonction $\ln f$. On a donc :

$$d(\ln f) = \frac{df}{f}.$$

Exemple 4.74. Calculer la différentielle logarithmique des fonctions f et g définies par :

$$f(x) = 2x + 1; \quad g(x) = \exp(\sin x)$$

Proposition 4.75. Soient les fonctions différentiables f et g de différentielles avec $f(x) \neq 0$ et $g(x) \neq 0$ de différentielles logarithmiques :

$$d(\ln f) = \frac{df}{f} \quad \text{et} \quad d(\ln g) = \frac{dg}{g}.$$

On a :

$$1. d(\ln f \cdot g) = d(\ln f) + d(\ln g); \text{ c'est-à-dire : } \frac{d(f \cdot g)}{f \cdot g} = \frac{df}{f} + \frac{dg}{g}.$$

$$2. d(\ln \frac{f}{g}) = d(\ln f) - d(\ln g); \text{ c'est-à-dire : } \frac{d(\frac{f}{g})}{\frac{f}{g}} = \frac{df}{f} - \frac{dg}{g}.$$

Théorème 4.76. Si Δx est assez petit, la différentielle logarithmique $\frac{dy}{y}$ réalise une approximation de la variation de la variation relative $\frac{\Delta y}{y}$ lorsque x varie de Δx .

Exemple 4.77. Comparer $\frac{\Delta y}{y}$ et $\frac{dy}{y}$ pour $y = f(x) = x^2 + 1$.

4.5.10 Propriétés des fonctions dérivables

Théorème 4.78 (Théorème de Rolle). Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et si $f(a) = f(b)$, alors il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration. Comme la fonction f est continue sur le segment $[a, b]$ alors d'après le théorème de la borne atteinte, f possède un maximum et un minimum. On désigne par $M = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$ et $m = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$. Si $m \neq f(a)$ ou $M \neq f(a)$ alors il existe un $c \in]a, b[$ tel que f possède un extremum en c (théorème de la borne atteinte). Par conséquent on a : $f'(c) = 0$. Sinon on a : $m = f(a) = f(b)$ et $M = f(a) = f(b)$ et par conséquent f est constante sur $[a, b]$. D'où $f'(c) = 0$ pour tout $c \in]a, b[$. $\square$

Une conséquence du Théorème de Rolle est le

Théorème 4.79 (Théorème des accroissements finis). 1. Soit a et b deux réels tels que $a < b$, et soit f une fonction réelle continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

2. Plus généralement, si f et g sont deux fonctions continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$ et si pour tout $x \in]a, b[$, $g'(x) \neq 0$, alors il existe au moins un réel $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Démonstration. • On introduit la fonction auxiliaire

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - (x - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Cette fonction vérifie les hypothèses du théorème de Rolle, à savoir :

$$(a) \quad \varphi(a) = \varphi(b) = 0,$$

(b) φ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ (à cause des hypothèses faites sur la fonction f)

On déduit alors (d'après le théorème de Rolle) l'existence d'un $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Comme

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

on obtient bien la formule annoncée en posant $x = c$.

• On pose

$$\phi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)]$$

et on applique le théorème de Rolle à ϕ . □

Une autre conséquence du Théorème de Rolle est la proposition suivante :

Proposition 4.80. Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues et dérivables en tout point de $]a, b[$. Si pour tout $x \in]a, b[$, $f'(x) = g'(x)$ alors il existe un $C \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = g(x) + C$ pour tout $x \in]a, b[$.

Démonstration. On pose $h = f - g$ définie sur $[a, b]$. Soient $x, y \in]a, b[$ quelconques et on suppose que (sans perdre de vue la généralité) que $x < y$; h est continue sur $]x, y[\subset]a, b[$ et dérivable sur $]a, b[$. En utilisant le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x, y[$ tel que $h(y) - h(x) = h'(c)(y - x)$. Or $h'(c) = 0$ (car $h'(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$), donc $h(y) = h(x)$, c'est-à-dire que h est constante. □

Le résultat suivant est très utilisé pour le calcul de limites.

Théorème 4.81 (Règle de l'Hospital I). Soient f et g deux fonctions définies sur $I =]a - h, a + h[\setminus \{a\}$, $a \in \mathbb{R}$ et soit $L \in \overline{\mathbb{R}}$. Si f et g sont dérivables sur I et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ et si, pour tout $x \in I$, $g'(x) \neq 0$ alors

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ existe et vaut } L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ existe et vaut } L$$

Démonstration. On applique la formule généralisée des accroissements finis □

La règle de l'Hospital est valable lorsque $a = \pm\infty$. Lorsque la fonction g tends vers l'infini et f n'est pas localement bornée, on a la version suivante :

Théorème 4.82 (Règle de l'Hospital II). Soient f et g deux fonctions continues définies sur $I =]a - h, a + h[\setminus \{a\}$, $a \in \mathbb{R}$ (ou au voisinage de $\pm\infty$ si $a = \pm\infty$) et soit $L \in \overline{\mathbb{R}}$. Si f et g sont dérivables sur I , $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ et si, pour tout $x \in I$, $g'(x) \neq 0$ alors

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ existe et vaut } L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ existe et vaut } L$$

4.5.11 Exercices

Exercice

Appliquer le théorème des accroissements finis pour calculer un majorant de l'erreur commise quand on remplace $\sqrt{10001}$ par 100.

Exercice

En appliquant le théorème de Rolle, montrer que $f(x) = x^n + px + q$ ne peut avoir plus de deux racines réelles si n est pair et plus de 3 racines réelles si n est impair.

Exercice

1. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$ telles que $f(a) = g(a)$ et $f(b) = g(b)$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel quel $f'(c) = g'(c)$.
2. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$ telles que $f(a) = g(a)$ et $\forall x \in]a, b[, f'(x) < g'(x)$. Montrer que pour tout $x \in]a, b[, on a : f(x) < g(x)$.

Exercice

Calculer les limites suivantes :

$$\begin{aligned} (a) \lim_{x \rightarrow e} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{e}}{\ln x - 1} & \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} & \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3}. \\ (d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1 - \alpha x}{x^2} & \quad (e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x^2)}{x^4} & \quad (f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x^2)}{x^3 \sin x}. \end{aligned}$$

4.5.12 Lien entre la dérivée et la monotonie

Proposition 4.83. Soit $I =]a, b[$, avec $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ et soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et dérivable sur $]a, b[$.

1. f est constante sur I si et seulement si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$.
2. f est croissante (resp. décroissante) si et seulement si $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$) pour tout $x \in I$.
3. Si $\forall x \in I, f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I .
4. Si $\forall x \in I, f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur I .

Démonstration. • Si f est constante sur I alors sa dérivée est nulle. Réciproquement, soient $x, y \in [a, b]$ avec $x < y$. En appliquant le théorème des accroissements finis sur $[x, y]$, on déduit l'existence de $c \in]x, y[$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$. On déduit que si f' est nulle sur I alors $f(y) = f(x)$ pour tous $x, y \in [a, b]$ et par conséquent f est constante.

- Si f est croissante, on a $f(x) \geq f(a)$ pour $x > a$ et alors $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$. De même si $x < a$ alors on a : $f(x) \leq f(a)$ et $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$. Par passage à la limite on déduit que $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$. Réciproquement, on procède comme dans la première partie : on obtient $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$. On déduit que $f(y) - f(x) \geq 0$ si $y > x$ et $f(y) - f(x) \leq 0$ si $y < x$. Par suite f est croissante.
- La suite de la démonstration est analogue au deuxième point avec des inégalités strictes.

