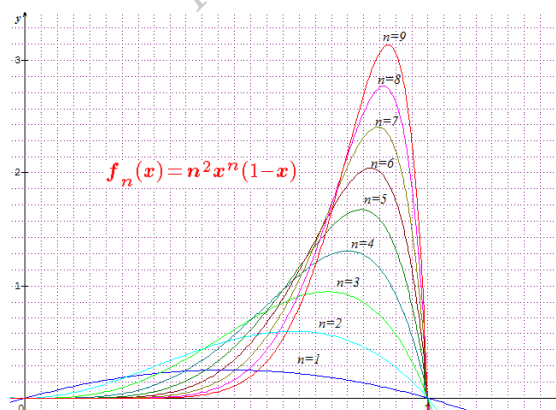


Université de Natitingou
Ecole normale Supérieure de Natitingou
Département de Mathématiques-Informatique

Introduction à la Topologie
et Calcul différentiel
Analyse dans $\mathbb{R}^n$



Auteur :
Liamidi Aremou LEADI

Table des matières

I	Introduction à la Topologie	5
1	Espaces métriques et Espaces vectoriels normés	6
1.1	Espaces métriques	6
1.1.1	Notion de distance	6
1.1.2	Quelques exemples :	6
1.1.3	Boules ouverts-Boules fermées-Sphères	7
1.2	Espaces vectoriels normés	9
1.2.1	Les normes usuelles de $\mathbb{R}^n$	9
1.2.2	Normes équivalentes	10
1.2.3	Boules et Sphère d'un espace vectoriel normé	11
1.3	Sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$	11
1.4	Recouvrement d'ouvert	12
1.5	Voisinage d'un point	13
1.6	Sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}^n$	13
1.7	Intérieur	14
1.8	Extérieur d'un ensemble	14
1.9	Adhérence ou fermeture d'une partie	14
1.10	Parties bornées de $\mathbb{R}^n$	15
1.11	Point d'accumulation	16
1.12	Suite dans $\mathbb{R}^n$	16
1.12.1	Suite numérique	16
1.12.2	Suite bornées dans $\mathbb{R}^n$	16
1.13	Les parties compactes $\mathbb{R}^n$	17
1.14	Les parties connexe	17
II	Fonctions :Continuité et différentiabilité	18
2	Fonctions de plusieurs variables, continuités et différentiabilités	19
2.1	Fonctions de plusieurs variables	19
2.1.1	Ensemble image	19
2.1.2	Graphe d'une fonction	19
2.1.3	Ligne de niveau	20
2.1.4	Fonctions homogènes	20
2.2	Fonction continue	20
2.2.1	Continuité des fonctions à une variable	20
2.2.2	Continuité des fonctions à plusieurs variables	20
2.2.3	Fonction lipschitzienne de rapport k	21
2.2.4	Continuité uniforme	21
2.3	Différentiabilité	21
2.3.1	Application partielles	21
2.3.2	Dérivées partielles	22
2.3.3	Application de classe $\mathcal{C}^1$	23

2.3.4	Dérivée directionnelle	23
2.3.5	Différentielle d'une fonction en un point	23
2.3.6	Différentiabilité au sens de Fréchet	24
2.3.7	Vecteur gradient	25
2.3.8	Différentielle de la composée de deux applications	26
2.3.9	Dérivées partielles d'ordre supérieur	27
2.3.10	Matrice Jacobienne	27
2.3.11	Difféomorfisme	28
2.3.12	Théorème de Schwartz	28
2.3.13	Différentiabilité au sens de Gâteaux	28
2.3.14	Théorème d'inversion locale	29
2.4	Extrema et points critiques	29
2.4.1	Extrema (minimum local, maximum local, minimum global, maximum global)	29
2.4.2	Points critiques d'une fonction de plusieurs variables	30
2.5	Matrice hessienne	30
2.5.1	Extréma liés ou optimisation sans contrainte	31
2.5.2	Plan tangent à une surface	32
2.6	Développements limités	32
2.6.1	Formule de Taylor-Lagrange	32
2.7	Théorème des fonctions implicites	33
2.8	Champs de vecteurs	36
2.9	Les opérateurs de calcul différentiel dans $\mathbb{R}^3$	36
2.9.1	L'opérateur nabla	36
2.9.2	L'opérateur rotationnel	36
2.9.3	L'opérateur divergence	37
2.9.4	L'opérateur Laplacien	37
2.10	Les formes différentielles	38
2.10.1	Rappels	38
2.10.2	Définition d'un formes différentielles	38
2.10.3	Les forme différentielle exactes, ou fermées	38

III Sommes et Séries numérique 40

3 Sommes de Riemann 41

3.1	Rappel sur les sommes de Riemann	41
-----	--	----

4 Séries Numériques 42

4.1	Généralités	42
4.2	Convergence	42
4.3	Séries à termes positifs	46
4.4	Séries de Riemann	48
4.4.1	Critère de de D'Alembert	50
4.4.2	Critère de Cauchy	50
4.4.3	Critère de Kummer	53
4.5	Séries À termes quelconques	54
4.5.1	Regroupement des termes	54
4.6	Séries alternées	55

4.7	Séries absolument convergentes	55
IV	Suites et séries	57
5	Suites et séries de fonctions	58
5.1	Suites de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$	58
5.1.1	Convergence uniforme d'une suite de fonction	58
5.1.2	Continuité-Intégration-Dérivation de la limite d'une suite de fonctions	59
5.2	Série de fonction	61
6	Séries de Fourier	65
6.1	Polynômes de Fourier	65
6.2	Série de Fourier d'une fonction 2π -périodique	66
6.3	Série de Fourier d'une fonction 2ℓ -périodique ($\ell \in]0, +\infty[$)	69
6.3.1	Convergence de la série de Fourier	71
6.3.2	Convergence quadratique	71
V	Les intégrales	74
7	Intégrales multiples	75
7.1	Intégrales doubles	75
7.1.1	Un aperçu formelle de l'intégrales doubles	75
7.1.2	Définition de l'intégrale double d'une fonction en escalier.	76
7.1.3	Quelques propriétés de l'intégrale double	77
7.1.4	Théorème de Fubini	77
7.1.5	Intégrale double sur des domaines non rectangle	79
7.1.6	Calcul d'aire d'un domaine de $\mathbb{R}^2$	82
7.1.7	Changement de variables	82
7.2	Les intégrales triples	83
7.2.1	Changement de variables dans $\mathbb{R}^3$	86
8	Intégrales généralisées	88
8.1	Intégrale généralisée des fonctions ayant un signe constant	89
8.2	Les intégrales de Riemann	89
8.3	Intégrales généralisées de fonction ne gardant pas un signe constant	91
9	Intégrales curviligne.	93
9.1	Généralités	93
9.1.1	Courbes paramétrées	93
9.2	Courbes inverses et juxtaposition	93
9.3	Vecteur tangent.	94
9.4	Intégrale d'un champs de vecteur le long d'une courbe	94
9.4.1	Champs de vecteur	94
9.4.2	Longueur d'une courbe.	95
9.4.3	Quelques propriétés de l'intégrale curviligne	95
9.4.4	Cas particulier de champs dérivant d'un potentiel	95

9.5	Formule de Green-Riemann	97
9.5.1	Conséquence de la formule de Green	97
9.6	Les intégrales de surfaces	98
9.6.1	Définition de l'intégrales de surface	98
9.6.2	Flux d'un champ vectoriel	99
9.6.3	Formule de stockes-Ampère	99
9.6.4	Formule de Green-Ostogradshy	99

mail@ideal

Première partie

Introduction à la Topologie

mail@ideal

Espaces métriques et Espaces vectoriels normés

1.1 Espaces métriques

1.1.1 Notion de distance

Soit $E \neq \emptyset$ et $f : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$

On dit que f est une distance sur E ou que E est un espace mstr E si f vérifie les propriétés suivantes

Propriétés :

- $\forall (x, y) \in E^2, f(x, y) \geq 0$ et $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (positivité)
- $\forall (x, y) \in E^2, f(x, y) = f(y, x)$ (symétrie)
- $\forall (x, y, z) \in E^3, f(x, y) \leq f(x, z) + f(z, y)$ (inégalité triangulaire)

Si f est une distance sur E alors le couple (E, f) est appelé "Espace métrique"

1.1.2 Quelques exemples :

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

* $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x, y) \in \{0; 1\} \subset [0, +\infty[$ donc $f(x, y) \geq 0$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. De plus par définition de f on a : $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

* $f(x, y) = 1 = f(y, x)$ si $x \neq y$ et $f(x, y) = 0 = f(y, x)$ si $x = y$.
Donc $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x, y) = f(y, x)$.

* inégalité triangulaire

- 1^{er} cas : $x = y$. Soit $z \in \mathbb{R}$

$$y \neq z \Rightarrow x \neq y$$

$$\Rightarrow 0 = f(x, y) \leq f(y, z) + f(x, z) = 2$$

$$\text{si } y = z \Rightarrow y = z = x$$

$$\Rightarrow 0 = f(x, y) \leq f(y, z) + f(x, z) = 0$$

2^{em}cas : $x \neq y$

$$\text{Soit } z \in \mathbb{R}; y \neq z \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ \text{ou} \\ x \neq z \end{cases} \text{ et } y = z \Rightarrow x \neq z$$

Donc f est une distance sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto |x - y| = \max(x - y; -(x - y)) \end{aligned}$$

① $f(x, y) \geq 0$ et $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

② $f(x, y) = |x - y| = |-(x - y)| = |y - x| = f(y, x)$ donc $f(x, y) = f(y, x)$

③ inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} f(x, y) &= |x - y| = |(x - z) + (z + y)| \\ &\leq |(x - z)| + |(z - y)| \\ &\leq f(x, z) + f(z, y) \end{aligned}$$

Donc f est une distance sur $\mathbb{R}$

Exercice :

Soient $X = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $Y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\|X, Y\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \quad \|X, Y\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2} \quad \|X, Y\|_3 = \max(|x_i - y_i|)$$

Montrer que $\|X, Y\|_1, \|X, Y\|_2$ et $\|X, Y\|_3$ sont des distances sur $\mathbb{R}^n$. On les appelle les distances usuelles de $\mathbb{R}^n$

Conséquences : 

Si (E, f) est un espace métrique alors $\forall (x, y, z) \in E^3$ on a : $|f(x, y) - f(y, z)| \leq f(x, z)$

Preuve :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x, y) \leq f(x, z) + f(y, z) \\ f(y, z) \leq f(y, x) + f(x, z) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(x, y) - f(y, z) \leq f(x, z) \\ -f(y, x) + f(y, z) \leq f(x, z) \end{array} \right\} \Rightarrow |f(x, y) - f(y, z)| \leq f(x, z)$$

1.1.3 Boules ouverts-Boules fermées-Sphères

Soit (E, d) un espace métrique $a \in E$ et $r > 0$

 On appelle boule ouvert de centre a et de rayon r , le sous-ensemble de E noté $B_O(a, r)$ tel que :

$$B_O(a, r) = \{x \in E / d(a, x) < r\}$$

Ainsi $x \in B_O(a, r) \Leftrightarrow d(a, x) < r$

 On appelle boule fermée de centre a et de rayon r , le sous-ensemble de E noté $B_f(a, r)$ tel que :

$$B_f(a, r) = \{x \in E / d(a, x) \leq r\}$$

Ainsi $x \in B_f(a, r) \Leftrightarrow d(a, x) \leq r$

 On appelle Sphère de centre a et de rayon r , le sous-ensemble de E noté $S(a, r)$ tel que :

$$S(a, r) = \{x \in E / d(a, x) = r\}$$

Ainsi $x \in S(a, r) \Leftrightarrow d(a, x) = r$

Remarque :

$$\overline{B}(a, r) = B(a, r) \cup S(a, r)$$

- Si $\overline{B}(a, r)$ est un ouvert alors $B(a, r)$ est un fermé
- Si $\overline{B}(a, r)$ est un fermé alors $B(a, r)$ est un ouvert

Exemple 1 :

Soit $E \neq \emptyset$ et $d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$; d est appelée "distance discret" sur E .