□

Remarque 4.84. La réciproque de point 3 de la proposition n'est toujours pas vraie. Comme contre-exemple on prend la fonction $x \mapsto x^3$ qui est strictement croissante alors que sa fonction dérivée $f'(x) = 3x^2$ s'annule en $x = 0$.

Théorème 4.85 (Théorème du point fixe). Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur A . On suppose qu'il existe un point fixe $l \in A$ pour la fonction f , c'est-à-dire un point l tel que $f(l) = l$, et qu'il existe un intervalle $I = [l - a, l + a]$ et un réel $\lambda < 1$ tels que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq \lambda$.

Alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in I$ et la formule de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers l .

Démonstration. On pose $v_n = u_n - l$. Il suffira de montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. Nous allons d'abord montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$. Par hypothèse $u_0 \in I$, donc la propriété à montrer est vraie pour $n = 0$. Supposons maintenant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$ et montrons que $u_{n+1} \in I$. En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction f à l'intervalle $[u_n, l]$ si $u_n \leq l$ (ou bien à l'intervalle $[l, u_n]$ si $u_n > l$), on déduit l'existence de $c \in]u_n, l[$ (ou bien $c \in]l, u_n[$) tel que

$$f'(c) = \frac{f(u_n) - f(l)}{u_n - l} = \frac{u_{n+1} - l}{u_n - l}.$$

Comme $]u_n, l[\subset I$ (ou bien $]l, u_n[\subset I$) alors $|f'(c)| \leq \lambda$. On déduit que

$$\frac{|v_{n+1}|}{|v_n|} \leq \lambda < 1. \quad (4.5.1)$$

On déduit que $|v_{n+1}| < |v_n|$, c'est-à-dire $u_{n+1} \in I$.

Par itération de la relation (4.5.1), on trouve

$$|v_{n+1}| \leq \lambda |v_n| \leq \lambda^2 |v_{n-1}| \leq \dots \leq \lambda^{n+1} |v_0|.$$

Enfin, puisque $\lambda \in [0, 1[$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda^n = 0$ et par conséquent la suite (v_n) tend vers 0.

□

4.6 Fonctions inverses : Quelques rappels

Théorème 4.86. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue strictement monotone. Alors f réalise une bijection de $[a, b]$ sur $f([a, b])$. On a $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$ dans le cas où f est strictement croissante sur $[a, b]$ et $f([a, b]) = [f(b), f(a)]$ si f est strictement décroissante sur $[a, b]$.

Théorème 4.87. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue et strictement monotone. La réciproque notée f^{-1} de f est une application continue strictement monotone sur $f([a, b])$: f^{-1} a le même sens de variation que f . Ainsi f^{-1} est strictement croissante sur $[f(a), f(b)]$ dans le cas où f est strictement croissante sur $[a, b]$ et f^{-1} est strictement décroissante sur $[f(b), f(a)]$ si f est strictement décroissante sur $[a, b]$.

Théorème 4.88. Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les courbes représentatives (γ) et (γ') de f et f^{-1} respectivement sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$ (la première bissectrice).

4.7 Fonctions inverses de quelques fonctions usuelles

4.7.1 Fonction Arcsin

$$\text{Soit } f : \begin{array}{ccc} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin x \end{array}$$

La fonction $x \mapsto \sin x$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f est continue et dérivable sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ on a : $f'(x) = \cos x$. De plus $f'(x) \geq 0$ et $f'(x) = 0$ si et seulement si $x \in \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$. Donc f est strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Au total f est continue et strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, elle réalise donc une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $f([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = [f(-\frac{\pi}{2}), f(\frac{\pi}{2})] = [-1, 1]$.

Définition

La bijection réciproque f^{-1} de f est appelée **fonction Arc-sinus** et on a :

$$f : \begin{array}{ccc} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \rightarrow & [-1, 1] \\ x & \mapsto & \sin x \end{array}$$

et

$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} [-1, 1] & \rightarrow & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ x & \mapsto & \text{Arcsin } x \end{array}$$

Donc

$$y = \text{Arcsin } x \iff \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \\ \text{et } x = \sin y \end{cases}$$

Remarque

On a $\text{Arcsin } x : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $|x| \leq 1 \iff |-x| \leq 1$; soit $z = \text{Arcsin } (-x)$ alors $-x = \sin z$ c'est-à-dire $x = -\sin z = \sin(-z)$. Donc $-z = \text{Arcsin } x$ et $z = -\text{Arcsin } x$. Au total la fonction $x \mapsto \text{Arcsin } x$ est une fonction impaire.

Rappel

Soit $f : I \rightarrow J$ une fonction continue et strictement monotone (f réalise une bijection de I sur J). On a : $f : I \rightarrow J$ et $f^{-1} : J \rightarrow I$. Soit $y_0 \in J$ et soit $x_0 \in I$ tels que $f(x_0) = y_0$. Etudions la dérivabilité de f^{-1} au point y_0 ; il s'agit d'étudier la limite $\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$.

Posons $f^{-1}(y) = x$ et $f^{-1}(y_0) = x_0$ c'est-à-dire $f(x) = y$ et $f(x_0) = y_0$; lorsque y tend vers y_0 , f^{-1} étant continue sur J , alors $f^{-1}(y)$ tend vers $f^{-1}(y_0)$, c'est-à-dire x tend vers x_0 . Ainsi on a :

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \end{aligned}$$

On déduit donc :

- Si f est dérivable en x_0 et si $f'(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en y_0 et $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty$ alors f^{-1} est dérivable en y_0 et $(f^{-1})'(y_0) = 0$.

Corollaire 4.89. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone. On pose $f(I) = J$; si f est dérivable sur I et si pour tout $x \in I$, $f'(x) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable sur J et de fonction dérivée :

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}.$$

Application

Considérons la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \rightarrow & [-1, 1] \\ x & \mapsto & \sin x \end{array}$$

On a :

$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} [-1, 1] & \rightarrow & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ x & \mapsto & \text{Arcsin } x \end{array}$$

La fonction $x \mapsto \sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de fonction dérivée la fonction $x \mapsto \cos x$, donc la fonction f est dérivable sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et pour tout $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ on a : $f'(x) = \cos x$. De plus $f'(x) = 0$ si et seulement si $x \in \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$ et $f(-\frac{\pi}{2}) = -1$, $f(\frac{\pi}{2}) = 1$. On déduit que $x \mapsto \text{Arcsin } x$ est dérivable sur $] -1, 1[$ de fonction dérivée $x \mapsto \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$.

Posons $f^{-1}(x) = y$ avec $x \in] -1, 1[$ et $y \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, c'est-à-dire $\sin y = x$. On a alors

$$\frac{1}{f'[f^{-1}(x)]} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{\cos y}$$

$$\cos^2 y + \sin^2 y = 1 \implies \cos^2 y = 1 - \sin^2 y = 1 - x^2$$

De plus

$$x \in] -1, 1[\implies y = f^{-1}(x) \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\text{ et } \cos y > 0,$$

donc

$$\cos^2 y = 1 - x^2 \implies \cos y = \sqrt{1 - x^2}.$$

Au total la fonction $x \mapsto \text{Arcsin } x$ est dérivable sur $] -1, 1[$ de fonction dérivée $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

$$(\text{Arcsin } x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \forall x \in] -1, 1[$$

4.7.2 Fonction Arccos

Soit $f : \begin{array}{ccc} [0, \pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos x \end{array}$; la fonction $x \mapsto \cos x$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f est continue et dérivable sur $[0, \pi]$ et pour tout $x \in [0, \pi]$ on a : $f'(x) = -\sin x$. De plus $f'(x) \leq 0$ et $f'(x) = 0$ si et seulement si $x \in \{0, \pi\}$. Par conséquent f est strictement décroissante sur $[0, \pi]$.