Résultats : Soit $r > 0$; $B(a, r) = \{x \in E / d(a, x) < r\}$

1^{er}cas : Si $r \in]0; 1[$; $B(a, r) = \{a\}$

2^{em}cas : Si $r \in [1; +\infty[$; $B(a, r) = E$

$$\overline{B}(a, r) = \begin{cases} \{a\} & \text{si } r \in]0; 1[\\ E & \text{si } r \in [1; +\infty[\end{cases}$$

$$S(a, r) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } r \in]0; 1[\\ \emptyset & \text{si } r \in [1; +\infty[\\ E - \{a\} & \text{si } r = 1 \end{cases}$$

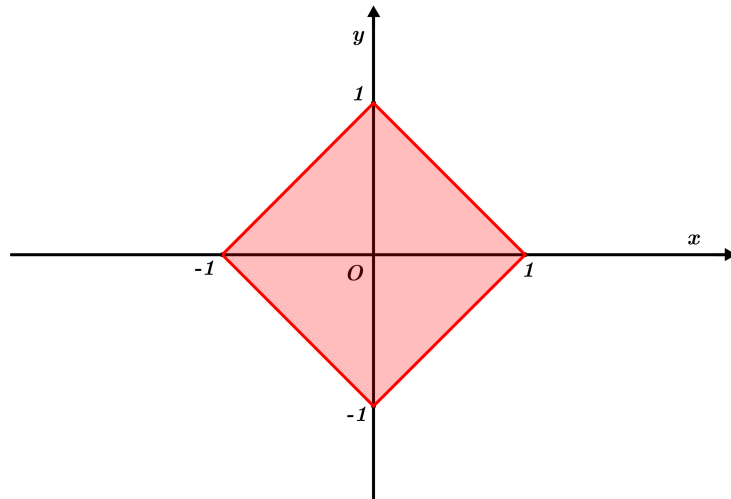
Exemple 2 : $E = \mathbb{R}^2$. On munit $\mathbb{R}^2$ des distance usuelles suivantes

Résultats : Soit $X = (x_1, x_2)$ et $Y = (y_1, y_2)$

$$d_1(X, Y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|; \quad d_2(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}; \quad d_3(X, Y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

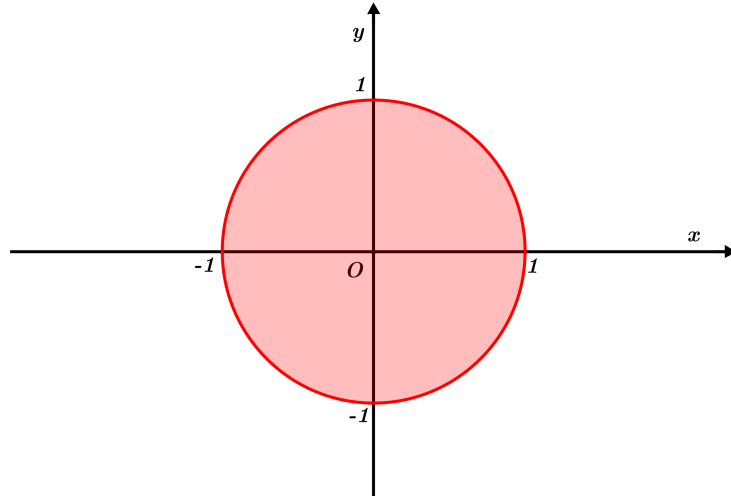
Soit $a = O = (0; 0) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} B_{d_1}(a, 1) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / d_1[O; (x, y)] < 1\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| + |y| < 1\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0, x + y < 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \leq 0, x - y < 1\} \\ &\quad \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \leq 0, y \geq 0, -x + y < 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \leq 0, y \leq 0, -x - y < 1\} \end{aligned}$$

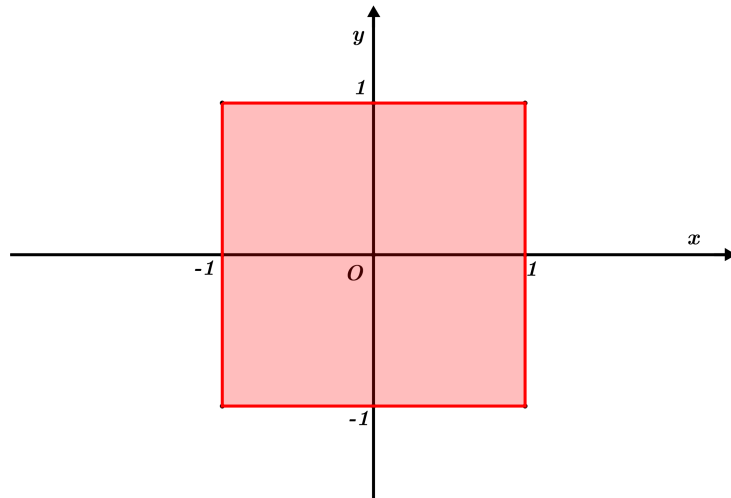


$$\begin{aligned} B_{d_2}(a, 1) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / d_2[O; (x, y)] = 1\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \sqrt{x^2 + y^2} = 1\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\} \end{aligned}$$

Ainsi $B_{d_2}(O, 1)$ est un cercle de centre $O(0; 0)$ et de rayon 1



$$\begin{aligned}
 B_{d_3}(a, 1) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / d_3[O; (x, y)] = 1\} \\
 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \max|x| + |y| = 1\} \\
 B_{d_3}(a, 1) &=]-1; 1[\times]-1; 1[
 \end{aligned}$$



1.2 Espaces vectoriels normés

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est une norme sur E si f vérifie les propriétés suivantes.

Propriétés :

- $\forall x \in E, f(x) \geq 0$ et $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$
- $\forall (x, \lambda) \in E \times \mathbb{K}, f(\lambda \cdot x) = |\lambda| \cdot f(x)$
- $\forall (x, y) \in E^2; f(x, y) \leq f(x) + f(y)$

Si f est une norme sur E alors le couple (E, f) est appelé "Espace normé"

1.2.1 Les normes usuelles de $\mathbb{R}^n$

Soit $X = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

- ① $\|X\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| = |x_1| + |x_2| + |x_3| + \cdots + |x_n|$
- ② $\|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + \cdots + |x_n|^2}$ (Norme euclidienne)
- ③ $\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|)$

Remarque : 

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel. Alors l'application

$$d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x, y) \longmapsto d(x, y) = \|x - y\|$$

est une distance sur E

Preuve : évident

Exercice : Montrer que tout espace vectoriel est un espace métrique. mais la réciproque n'est pas vraie.

On peut considérer $x \mapsto N(x) = \alpha(x, 0)$

1.2.2 Normes équivalentes

Soit f_1 et f_2 deux normes sur un même espace vectoriel.

On dit que f_1 et f_2 sont équivalentes, s'il existe deux constantes positives a et b telles que

$$\forall x \in E, a.f_1(x) \leq f_2 \leq b.f_1(x)$$

Exercice : Montrer que les normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$ sont deux à deux équivalentes

$$\|X\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}, \quad \|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|)$$

- Soit $X = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\textcircled{1} \quad \|X\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| = |x_1| + |x_2| + |x_3| + \cdots + |x_n| \text{ et } \|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + \cdots + |x_n|^2}$$

$$\text{Ainsi } \|X\|_2^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + \cdots + |x_n|^2$$

$$\forall i \in \{1; 2; \dots; n\}; \quad 0 < |x_i| \leq \|X\|_1 \implies x_i^2 \leq \|X\|_1^2$$

$$\implies \|X\|_2^2 \leq n \|X\|_1^2$$

$$\implies \|X\|_2 \leq \sqrt{n} \|X\|_1 \quad (a)$$

$$\text{De même } \forall i \in \{1; 2; \dots; n\} \quad x_i^2 \leq \|X\|_2^2 \Rightarrow |x_i| \leq \|X\|_2 \quad (b)$$

$$\text{De (a) et (b) on a : } \frac{1}{\sqrt{n}} \|X\|_2 \leq \|X\|_1 \leq n \|X\|_2 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{n} \|X\|_1 \leq \|X\|_2 \leq \sqrt{n} \|X\|_1$$

$$\textcircled{2} \quad \|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|) \text{ et } \|X\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| = |x_1| + |x_2| + |x_3| + \cdots + |x_n|$$

$$\text{On a : } \|X\|_\infty \leq |x_1| \quad (a) \quad \text{et} \quad \|X\|_1 \leq n \|X\|_\infty \Rightarrow \frac{1}{n} \|X\|_1 \leq \|X\|_\infty \quad (b)$$

$$\text{De (a) et (b) on a : } \frac{1}{n} \|X\|_1 \leq \|X\|_\infty \leq n \|X\|_1$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad \|X\|_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + \cdots + |x_n|^2} \quad \text{et} \quad \|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|) \\ \|X\|_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + \cdots + |x_n|^2} \\ &\leq \sqrt{\|X\|_\infty^2 + \|X\|_\infty^2 + \|X\|_\infty^2 + \cdots + \|X\|_\infty^2} \\ &\leq \sqrt{n} \cdot \|X\|_\infty \\ \text{De plus } \|X\|_2 &\geq \|X\|_\infty \quad \text{donc} \quad \|X\|_\infty \leq \|X\|_2 \leq \sqrt{n} \cdot \|X\|_\infty \end{aligned}$$

Théorème :

Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes

1.2.3 Boules et Sphère d'un espace vectoriel normé

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé

$$\begin{aligned} \text{Boules ouvert : } B_O(a, r) &= \{x \in \mathbb{R}^n / \|x - a\| < r\} \\ \text{Boules fermé : } B_f(a, r) &= \{x \in \mathbb{R}^n / \|x - a\| \leq r\} \\ \text{Sphère } S(a, r) &= \{x \in \mathbb{R}^n / \|x - a\| = r\} \end{aligned}$$

1.3 Sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$

On dit qu'un sous ensemble A dans $\mathbb{R}^n$ est ouvert dans $\mathbb{R}^n$ si :

- $A = \emptyset$
- $\forall x \in A, \exists r = r(x) > 0 / B(x, r) \subset A$

Exemple : $-\mathbb{R}^n$ et $\emptyset$ sont des ouverts dans $\mathbb{R}^n$
 - Toutes boules ouvert de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensembles ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Preuve :

Soit $A = B(a, R), a \in \mathbb{R}^n, R > 0$.
 Montrons que $B(a, R)$ est un ouvert dans $\mathbb{R}^n$.
 Soit $X_0 \in B(a, R)$. Posons $r = \frac{R - \|X_0 - a\|}{2} > 0$ et montrons que $B(X_0, r) \subset B(a, R)$.
 Soit $X \in B(X_0, r)$
 Montrons que $X \in B(a, R)$ c'est-à-dire que $\|X - a\| < R$
 On a : $\|X - a\| = \|(X - X_0) + (X_0 - a)\|$
 $\leq \|X - X_0\| + \|X_0 - a\|$
 $< r + \|X_0 - a\|$ car $X \in B(X_0, r)$
 $< \frac{R - \|X_0 - a\|}{2} + \|X_0 - a\|$ car $r = \frac{R - \|X_0 - a\|}{2}$
 $< \frac{R - \|X_0 - a\|}{2} + \|X_0 - a\| = \frac{R + \|X_0 - a\|}{2}$
 $< \frac{R + R}{2}$ car $X_0 \in B(a, R)$
 $\|X - a\| < R$
 Donc $\|X_0 - a\| < R$. Par suite $\|X - a\| < R$.