Au total f est continue et strictement décroissante sur $[0, \pi]$; f réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $f([0, \pi]) = \text{et } f([0, \pi]) = [f(\pi), f(0)] = [-1, 1]$.

Définition

La réciproque f^{-1} de f est la fonction $x \mapsto \text{Arcos } x$, appelée **fonction Arc-cosinus**. On a :

$$f : \begin{array}{ccc} [0, \pi] & \longrightarrow & [-1, 1] \\ x & \longmapsto & \cos x \end{array}$$

et

$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} [-1, 1] & \longrightarrow & [0, \pi] \\ x & \longmapsto & \text{Arcos } x \end{array}$$

$$y = \text{Arcos } x \iff \begin{cases} 0 \leq y \leq \pi \\ \text{et } x = \cos y \end{cases}$$

Fonction dérivée

f est dérivable sur $[0, \pi]$ et pour tout $x \in [0, \pi]$ $f'(x) = -\sin x$; $f'(x) = 0$ si et seulement si $x \in \{0, \pi\}$ et $f(0) = 1$, $f(\pi) = -1$. On déduit que la fonction $x \mapsto \text{Arcos } x$ est dérivable sur $] -1, 1[$ de fonction dérivée $x \mapsto \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$.

En posant $f^{-1}(x) = y$ c'est-à-dire $\cos y = x$, avec $x \in] -1, 1[$ et $y \in]0, \pi[$, on a :

$$\frac{1}{f'[f^{-1}(x)]} = \frac{1}{f'(y)} = -\frac{1}{\sin y}.$$

De plus

$$\sin^2 y = 1 - \cos^2 y = 1 - x^2$$

et pour tout $x \in] -1, 1[$ $y = f^{-1}(x) \in]0, \pi[$ donc $\sin y > 0$ et $\sin y = \sqrt{1 - x^2}$. On a donc :

$$x \mapsto \text{Arcos } x \text{ est dérivable sur }] -1, 1[\text{ de fonction dérivée } x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$$(\text{Arcos } x)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \text{pour tout } x \in] -1, 1[.$$

Remarque

Soit $y \in \mathbb{R}$ tel que $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - y \leq \frac{\pi}{2}$ c'est-à-dire $0 \leq y \leq \pi$. On a $\sin(\frac{\pi}{2} - y) = \cos y$. Posons $\cos y = x$, alors on a $\sin(\frac{\pi}{2} - y) = x$, ce qui implique que $\frac{\pi}{2} - y = \text{Arcsin } x$ et $y = \text{Arcos } x$. On a donc $\frac{\pi}{2} - \text{Arcos } x = \text{Arcsin } x$, c'est-à-dire

$$\text{Arcsin } x + \text{Arcos } x = \frac{\pi}{2} \text{ pour tout } x \in [-1, 1].$$

4.7.3 Fonction Arctangente

Soit $f :] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$; f est continue et dérivable sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ de fonction dérivée la fonction $x \mapsto 1 + \tan^2 x$. Donc pour tout $x \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ $f'(x) > 0$ et f est strictement croissante sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. En conclusion f est continue et strictement croissante sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et f réalise une bijection de $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $f(] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) =] \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} f(x), \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x)[=] -\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

Définition

La réciproque f^{-1} de f est la fonction $x \mapsto \operatorname{Arctan} x$, appelée **fonction arctangente**. On a

$$f : \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \cos x$$

et

$$f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\\ x \longmapsto \operatorname{Arctan} x$$

$$y = \operatorname{Arctan} x \iff \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \\ \text{et } x = \tan y \end{cases}$$

Fonction dérivée

f est dérivable sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ et pour tout $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ $f'(x) = 1 + \tan^2 x$; $f'(x) \neq 0$. On déduit que la fonction $x \mapsto \operatorname{Arctan} x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de fonction dérivée $x \mapsto \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$.

En posant $f^{-1}(x) = y$ c'est-à-dire $\tan y = x$, avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, on a :

$$\frac{1}{f'[f^{-1}(x)]} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Ainsi $x \mapsto \operatorname{Arctan} x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de fonction dérivée $x \mapsto \frac{1}{1 + x^2}$.

$$(\operatorname{Arctan} x)' = \frac{1}{1 + x^2}, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

4.7.4 Exercices**Exercice**

1. Déterminer une écriture plus simple de

$$f(x) = \cos(\operatorname{Arcsin} x) + \sin(3\operatorname{Arcsin} x) \text{ et } g(x) = \operatorname{Arcos} x + \operatorname{Arcsin} x,$$

pour tout $x \in [-1, 1]$.

2. Résoudre l'équation en x suivante : $\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arcsin}(x\sqrt{3}) = \operatorname{Arcsin}(2x)$.

3. Trouver z tel que $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y = \operatorname{Arctan} z$, à π près.

4. Démontrer les identités suivantes :

$$\operatorname{Arctan} x + 2\operatorname{Arctan}(\sqrt{1 + x^2} - x) = \frac{\pi}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exercice

On considère la fonction numérique de la variable réelle x , définie par

$$f(x) = \operatorname{Arcsin} \left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x} \right).$$

1. Donner le domaine de définition D_f de la fonction f .
2. Montrer que f est dérivable en tout point $x > 0$, $x \neq 1$, et calculer sa dérivée.
3. Afin d'étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 1$, on pose $\varphi(x) = \operatorname{Arctan}(\sqrt{x})$.
 - (a) En distinguant les cas $x \leq 1$ et $x \geq 1$, donner l'expression de $f(x)$ en fonction de $\varphi(x)$.
 - (b) En déduire que si on pose $\Delta = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$, on a :

$$(x \leq 1) \implies \Delta = \frac{2(\varphi(x) - \frac{\pi}{4})}{\tan^2(\varphi(x)) - 1} \quad \text{et} \quad (x \geq 1) \implies \Delta = \frac{-2(\varphi(x) - \frac{\pi}{4})}{\tan^2(\varphi(x)) - 1}$$
 - (c) Montrer que $\lim_{\varphi \rightarrow \pi/4} \frac{\tan \varphi - 1}{\varphi - \pi/4} = 2$.
 - (d) En déduire que f possède au point $x_0 = 1$ des dérivées à gauche et à droite que l'on précisera.
4. Etudier les variations de la fonction f et tracer le graphe de f .

Exercice

Soit f la fonction définie par $f(x) = \operatorname{Arctan} \left(\sqrt{\frac{x+1}{x+3}} \right)$.

1. Donner le domaine de définition D de la fonction f .
2. Calculer $f(x-2) + f(-x-2)$ pour tout $x \in D$ et en déduire une propriété géométrique du graphe de f .
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow -1^+} \operatorname{Arctan} \left(\sqrt{\frac{x+1}{x+3}} \right)$ et $\lim_{x \rightarrow -3^-} \operatorname{Arctan} \left(\sqrt{\frac{x+1}{x+3}} \right)$.
4. Etudier la dérivabilité de f sur son ensemble de définition.
5. Calculer $f'(x)$ pour tout x appartenant au domaine de dérivabilité de f et étudier le signe de $f'(x)$.
6. Rechercher les asymptotes à la courbe $y = f(x)$ et préciser la position de la courbe par rapport aux asymptotes.