Donc toutes boules ouvert de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensembles ouvert de $\mathbb{R}^n$.

On appelle **topologie** sur $\mathbb{R}^n$ définie par la norme $\|\cdot\|$, l'ensemble des sous-ensembles ouverts $\mathbb{R}^n$ ou la famille des sous-ensembles ouverts $\mathbb{R}^n$

Exemple : Montrer que si $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes sur $\mathbb{R}^n$ alors elles définissent une même topologie sur $\mathbb{R}^n$

Propriétés : 

Les ouverts de $\mathbb{R}^n$ vérifient les propriétés suivantes :

(P_1) Toute réunion quelconque d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ est aussi un ouvert

(P_2) Toute intersection finie d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ est aussi un ouvert

(P_3) L'ensemble $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n$ sont des ouverts dans $\mathbb{R}^n$

Preuve :

(P_1) Soit $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}^n$

Posons $A = \cup_{i \in I} \mathcal{O}_i$. Soit $x \in A = \cup_{i \in I} \mathcal{O}_i$. Il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in \mathcal{O}_{i_0}$.

Puisque $\mathcal{O}_{i_0}$ est un ouvert, alors il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset \mathcal{O}_{i_0} \subset A$. D'où A est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

(P_2) Soit $(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \mathcal{O}_3, \dots, \mathcal{O}_n)$ une sous-famille finie d'ouverts de $\mathbb{R}^n$.

Posons $F = \cap_{i \in I} \mathcal{O}_i$. Soit $x \in F, \forall i \in \{1; 2; \dots; n\}$. Puisque $\mathcal{O}_{i_0}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n, \forall i \in \{1; 2; \dots; n\}$.

Alors il existe $r_i > 0$ tel que $B(x, r_i) \subset \mathcal{O}_i, \forall i \in \{1; 2; \dots; n\}$.

Posons $r = \inf_{1 \leq i \leq n} r_i > 0$. Alors il existe $B(x, r) \subset B(x, r_i), \forall i \in \{1; 2; \dots; n\}$.

Ce qui implique que $B(x, r) \subset F$. D'où F est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Exercice : Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$

Solution :

Soit $x \mapsto N(x) =]x - r, x + r[$

$$\begin{aligned}]a, b[&= B(x_0, r) \\ &= \{x \in \mathbb{R} / |x - x_0| < r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / -r + x_0 < x < r + x_0\} \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{cases} x_0 - r = a \\ x_0 + r = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \frac{b-a}{2} > 0 \\ x_0 = \frac{a+b}{2} \end{cases}$$

Donc $]a, b[= B\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$

Soit $x \in]a, b[$ on cherche $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset]a, b[$

$$\begin{aligned} B(x, r) &= \{y \in \mathbb{R} / |x - y| < r\} \\ &=]-r + x, r + x[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a < x - r < x < x + r < b &\Rightarrow \begin{cases} 0 < r < a - x \\ 0 < r < b - x \end{cases} \\ &\Rightarrow r =]0; \min(a - x, b - x)[\end{aligned}$$

1.4 Recouvrement d'ouvert

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ ($A \subset \mathbb{R}^n$). On dit qu'une famille $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ est un recouvrement de A si

- $(\mathcal{O}_i) \subset \mathbb{R}^n, \forall i \in I$,
- $A \subset \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$
- Si de plus $\mathcal{O}_i$ est un ouvert dans $\mathbb{R}^n, \forall i \in I$, alors le recouvrement est dit ouvert.
- Si de plus l'ensemble des indices I est fini alors le recouvrement est dit fini.
- $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ est un recouvrement de A alors $\exists j \in J$ tel que $J \subset I$ et $A \subset \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$, la famille $(\mathcal{O}_i)_{j \in J}$ est appelée sous-recouvrement de A .

1.5 Voisinage d'un point

Soit $X_0 \in \mathbb{R}^n$. On dit qu'un sous-ensemble A est un voisinage du point X_0 dans $\mathbb{R}^n$ s'il existe une boule ouverte centrée en X_0 et contenue dans A .

Remarque : A est ouvert dans $\mathbb{R}^n$ si et seulement si A est voisinage de chacun de ses points.

Propriétés : 

Soit $X_0 \in \mathbb{R}^n$

(P₁) Toute réunion quelconque de voisinage X_0 est un voisinage de X_0 .

(P₂) Toute intersection fini de voisinage de X_0 est un voisinage de X_0 .

(P₃) Si $\mathcal{V}$ est un voisinage de X_0 et $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}'$ alors $\mathcal{V}'$ est un voisinage de X_0 .

1.6 Sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}^n$

Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est un fermée dans $\mathbb{R}^n$ si son complémentaire $C_{\mathbb{R}^n}^A$ est un ouvert dans $\mathbb{R}^n$.

- Exemple :**
- Tout singleton est fermée dans $\mathbb{R}^n$.
 - $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n$ sont des fermées de $\mathbb{R}^n$.
 - Les boules fermées sont des sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}^n$.

Résolution

Soit $a \in \mathbb{R}$ alors $\{a\}$ est un fermé.

En effet $C_{\mathbb{R}^n}^{\{a\}} =]-\infty, a[\cup]a, +\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

De manière générale.

Si $a \in \mathbb{R}^n$ alors $\{a\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$

$n = 2$ et $a = (a_1, a_2)$

$$\begin{aligned}
 C_{\mathbb{R}^2}^{\{a\}} &= \{X \in \mathbb{R}^2 / x \neq \mathbb{R}\} \\
 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x, y) \neq (a_1, a_2)\} \\
 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq a_1 \text{ ou } y \neq a_2\} \\
 &= (\mathbb{R} - \{a\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \mathbb{R} - \{a\}) \\
 &= (] - \infty, a_1[\times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times]a_1, +\infty[) \cup (\mathbb{R} \times] - \infty, a_2[) \cup (\mathbb{R} \times]a_2, +\infty[)
 \end{aligned}$$

Propriétés :

Soit $X_0 \in \mathbb{R}^n$

- (P₁) Toute réunion fini de fermé de $\mathbb{R}^n$ est fermé dans $\mathbb{R}^n$.
- (P₂) Toute intersection quelconque de fermé de $\mathbb{R}^n$ est fermé dans $\mathbb{R}^n$
- (P₃) ϕ et $\mathbb{R}^n$ sont des fermées de $\mathbb{R}^n$.

1.7 Intérieur

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ et $X_0 \in \mathbb{R}^n$

➤ On dit que X_0 est un point intérieur lorsque

$$\exists \alpha > 0 / B(X_0, \alpha) \subset A$$

➤ $\text{int}(A)$ est appelé intérieur de A

Ainsi $x \in \text{int}(A) \Leftrightarrow x$ est un point intérieur à A
 $\Leftrightarrow \exists \alpha > 0 / B(x, \alpha) \subset A$

Propriétés :

- (P₁) $\text{int}(A) \subset A (x \in \text{int}(A) \Rightarrow x \in B(x, \alpha) \subset A)$
- (P₂) $\text{int}(A)$ est la réunion de tous les ouverts contenus dans A
- (P₃) $\text{int}(A)$ est le plus grand ouverts contenus dans A c'est-à-dire Ω est ouvert et $\Omega \subset A$ alors $\Omega \subset \text{int}(A)$
- (P₄) A est ouvert $\Leftrightarrow \text{int}(A) = A$

Exemple : $\text{int}(]a, b[) = \text{int}(]a, b]) = \text{int}([a, b[) =]a, b[$

1.8 Extérieur d'un ensemble

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, $\text{ext}(A) = \bigcup_{\mathbb{R}^n}^o A$

Exemple : $\text{ext}(]a, b[) =]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$

1.9 Adhérence ou fermeture d'une partie

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}^n$.

➤ On dit qu'un points $a \in \mathbb{R}^n$ est adhérent à A si toute boule ouverte centrée en A . C'est-à-dire

$$\forall \alpha > 0, B(a, \alpha) \cap A \neq \phi$$

➤ $\overline{A}$ ou $\text{adh}(A)$ est appelé Adhérence de A

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall \alpha > 0, B(x, \alpha) \cap A \neq \phi$$

Remarque : $\forall a \in A$ et $\forall \alpha > 0, B(a, \alpha) \cap A \neq \phi$ donc $A \subset \overline{A}$

Propriétés :

- (P₁) $\bar{A}$ est appelé adhérence et est l'intersection de toutes les parties fermées de $\mathbb{R}^n$
- (P₂) F est un fermé et $A \subset F$ alors $\bar{A} \subset F$
- (P₃) A est fermé $\Leftrightarrow \bar{A} = A$

Exercice : Montrer que $\mathring{\mathbb{Q}} = \phi$ et $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

Résolution :

(a) $\mathring{\mathbb{Q}} = \phi$

Supposons que $\mathring{\mathbb{Q}} \neq \phi$ et $a \in \mathring{\mathbb{Q}}$

$$a \in \mathring{\mathbb{Q}} \iff \exists \alpha > 0 / B(a, \alpha) \subset \mathbb{Q}$$

$$\iff \exists \alpha > 0 /]a - \alpha; a + \alpha[\subset \mathbb{Q}$$

Ce qui est absurde car $]a - \alpha; a + \alpha[$ contient des nombres irrationnels. Donc $\mathring{\mathbb{Q}} = \phi$

(b) $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

$\bar{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{R}$ ①

Montrons que $\mathbb{R} \subset \bar{\mathbb{Q}}$

Soit $x \in \mathbb{R}$ alors $\exists \alpha > 0, B(x, \alpha) =]x - \alpha; x + \alpha[$ contient des nombres irrationnels.

Donc $]x - \alpha; x + \alpha[\cap \mathbb{Q} \neq \phi \implies x \in \bar{\mathbb{Q}}$ ②.

De ① et ② on a alors $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

Remarque :

$(\bar{A}, F_r(A), \text{Ext}(A))$ constitue une partition de $\mathbb{R}^n$

1.10 Parties bornées de $\mathbb{R}^n$

Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est dite bornée dans $\mathbb{R}^n$ s'il existe $M > 0$ tel que

$$\forall X \in A, \|X\| \leq M.$$

De façon équivalente, A est bornée dans $\mathbb{R}^n$ si A est contenue dans une boule centrée en origine. C'est-à-dire

$$\exists \alpha > 0 / A \subset B(0_{\mathbb{R}^n}, \alpha)$$

Exemple :

1. Tout sous-ensemble fini de $\mathbb{R}^n$ est borné dans $\mathbb{R}^n$.

En effet $A = \{X_1, X_2, \dots, X_n\} \subset \mathbb{R}^n$. On prend $M = \sup_{1 \leq i \leq n} \|X_i\|$. On a $\forall X \in A, \|X_i\| \leq M$

2. Toute boule de $\mathbb{R}^n$ est partie bornée dans $\mathbb{R}^n$.

En effet $A = B(X_0, R) \subset \mathbb{R}^n$. On a $\|X - X_0\| \leq R$. D'après la deuxième inégalité triangulaire on a :

$$\|X\| - \|X_0\| \leq R \Rightarrow \|X\| \leq R + \|X_0\|$$

Posons $M = R + \|X_0\|$. On a ainsi $\forall X \in A, \|X_i\| \leq M$

1.11 Point d'accumulation

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}^n$.