Exercice

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et f_a la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f_a(x) = \operatorname{Arctan} \left(\frac{a+x}{1-ax} \right).$$

1. Etudier les variations de la fonction f_a et établir son tableau de variation. (On étudiera séparément les cas $a > 0$ et $a < 0$).

2. Déduire de tout ce qui précède une écriture simple de $\text{Arctan}(a) + \text{Arctan}(b)$, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. (On pourra discuter suivant le signe de $1 - ab$ et celui de a).
- 3.(a) Soit $p \in \mathbb{N}$, calculer $\text{Arctan}(p+1) - \text{Arctan}(p)$, en utilisant la question 2).
- (b) Etudier la convergence et la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = \sum_{p=0}^n \text{Arctan} \left(\frac{1}{p^2 + p + 1} \right)$$

4.7.5 Fonction cosinus et sinus hyperbolique

Fonction cosinus hyperbolique

On appelle fonction cosinus hyperbolique la fonction notée **ch** et définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Posons $f(x) = \text{ch}(x)$; f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ de fonction dérivée $f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. De plus $f'(x) \geq 0$ si et seulement si $e^x \geq e^{-x}$, c'est-  dire $x \geq 0$. De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. La courbe (C) de f dans le plan muni d'un repère cartésien $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ admet une branche parabolique dans la direction de la droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées). De même on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ et la même conclusion.

Fonction sinus hyperbolique

Elle est notée Sh et est définie sur $\mathbb{R}$ par : $\text{Sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Posons $g(x) = \text{Sh}x$; g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ de fonction dérivée $x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \text{ch}x$. On a $g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty$. On a donc une branche parabolique de direction de la droite d'équation $x = 0$. De même $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty$ et on a la même conclusion.

Remarque

- La fonction $x \mapsto \text{Ch}(x)$ est paire; la fonction $x \mapsto \text{Sh}(x)$ est impaire.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\text{Ch}(x)^2 - \text{Sh}(x)^2 = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = 1$$

$$\text{Ch}(2x) = 2\text{Ch}(x)^2 - 1$$

- Par analogie aux fonctions trigonométriques, il existe des relations de transformations en produit ou somme pour les fonctions hyperboliques.

4.7.6 Fonction argument cosinus hyperbolique

Soit φ la restriction de la fonction $x \mapsto Chx$ à l'intervalle $[0, +\infty[$. On a

$$\varphi : \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & Chx \end{array}$$

φ est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, donc φ réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $\varphi([0, +\infty[) = [1, +\infty[$

La bijection réciproque de φ est la fonction notée $Argch$ et appelée **Argument cosinus hyperbolique**. On a :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \longrightarrow & [1, +\infty[\\ x & \longmapsto & Chx \end{array}$$

et

$$\varphi^{-1} : \begin{array}{ccc} [1, +\infty[& \longrightarrow & [0, +\infty[\\ x & \longmapsto & Argchx \end{array}$$

$$y = Argchx \iff y \in [1, +\infty[\text{ et } x = Chy.$$

Dérivée de la fonction argument cosinus hyperbolique

La fonction $x \mapsto chx$ étant dérivable sur $[0, +\infty[$ de fonction dérivée $x \mapsto Shx$, donc $\varphi'(x) \geq 0$ et $\varphi'(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$. De plus on a $\varphi(0) = 1$. Donc la fonction $x \mapsto Argchx$ est dérivable sur $]1, +\infty[$ de fonction dérivée $x \mapsto \frac{1}{\varphi'[\varphi^{-1}(x)]}$.

On pose $\varphi^{-1}(x) = y$, c'est-à-dire $x = Chx$ avec $x \in [1, +\infty[$ et $y \in [0, +\infty[$. Alors on a

$$\frac{1}{\varphi'[\varphi^{-1}(x)]} = \frac{1}{\varphi'(y)} = \frac{1}{Shy}.$$

Or $Ch^2y - Sh^2y = 1$, on déduit que $Sh^2y = Ch^2y - 1 = x^2 - 1$. De plus $x \in]1, +\infty[$ implique $y = \varphi^{-1}(x) > 0$, donc $y > 0$ et $Shy > 0$.

$$Sh^2y = x^2 - 1 \implies Shy = \sqrt{x^2 - 1}.$$

En conclusion $x \mapsto Argchx$ est dérivable sur $]1, +\infty[$ de fonction dérivée $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

$$(Argchx)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad \text{pour tout } x \in]1, +\infty[.$$

4.7.7 Fonction argument sinus hyperbolique

Posons $f(x) = Shx$; f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Définition

La bijection réciproque f^{-1} de f est la fonction notée $Argsh$, appelée **fonction argument sinus hyperbolique**. On a :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & Shx \end{array}$$

et

$$\begin{aligned} f^{-1} : \quad & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto \operatorname{Argsh} x \\ y = \operatorname{Argsh} x & \iff y \in \mathbb{R} \text{ et } x = \operatorname{Sh} y. \end{aligned}$$

Dérivée de la fonction argument sinus hyperbolique

La fonction $f : x \mapsto \operatorname{Sh} x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de fonction dérivée la fonction $x \mapsto \operatorname{Ch} x$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \operatorname{Ch} x > 0$. On déduit que $x \mapsto \operatorname{Argsh} x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de fonction dérivée $x \mapsto \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$. On pose $f^{-1}(x) = y$ c'est-à-dire $x = \operatorname{Sh} y$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. Alors on a :

$$\frac{1}{f'[f^{-1}(x)]} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{\operatorname{Ch} y}.$$

$\operatorname{Ch}^2 y - \operatorname{Sh}^2 y = 1$ implique $\operatorname{Ch}^2 y = 1 + \operatorname{Sh}^2 y = 1 + x^2$. Puisque $\operatorname{Ch} y > 0$ on déduit que $\operatorname{Ch} y = \sqrt{1 + x^2}$ et ainsi la fonction $x \mapsto \operatorname{Argsh} x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de fonction dérivée $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$.

$$(\operatorname{ArgSh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

4.7.8 Fonction tangente hyperbolique

On appelle fonction tangente hyperbolique, la fonction notée th et définie par $thx = \frac{\operatorname{Sh} x}{\operatorname{Ch} x}$. Posons $f(x) = thx = \frac{\operatorname{Sh} x}{\operatorname{Ch} x}$. On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\operatorname{Ch} x > 0$ et par conséquent $Df = \mathbb{R}$.

Aussi $x \in \mathbb{R}$ implique $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = \frac{\operatorname{Sh}(-x)}{\operatorname{Ch}(-x)} = -\frac{\operatorname{Sh} x}{\operatorname{Ch} x} = -thx$, c'est-à-dire $x \mapsto thx$ est une fonction impaire. Etudions donc ses variations sur $[0, +\infty[$. On a $th(0) = \frac{\operatorname{Sh}(0)}{\operatorname{Ch}(0)} = 0$ et

$\lim_{x \rightarrow +\infty} th(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1$; ainsi la droite d'équation $y = 1$ est asymptote au voisinage de $+\infty$. De plus f est dérivable sur $[0, +\infty[$ de fonction dérivée la fonction $x \mapsto \frac{\operatorname{Ch}^2 x - \operatorname{Sh}^2 x}{\operatorname{Ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{Ch}^2 x}$ et $f'(x) > 0$.

Définition de la fonction argument tangente hyperbolique

La fonction $x \mapsto th(x)$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -1, 1[$. Sa bijection réciproque est appelée **fonction argument tangente hyperbolique** et est notée Argth . On a

$$f : \quad \begin{aligned} & \mathbb{R} \longrightarrow] -1, 1[\\ & x \longmapsto thx \end{aligned}$$

et

$$f^{-1} : \quad \begin{aligned} &] -1, 1[\longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto \operatorname{Argth} x \end{aligned}$$

$$y = \operatorname{Argth} x \iff y \in \mathbb{R} \text{ et } x = th y.$$

Dérivée de la fonction argument tangente hyperbolique

La fonction $x \mapsto th(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de fonction dérivée $x \mapsto f'(x) = \frac{1}{Ch^2 x} = \frac{Ch^2 x - Sh^2 x}{Ch^2 x} = 1 - th^2 x$. De plus $f'(x) > 0$ donc la fonction $x \mapsto Argth(x)$ est dérivable sur $] -1, 1[$ de fonction dérivée $x \mapsto \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$.

Posons $f^{-1}(x) = y$ c'est-à-dire $th(y) = x$, alors on a

$$\frac{1}{f'[f^{-1}(x)]} = \frac{1}{f'(y)} = Ch^2 y.$$

Or $1 - th^2(y) = \frac{1}{Ch^2 y}$, c'est-à-dire $1 - x^2 = \frac{1}{Ch^2 y}$, on déduit que $Ch^2 y = \frac{1}{1 - x^2}$ et par conséquent la fonction $x \mapsto Argth(x)$ est dérivable sur $] -1, 1[$ de fonction dérivée la fonction $x \mapsto \frac{1}{1 - x^2}$.

$$(Argth(x))' = \frac{1}{1 - x^2}.$$

Remarque

- Détermination de l'expression explicite de la fonction $x \mapsto Argch(x)$.

On a

$$y = Argch(x) \iff x = Ch(y) \in [1, +\infty[\text{ et } y \geq 0$$

$$x = Ch(y) \iff 2x = e^y + e^{-y} = \frac{e^{2y} + 1}{e^y}.$$

On a donc

$$e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0$$

Posons $e^y = t$ avec $t > 0$, l'équation devient $t^2 - 2xt + 1 = 0$ et le discriminant réduit est $\Delta' = x^2 - 1 \geq 0$ (car $x \geq 1$). On a alors deux solutions

$$t_1 = x + \sqrt{x^2 - 1}, \quad t_2 = x - \sqrt{x^2 - 1}.$$

Puisque $y \geq 0$ alors $t = e^y \geq 1$ donc la seule solution cherchée est $t = t_1 = x + \sqrt{x^2 - 1}$. Ainsi $t = e^y = x + \sqrt{x^2 - 1}$ et $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

$$\text{Pour tout } x \geq 1, \quad Argch x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

- Détermination de l'expression explicite de la fonction $x \mapsto Argsh(x)$.

$$y = Argsh(x) \iff y \in \mathbb{R} \text{ et } x = Sh(y) \in \mathbb{R}.$$

$$x = Sh(y) = \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \frac{e^{2y} - 1}{2e^y}.$$

On a donc

$$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0.$$

Posons $t = e^y > 0$ l'équation devient $t^2 - 2xt - 1 = 0$ et son discriminant réduit est $\Delta' = x^2 + 1 > 0$. On a alors deux solutions :

$$t_1 = x + \sqrt{1 + x^2}, \quad t_2 = x - \sqrt{1 + x^2}.$$

Puisque $t > 0$ on a la seule solution $t = t_1 = x + \sqrt{1 + x^2}$. Donc

$$x + \sqrt{1 + x^2} = e^y \text{ et } y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

D'où on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Arghsh}(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

- Détermination de l'expression explicite de la fonction $x \mapsto \operatorname{Argth}(x)$. En utilisant la même méthode on montre quelques

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \operatorname{Argth}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

4.8 Développement limité

Dans cette section, f désignera une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Il est bien connu que les fonctions les plus faciles à manipuler sont les polynômes. Nous formalisons donc dans cette section un moyen d'approximer des fonctions par des polynômes.

Définition 4.90. Soit $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction définie à côté de a . Nous dirons que f admet un développement limité en a d'ordre n s'il existe un intervalle ouvert I centré en a , une fonction polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n et une fonction ϵ_n de limite nulle en a tels que

$$\forall x \in I \setminus \{a\} \quad f(x) = P_n(x - a) + (x - a)^n \epsilon_n(x).$$

Dans ces conditions, nous dirons aussi que f admet un $DL_n(a)$. La fonction polynôme $P_n(x - a)$ est appelée la **partie régulière** du développement limité et le terme $(x - a)^n \epsilon_n(x)$ est **le reste** du développement limité ou **le terme complémentaire**.

Dans un voisinage pointé de a , $f(x)$ s'écrit alors sous la forme

$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \cdots + a_n(x - a)^n + (x - a)^n \epsilon_n(x).$$

Définition 4.91. Soit n un entier naturel. On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, lorsqu'il existe des constantes réelles $c_0, c_1, \dots, c_n$ telles que :

$$f(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n + o(x^n).$$

Le polynôme $c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n$ s'appelle partie principale ou bien régulière du développement de f à l'ordre n .

4.8.1 Développement de Taylor

Théorème 4.92 (Théorème de Taylor-Young). . Soit $a \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$ et f une fonction définie sur un voisinage I de a . Supposons que f soit $(n-1)$ fois dérivable sur I et que $f^{(n-1)}$ (fonction dérivée d'ordre $(n-1)$ de f) soit dérivable en a , alors f admet un $DL_n(a)$. De plus, pour $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, les coefficients de la partie régulière du développement limité sont donnés par

$$a_i = \frac{f^{(i)}(a)}{i!}.$$

Autrement dit, on a :

$$\begin{aligned}\forall x \in I, \quad f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o[(x-a)^n] \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o[(x-a)^n].\end{aligned}$$

Proposition 4.93. Si f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, il est unique. On peut donc calculer les développements limités d'ordre n au voisinage de 0 de la plupart des fonctions en utilisant la formule de Taylor-Young.

Corollaire 4.94. Si f possède au voisinage de 0 un développement limité dont la partie régulière est $\sum_{k=0}^n c_k x^k$, alors pour tout $p \in \{0, 1, \dots, n\}$, f admet un développement limité d'ordre p dont la partie régulière est $\sum_{k=0}^p c_k x^k$.

Démonstration. On a, au voisinage de 0, $f(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k + o(x^n)$; d'où, pour tout $p \in \{0, 1, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{k=0}^p c_k x^k + \sum_{k=p+1}^n c_k x^k + o(x^n) \\ &= \sum_{k=0}^p c_k x^k + x^{p+1} \left(\sum_{k=p+1}^n c_k x^{k-p-1} \right) + o(x^n) \\ &= \sum_{k=0}^p c_k x^k + x^{p+1} \left(\sum_{k=p+1}^n c_k x^{k-p-1} \right) + o(x^n)\end{aligned}$$

Car une fonction négligeable devant x^n est négligeable devant x^p . □

On peut trouver diverses formulations du reste du développement limité de Taylor-Young (c'est-à-dire la fonction $\epsilon_n(x)$). Une expression précise du reste peut être utile pour donner des estimations de l'erreur commise dans les calculs numériques.

Nous donnons ici l'expression du reste de Lagrange qui provient d'une application du Théorème de Rolle.