On dit que X_0 est un point d'accumulation de A si toute boule ouverte centrée en X_0 rencontre A en des points autres que X_0 . C'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{l} X_0 \in A \\ \forall \mathcal{V} \text{ voisinage de } X_0; \mathcal{V} \cap A = \{X_0\} \end{array} \right\} \iff \text{voisinage de } X_0; (\mathcal{V} \setminus \{X_0\}) \cap A \neq \emptyset$$

Exemple : $A = \left\{ \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^* \right\}$

Montrons que $x_0 = \frac{1}{2}$ est un point adhérent à A . Il suffit de montrer que $B(\frac{1}{2}, \alpha) \cap A \neq \emptyset, \forall \alpha > 0$.

$$B(\frac{1}{2}, \alpha) =]\frac{1}{2} - \alpha; \frac{1}{2} + \alpha[$$

On cherche $n_0 \in \mathbb{N}^* / \frac{1}{2} - \alpha < \frac{1}{n_0} < \frac{1}{2} + \alpha$

$$A = \left\{ n \in \mathbb{N} / \frac{2}{2\alpha + 1} \right\}$$

$$\text{D'après Archimède } A \neq \emptyset, B = \left\{ n \in \mathbb{N} / \frac{2}{1 - 2\alpha} \right\} = \begin{cases} \{1; 2; \dots\} & \text{si } \alpha \in]0, \frac{1}{2}[\\ \emptyset & \text{si } \alpha \in]\frac{1}{2}, +\infty[\end{cases}$$

1^{er} Cas : $\alpha > \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \alpha > \frac{1}{2} &\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}^*; n_0 > \frac{2}{2\alpha + 1} \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} - \alpha < 0 < \frac{1}{n_0} < \frac{1}{2} + \alpha \end{aligned}$$

2^e Cas : $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$

$$1 < \frac{2}{2\alpha + 1} < n_0 < \frac{2}{1 - 2\alpha}; \quad \frac{2}{2\alpha + 1} - 1 = \frac{1 - 2\alpha}{2\alpha + 1} > 0 \text{ Ainsi } A \cap B \neq \emptyset$$

$$B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) =]0; 1[; \quad \forall n \in \mathbb{N}^* 0 < \frac{1}{n} < 1 \text{ Donc }]0, 1[\cap A \neq \emptyset$$

1.12 Suite dans $\mathbb{R}^n$

1.12.1 Suite numérique

$$\begin{aligned} \text{Soit } I \subset \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ n &\longmapsto \mathcal{U}(k) \equiv \mathcal{U}_k = (\mathcal{U}_k^1, \mathcal{U}_k^2, \mathcal{U}_k^3, \dots, \mathcal{U}_k^n) \end{aligned}$$

Exemple : $\mathcal{U}_n = (\frac{1}{n}, e^{-n}, 2n + 1)$ est une suite de $\mathbb{R}^3$

1.12.2 Suite bornées dans $\mathbb{R}^n$

Soit $I \subset \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$n \longmapsto \mathcal{U}_k$ une suite de $\mathbb{R}^n$

On dit que la suite $\mathcal{U}$ est bornée dans $\mathbb{R}^n$ s'il existe une constante $M > 0$ telle que $\forall k \in I, \|\mathcal{U}_k\| \leq M$.

Proposition : 

Une suite $(\mathcal{U}_k)_{k \in I}$ est bornée dans $\mathbb{R}^n$ si et seulement si ses suites composantes sont bornées dans $\mathbb{R}^n$

Preuve :

Considérons la norme $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$

$\forall k \in I, \|\mathcal{U}_{ik}\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |\mathcal{U}_{ik}|$ où $\mathcal{U}_k = (\mathcal{U}_{1k}, \mathcal{U}_{2k}, \dots, \mathcal{U}_{nk}) \in \mathbb{R}^n, \forall k \in I, \|\mathcal{U}_k\|_\infty \leq M$

Alors la suite $(\mathcal{U}_{ik})_{k \in I}, i = \{1, 2, \dots, n\}$ est bornée dans $\mathbb{R}$

Réciproquement si $i = \{1, 2, \dots, n\}$, alors les suites $(\mathcal{U}_{ik})_{k \in I}$ sont bornées dans $\mathbb{R}$ par $M_i > 0$.

En posant $M = \sup_{1 \leq i \leq n} M_i$, on a bien $\forall k \in I, \|\mathcal{U}_k\| \leq M$ c'est-à-dire la suite $(\mathcal{U}_k)_{k \in I}$ est bornée dans $\mathbb{R}^n$.

1.13 Les parties compactes $\mathbb{R}^n$

On dit que A est une partie compacte si $\forall (\mathcal{O}_i)_{i \in I} / A \subset \cup_{i \in I} \mathcal{O}_i$

Soit J une partie fini de I , $\exists j \in J \subset I / A \subset \cup_{ij \in J} \mathcal{O}_j$

1.14 Les parties connexe

On dit que A est une partie compacte si $\forall \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 / \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$

$A = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2 \implies \mathcal{O}_1 = \emptyset$ ou $\mathcal{O}_2 = \emptyset$

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b$

$x \in [a, b] \iff \exists t \in [0, 1] / x = ta + (1 - t)b$

Exemple : Soit $B(O, 1) \in \mathbb{R}^n$, $O = 0_{\mathbb{R}^n}$. Montrer que $B(O, 1)$ est une partie connexe de $\mathbb{R}^n$.