Théorème 4.95 (Reste de Taylor-Lagrange). Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $n \geq 1$ et f une fonction n -fois dérivable sur $[a, b]$ dont la dérivée d'ordre n est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Autrement dit

$$\epsilon_n(b) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Démonstration. On applique le Théorème de Rolle à la fonction

$$x \mapsto \phi_n(x) = f(b) - f(x) - \sum_{i=1}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(b-x)^i - A \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!},$$

où le nombre réel A est tel qu'on ait $\phi_n(a) = \phi_n(b)$. □

Remarque 4.96. Faisons remarquer que comme dans le Théorème de Rolle, le point c peut dépendre du point b où on veut estimer la fonction. Le nombre c est souvent écrit sous la forme

$$c = a + \theta(b - a) \quad \text{avec } 0 < \theta < 1.$$

Lorsque $a = 0$, on obtient, en posant $b = x$, la formule de **Mac-Laurin** :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1).$$

Exemple 4.97. La formule de Mac-Laurin à l'ordre 3 de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est :

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4(1+\theta x)^4}x^4.$$

Pour $x = 1$, on peut donner une approximation de la valeur $\ln 2$ par $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 0,83333333$, l'erreur commise étant égale à $\epsilon_4(1) = \frac{1}{4(1+\theta)^4}$ avec $0 < \theta < 1$, donc inférieure ou égale à $\frac{1}{4}$.

4.8.2 Développement limité des fonctions usuelles

Les fonctions usuelles étant de classe $\mathcal{C}^\infty$, elles possèdent en particulier des développements limités à tout ordre en 0 si 0 appartient à leur domaine de définition.

Théorème 4.98. On a, au voisinage de 0, pour un entier naturel quelconque :

1. $e^x = \sum_{k=0}^n \left(\frac{x^k}{k!} \right) + o(x^n).$
2. $e^{-x} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \left(\frac{x^k}{k!} \right) + o(x^n).$
3. $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \left(\frac{x^k}{k} \right) + o(x^n).$
4. $\ln(1-x) = \sum_{k=1}^n \left(-\frac{x^k}{k} \right) + o(x^n).$
5. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} \left(\prod_{i=0}^{k-1} (\alpha - i) \right) + o(x^n).$
6. $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^n (-1)^k (x^k) + o(x^n).$

Définition 4.99. Soit n un entier naturel. On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de a , lorsqu'il existe des constantes réelles $c_0, c_1, \dots, c_n$ telles que :

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

Remarque 4.100. 1. Si f possède un développement limité au voisinage de a , nécessairement, f est définie dans un voisinage de a .

2. La fonction f possède un développement limité au voisinage de a si et seulement si la fonction $h : x \mapsto f(x+a)$ possède un développement limité au voisinage de 0. Donc, en pratique, on se ramène toujours à un développement limité au voisinage de 0 en posant $x = h + a$.

Exemple 4.101. Utiliser le développement d'ordre 3 de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{1+x}$ pour calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2}{x^3}.$$

4.8.3 Opérations sur les développements limités

La formule de Taylor-Young permet d'affirmer l'existence des développements limités. mais le calcul des dérivées successives d'une fonction s'avère souvent difficile. Dans la pratique, on obtient les développements limités comme somme, produit, composées, quotients des développements limités des fonctions usuelles.

Proposition 4.102. Soient f et g deux fonctions définies sur le même ensemble $D \subset \mathbb{R}$ et admettant au voisinage de 0 un développement limité d'ordre n de partie régulière P et Q respectivement. Alors $f + g$ et fg admettent un développement d'ordre n au voisinage de 0 dont la partie régulière est respectivement $P + Q$ et R où R est le polynôme obtenu en ne gardant dans le produit PQ que les termes de degré inférieur ou égal à n . En d'autres termes si

$$\forall x \in I \setminus \{a\}, \quad f(x) = P_n(x-a) + o((x-a)^n) \text{ et } g(x) = Q_n(x-a) + o((x-a)^n), \quad \text{alors}$$

- $(f+g)(x) = (P_n + Q_n)(x-a) + o((x-a)^n), \quad (\lambda f)(x) = \lambda P_n(x-a) + o((x-a)^n).$
- La partie régulière du développement limité de $f.g$ est composée des termes de degré inférieur ou égal à n du produit $P_n(x-a).Q_n(x-a).$

Proposition 4.103. Soient $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction admettant un développement limité d'ordre n en 0 et vérifiant $\lim_{x \rightarrow 0} = 0$, g une fonction admettant au voisinage de 0 un développement limité d'ordre n . On suppose que $f(D_f) \subset D_g$. On écrit, au voisinage de 0

$$f(x) = P(x) + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(y) = Q(y) + o(y^n).$$

Alors $g \circ f$ admette un développement d'ordre n au voisinage de 0 qui s'écrit

$$g \circ f(x) = R(x) + o(x^n),$$

où R est le polynôme obtenu en ne gardant dans $Q \circ P$ que les termes de degré inférieur ou égal à n .

Exemple 4.104. Déterminer le développement limité de $e^{\sqrt{1+x}}$ en 0 à l'ordre 2.

Proposition 4.105. Si la fonction f admet au voisinage de 0 un développement limité d'ordre n et a pour limite 0 en 0, alors la fonction $\frac{1}{1+f}$ admet au voisinage de 0 un développement limité d'ordre n .

Exemple 4.106. Déterminer le développement limité de $\frac{1}{1+\ln(1+x)}$ en 0 à l'ordre 4.

Corollaire 4.107. Si la fonction f admet au voisinage de 0 un développement limité d'ordre n et si $\lim_0 f \neq 0$, alors la fonction $\frac{1}{f}$ admet au voisinage de 0 un développement limité d'ordre n .

Exemple 4.108. Déterminer le développement limité de $\frac{1}{1+\sqrt{1+x}}$ en 0 à l'ordre 3.

Corollaire 4.109. Si f et g sont deux fonctions définies sur le même ensemble D et possédant admet au voisinage de 0 un développement limité d'ordre n et si g a une limite non nulle en 0, alors la fonction $\frac{f}{g}$ admet au voisinage de 0 un développement limité d'ordre n .

Proposition 4.110 (Division suivant les puissances croissantes). Soit $n \in \mathbb{N}$, $A(x)$ et $B(x)$ deux polynômes tels que $B(0) \neq 0$. Il existe, de façon unique, deux polynômes $Q(x)$ et $R(x)$ tels que

$$A(x) = B(x)Q(x) + x^{n+1}R(x), \quad \text{et } \deg Q \leq n.$$

Q est le quotient de A par B à l'ordre n .

Proposition 4.111 (Quotient de deux DL). Soit $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, f et g deux fonctions définies à côté de a . Si f et g admettent des $DL_n(a)$, c'est-à-dire il existe un intervalle ouvert I centré en a , des polynômes P_n, Q_n de degré inférieur ou égal à n tels que :

$$\forall x \in I \setminus \{a\}, \quad f(x) = P_n(x-a) + o((x-a)^n), \quad g(x) = Q_n(x-a) + o((x-a)^n)$$

et si $Q_n(0) \neq 0$ (c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$), alors $\frac{f}{g}$ admet un $DL_n(a)$. De plus, nous avons pour $x \neq a$ voisin de a :

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{P_n}{Q_n}(x-a) + o((x-a)^n),$$

où $\frac{P_n}{Q_n}$ est le quotient à l'ordre n de la division suivant les puissances croissantes de P_n par Q_n .

Proposition 4.112 (Intégration des DL). Soit $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction dérivable au voisinage de a dont la dérivée admet un $DL_n(a)$ de la forme

$$f'(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

Alors f admet le $DL_{n+1}(a)$ suivant :

$$f(x) = f(a) + a_0(x-a) + \frac{a_1}{2}(x-a)^2 + \frac{a_2}{3}(x-a)^3 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + o((x-a)^{n+1}).$$

Exemple 4.113. On sait que la fonction $x \mapsto g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est de classe C^∞ dans l'intervalle $] -1, 1[$ et que son $DL_n(0)$, pour $n = 2p$ ou $n = 2p+1$, estimations

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{p=1}^n \frac{1.3.5 \cdots (2p-1)}{2.4.6 \cdots (2p)} x^{2p} + o(x^{2p+1}).$$

Comme $g(x) = (\arcsin x)'$ alors on aura pour tout $x \in] -1, 1[$ le $DL_{n+1}(0)$ de la fonction $x \mapsto \arcsin x$

$$\arcsin x = x + \sum_{p=1}^n \frac{1.3.5 \cdots (2p-1)}{2.4.6 \cdots (2p)} \frac{x^{2p+1}}{2p+1} + o(x^{2p+2}).$$

Proposition 4.114 (Dérivation des DL). Soit $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction définie sur un voisinage I de a . Supposons que f soit n -fois dérivable sur I et que la fonction dérivée d'ordre n de f , $f^{(n)}$, soit dérivable en a . Si le développement limité de f à l'ordre $(n+1)$ en a s'écrit

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + a_{n+1}(x-a)^{n+1} + o((x-a)^{n+1}),$$

alors f' admet un développement limité d'ordre n en a qui s'écrit

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \cdots + na_n(x-a)^{n-1} + (n+1)a_{n+1}(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

4.8.4 Recherche d'équivalents et de limites

Nous savons que l'équivalence des fonctions n'est pas compatible avec la somme. Aussi, pour chercher un équivalent ou la limite d'une somme complexe, il faut passer par les développements limités. Une fois obtenu le développement limité, on utilise la propriété suivante :

Proposition 4.115. Si f est une fonction admettant au voisinage de 0 un développement limité d'ordre n dont la partie régulière est $\sum_{k=0}^n c_k x^k$ n'est pas nulle. Si p est le plus petit indice tel que $c_p \neq 0$, on a :

$$f(x) \sim_{x \rightarrow 0} a_p x^p.$$

Exemple 4.116. Déterminer un équivalent en 0 de

$$(1+x)^{\frac{\ln x}{x}}.$$

4.8.5 Etude d'une fonction au voisinage d'un point

Si la fonction f est définie en a , elle possède un développement limité d'ordre 1 en a si et seulement si f est dérivable en a . Sa courbe représentative possède alors une tangente au point d'abscisse a . Si le développement limité est

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + o((x-a)),$$

on a $f(a) = c_0$, $f'(a) = c_1$ et une équation de la tangente au point d'abscisse a est $y = c_0 + c_1(x-a)$. Le terme suivant dans le développement limité donne la position de la courbe par rapport à la tangente.

Exemple 4.117. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x}{\ln(1+x)}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$. Etudier f au voisinage de 0.

4.9 Fonctions convexes et fonctions concaves

4.9.1 Définition

- Soit f une fonction numérique de variable réelle définie sur un intervalle I contenant au moins deux points. On dit que f est convexe sur I si :

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad \forall \lambda \in [0, 1], \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

- Une fonction f est dite concave si son opposé $-f$ est convexe.
- Une partie X de $\mathbb{R}^2$ est dite convexe si pour tout $(A, B) \in X^2$, le segment $[AB]$ est contenu dans X .

4.9.2 Interprétation géométrique de la convexité

1. Soient $M(x, f(x))$ et $N(y, f(y))$ deux points de la courbe représentative de f . On désigne par G le barycentre du système $\{M(\lambda); N(1-\lambda)\}$. Alors on a $G(\lambda x + (1-\lambda)y; \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y))$. On désigne par P le point de la courbe de f d'abscisse $\lambda x + (1-\lambda)y$. Ainsi en utilisant la définition de la convexité, on déduit que P est situé en dessous de G .

Une fonction est convexe si et seulement si tout arc de sa courbe représentative est situé en dessous de la corde correspondante.

2. Une fonction est convexe si et seulement si la région du plan situé au-dessus de sa courbe représentative est convexe.

Théorème 4.118 (Inégalité de Jensen). Soit f une fonction convexe sur un intervalle I . Alors on a :

$$\forall n \geq 2, \quad \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in I^n, \quad \forall (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n :$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \implies f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

Démonstration. On fera une démonstration par récurrence sur $n \geq 2$.

- Pour $n = 2$, on a le résultat, qui est une déduction de la définition d'une fonction convexe :

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2, \quad \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}_+^2,$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \implies f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) &= f(\lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1)x_2) \\ &\leq \lambda_1 f(x_1) + (1 - \lambda_1)f(x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2). \end{aligned}$$

- Soit n un entier supérieur ou égal à 2 pour lequel la propriété est vraie.

Soit $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in I^{n+1}$, $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ tel que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{n+1} = 1$.

On sait que

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right).$$

Posons $\Lambda = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i$.

- (a) Si $\Lambda \neq 0$, on désigne par ξ le barycentre des points pondérés $(x_1, \lambda_1), (x_2, \lambda_2), \dots, (x_n, \lambda_n)$. Comme I est un intervalle alors $\xi \in I$ et on a :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = \Lambda \xi \text{ et } \Lambda + \lambda_{n+1} = 1.$$

Par ailleurs on a :

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) &= f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) \\ &= f(\Lambda \xi + \lambda_{n+1} x_{n+1}) \\ &\leq \Lambda f(\xi) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}), \quad \text{d'après l'hypothèse de convexité de } f \end{aligned}$$

Or $\xi = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\Lambda} x_i$ et $\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\Lambda} = 1$. Donc d'après l'hypothèse de récurrence

$$f(\xi) = f\left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\Lambda} x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\Lambda} f(x_i).$$

D'où en définitive on a :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) \leq \Lambda \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\Lambda} f(x_i) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i).$$

- (b) Si $\Lambda = 0$, alors pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ $\lambda_i = 0$ et donc $\lambda_{n+1} = 1$; l'inégalité est donc évidente. □

Théorème 4.119. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur un intervalle I . f est convexe sur I si et seulement si pour tout $x_0 \in I$, la fonction $x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est croissante sur $I \setminus \{x_0\}$.

Démonstration. 1. Supposons que f est convexe sur I . Soit $x_0 \in I$ et soit x_1, x_2 deux éléments de $I \setminus \{x_0\}$. On suppose que $x_0 < x_1 < x_2$, alors il existe $\lambda \in]0, 1[$ tel que $x_1 = \lambda x_0 + (1 - \lambda)x_2$. Par conséquent

$$f(x_1) = f(\lambda x_0 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_0) + (1 - \lambda)f(x_2),$$

d'où

$$f(x_1) - f(x_0) \leq (1 - \lambda)[f(x_2) - f(x_0)].$$

Or $x_1 - x_0 = (1 - \lambda)(x_2 - x_0)$ et $x_1 - x_0 > 0$, par conséquent

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}.$$

Les mêmes arguments marchent lorsqu'on a $x_1 < x_0 < x_2$ ou $x_1 < x_2 < x_0$. Ainsi l'application $x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est croissante sur $I \setminus \{x_0\}$.

2. Réciproquement, supposons que l'application $x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est croissante sur $I \setminus \{x_0\}$, pour tout $x_0 \in I$. Soit $(x, y) \in I^2$ avec $x < y$ et soit $\lambda \in]0, 1[$. On pose $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$. Par conséquent $x < z < y$ et on a :

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x};$$

d'où $f(z) \leq f(x) + \frac{z-x}{y-x}[f(y) - f(x)]$. Or $\frac{z-x}{y-x} = 1 - \lambda$; d'où $f(z) \leq f(x) + (1 - \lambda)[f(y) - f(x)]$, c'est-à-dire $f(z) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$. On a ainsi montré que

$$f[\lambda x + (1 - \lambda)y] \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \text{ pour tout } \lambda \in]0, 1[.$$

Cette inégalité étant évidente pour $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$, on conclut que f est convexe sur I . □

Théorème 4.120. Une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable sur un intervalle I est convexe sur I si et seulement si, sa dérivée est croissante sur I .

Démonstration. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

1. Supposons que f est convexe sur I . Soit $(x, y) \in I^2$ avec $x < y$. Pour tout $z \in]x, y[$ il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$. Par conséquent on a :

$$f(z) = f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y),$$

ce qui implique

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

En faisant tendre z vers x à droite on obtient $f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$. De même en faisant tendre z vers y à gauche, on obtient $\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'(y)$ et on déduit alors que

$$f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'(y).$$

On conclut que f' est croissante sur I .

2. Supposons que f' est croissante sur I . Soit $(x, y) \in I^2$ tel que $x < y$. Soit $(\mathcal{D})$ la droite joignant les points de la courbe représentative de f d'abscisses respectives x et y dont l'équation est : $y = mx + p$. On définit la fonction g par : $g(t) = f(t) - (mt + p)$, avec $t \in I$; g est dérivable sur $[x, y]$ et $g'(t) = f'(t) - m$. D'après le théorème des accroissements finis il existe $c \in]x, y[$ tel que $f'(c) = m$ c'est-à-dire $g'(c) = 0$. Comme f' est croissante sur I , alors g' est aussi croissante sur $[x, y]$. Par conséquent g' est négative sur $[x, c]$ et positive sur $[c, y]$. On déduit que la fonction g est partout négative sur $[x, y]$: la courbe de f est en dessous de sa corde; f est donc convexe sur I .

□

Corollaire 4.121. • Une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ au moins deux fois dérivable sur un intervalle I est convexe sur I si et seulement si sa dérivée seconde est positive sur I .

- Une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ au moins deux fois dérivable sur un intervalle I est concave sur I si et seulement si sa dérivée seconde est négative sur I .

Démonstration. Sur l'intervalle I , f' croissante $\iff f''$ positif

□

4.9.3 Quelques applications

La fonction $x \mapsto f(x) = -\ln x$ est continue et au moins deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$. De plus on a : $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$. ainsi la fonction $x \mapsto f(x) = -\ln x$ est convexe sur $]0, +\infty[$. On déduit, en utilisant l'inégalité de Jensen que :

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \cdots + \alpha_n f(x_n)$$

pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in (]0, +\infty[)^n$ et pour tout $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in ([0, +\infty[)^n$ tels que $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, c'est-à-dire

$$\alpha_1 \ln(x_1) + \alpha_2 \ln(x_2) + \cdots + \alpha_n \ln(x_n) \leq \ln(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n).$$

Par conséquent pour tous $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in (]0, +\infty[)^n$ et pour tous $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in ([0, +\infty[)^n$ on a :

$$x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \leq \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n \quad (4.9.1)$$

En particulier si $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = \frac{1}{n}$, on déduit de (4.9.1) que :

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}, \quad \text{pour tous } (x_1, x_2, \dots, x_n) \in (]0, +\infty[)^n. \quad (4.9.2)$$

Ainsi la moyenne géométrique de n réels strictement positifs est plus petite que leur moyenne arithmétique.

On applique l'inégalité (4.9.2) pour $n = 3$ à $(x_1, x_2, x_3) = (a^3, b^3, c^3)$ pour $a, b, c > 0$ et on obtient

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc, \quad (4.9.3)$$

puis à $(x_1, x_2, x_3) = (a, b, c)$ pour $a, b, c > 0$ et on obtient

$$(a + b + c)^3 \geq 27abc. \quad (4.9.4)$$

Par ailleurs en prenant $x_i = i$, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, dans (4.9.2) on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sqrt[n]{n!} \leq \frac{n+1}{2} \quad (4.9.5)$$

D'autre part, en appliquant l'inégalité (4.9.1) pour $(x_1, x_2) = (x, y) \in (]0, +\infty[)^2$ et $(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha, \beta) \in (]0, +\infty[)^2$ tels que $\alpha + \beta = 1$, on a

$$x^\alpha y^\beta \leq \alpha x + \beta y. \quad (4.9.6)$$

Soit $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in (]0, +\infty[)^n$ et $(b_1, b_2, \dots, b_n) \in (]0, +\infty[)^n$ deux suites de réelles. On pose

$$x = \frac{a_i^{\frac{1}{\alpha}}}{\sum_{i=1}^n a_i^{\frac{1}{\alpha}}} \text{ et } y = \frac{b_i^{\frac{1}{\beta}}}{\sum_{i=1}^n b_i^{\frac{1}{\beta}}} \text{ dans (4.9.6) et on a :}$$

$$\frac{a_i b_i}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha \left(\sum_{i=1}^n b_i^{\frac{1}{\beta}}\right)^\beta} \leq \alpha \frac{a_i^{\frac{1}{\alpha}}}{\sum_{i=1}^n a_i^{\frac{1}{\alpha}}} + \beta \frac{b_i^{\frac{1}{\beta}}}{\sum_{i=1}^n b_i^{\frac{1}{\beta}}}. \quad (4.9.7)$$

En faisant la sommation pour $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ on a :

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i b_i}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha \left(\sum_{i=1}^n b_i^{\frac{1}{\beta}}\right)^\beta} \leq \alpha + \beta = 1$$

c'est-à-dire

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha \left(\sum_{i=1}^n b_i^{\frac{1}{\beta}}\right)^\beta \quad (\text{Inégalité de Hölder}) \quad (4.9.8)$$

Pour $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, on obtient

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \quad (\text{Inégalité de Cauchy-Schwartz}) \quad (4.9.9)$$

ou bien

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) \quad (4.9.10)$$

4.10 Exercices

4.10.1 Exercice

Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de :

1. $x \mapsto \frac{x+1}{x^2+x+2}$; 2. $x \mapsto (1+\sqrt{1+x})^{\frac{1}{2}}$;
3. $x \mapsto (1+2x)^{\frac{1}{1+x}}$.

4.10.2 Exercice

Déterminer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 1 de :

$$x \mapsto x^{\frac{1}{\ln x - 1}}.$$

4.10.3 Exercice

Calculer la limite $+\infty$ de la fonction f définie par :

$$x \mapsto f(x) = x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - ex^3 \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

4.10.4 Exercice

Prouver que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

4.10.5 Exercice

Donner le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction f définie par :

$$f(x) = \sqrt{1+x}.$$

En déduire la limite lorsque x tend vers 0 de $\frac{\sqrt{1+x}-1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2}{x^3}$.

4.10.6 Exercice

Etudier les asymptotes de la courbe représentative de chacune des fonctions suivantes

1. $x \mapsto \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{4x^2-3x+2}$; 2. $x \mapsto \sqrt[3]{(x^2+1)(x-3)}$;
3. $x \mapsto x^2 \ln \frac{x}{1+x}$.

4.10.7 Exercice

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} + 1}{e^{\frac{1}{x}} - 1}.$$

Etudier les variations de f , l'allure de la courbe au voisinage du point d'abscisse 0 et les asymptotes de la courbe de f .

4.10.8 Exercice

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = xe^{\frac{1}{x}}.$$

Etudier les variations de f , l'allure de la courbe au voisinage du point d'abscisse 0 et les asymptotes de la courbe de f .