Soit $u, v \in B(O, 1)$ c'est-à-dire $\|u\| < 1$ et $\|v\| < 1$

Soit $x \in [u, v]$, montrons que $x \in B(O, 1)$.

$x \in [u, v] \implies \exists t \in [0, 1] / x = tu + (1 - t)v$

$$\begin{aligned} \|x\| &= \|tu + (1 - t)v\| \\ &\leq \|tu\| + \|(1 - t)v\| \\ &\leq t\|u\| + (1 - t)\|v\| \\ &< t + (1 - t) = 1 \\ \|x\| &< 1 \end{aligned}$$

On a montré que $x \in B(O, 1)$. Donc $B(O, 1)$ est une partie connexe de $\mathbb{R}^n$.

Deuxième partie

Fonctions : Continuité et différentiabilité

mail@idean

Fonctions de plusieurs variables, continuités et différentiabilités

2.1 Fonctions de plusieurs variables

Définition :

- (1) Soit U un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ (avec $U \neq \emptyset$)
 Une application $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée **Fonctions de plusieurs variables**
 (2) Une application $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est appelée **Fonctions vectorielle à n variables**

Propriétés : 

$$\begin{aligned} f : U \subset \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) &\longmapsto f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Exemple : $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y, z) \longmapsto f(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^5$$

2.1.1 Ensemble image

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

On appelle l'ensemble image de U par f l'ensemble noté $f(U)$ tel que

$$f(U) = \{f(x), x \in U\}$$

f est bornée si $f(U)$ est une partie bornée de $\mathbb{R}^m$. C'est-à-dire

$$\exists M > 0 / f(U) \subset B(O, M)$$

Ainsi f est bornée $\iff \exists M > 0 / \forall x \in U, |f(x)| \leq M$

2.1.2 Graphe d'une fonction

- (1) Soit $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $D_f \subset \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} Gr(f) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = f(x), x \in D_f\} \\ Gr(f) &= \{(x, f(x)) / x \in D_f\} \end{aligned}$$

- (2) $U \subset \mathbb{R}^2$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} Gr(f) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = f(x, y)\} \\ Gr(f) &= \{(x, y, f(x, y)) / (x, y) \in U\} \end{aligned}$$

- (3) D'une manière générale $U \subset \mathbb{R}^n$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$

$$Gr(f) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / f(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$$

2.1.3 Ligne de niveau

Soit $\gamma \in \mathbb{R}$ et $U \subset \mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$.

On appelle Ligne de niveau γ l'ensemble noté $\mathcal{C}_\gamma$ tel que :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_\gamma &= \{x \in U / f(x) = \gamma\} \\ &= f^{-1}(\{\gamma\})\end{aligned}$$

Exemple : $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto x^2 - 2x + y^2 + y + 3$$

Déterminer les lignes de niveau γ

2.1.4 Fonctions homogènes

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que est **homogène** de degré λ si

$$\forall x \in U \quad \text{et} \quad \forall \beta \in \mathbb{R}; f(\beta \cdot x) = \beta^\lambda f(x)$$

Exemple : $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto 3x^3 - 3y^3 + \frac{x^2y^2 + y^4}{2x - 3y}$$

Montrer que f est homogène de degré à préciser.

2.2 Fonction continue

2.2.1 Continuité des fonctions à une variable

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$

On dit qu'une fonction f est continue en a si :

$$(1) \quad a \in D_f$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \text{ c'est-à-dire :}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / (x \in D_f \quad \text{et} \quad |x - a| < \delta) \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Exemple : $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que f est continue en 0

2.2.2 Continuité des fonctions à plusieurs variables

Soit $f : \mathbb{R}^n \subset U \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction quelconque et $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

On dit qu'une fonction à plusieurs variable est continue x_0 si

$$(1) \quad x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in U$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \text{ c'est-à-dire :}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / (x \in U \quad \text{et} \quad \|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n} < \delta) \implies \|f(x) - f(x_0)\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon$$

Exemple : $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto \frac{\ln(1 + xy^2)}{x^2 + y^2}$$

1. a. Déterminer le domaine de définition de f
 b. La fonction est-elle continue en tout points intérieur de son ensemble de définition ?
 c. Calculer

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$$

- d. Peut-on prolonger f par continuité en $(0,0)$
2. Même questions avec la fonction g définie par :

$$g(x,y) = \frac{\ln(1+xy)}{x^2+y^2}$$

Propriétés :

Une fonction est continue sur un ensemble E si elle est continue en chaque point de l'ensemble E .

L'ensemble des fonctions continues sur E est noté $\mathcal{C}^0(E)$ ou f est de classe $\mathcal{C}^0$ E .

2.2.3 Fonction lipschitzienne de rapport k

Soit $f : \mathbb{R}^n \subset U \rightarrow \mathbb{R}^n$. On dit que f est lipschitzienne de rapport k ou k -lipschitzienne si

$$\exists k > 0, \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Si $0 < k \leq 1$ alors f est contractante.

Exemple : $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \subset U \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$, est 1-Lipschitzienne. Car on a :

$$\| \|x\| - \|y\| \| \leq \|x - y\|$$

2.2.4 Continuité uniforme

Soit $f : \mathbb{R}^n \subset U \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est uniformément continue sur U si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall x, y \in U, \|x - y\| \leq \alpha \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Théorème :

(P_1) Tout application uniformément continue est continue. Mais la réciproque n'est pas toujours vraie

(P_2) Soit E une partie compacte de $\mathbb{R}^n$. Alors toute application continue sur E est uniformément continue sur E

2.3 Différentiabilité

2.3.1 Application partielles

Soit l'application $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

On appelle application partielle en $x_k, k \in \{1, 2, \dots, n\}$, l'application f_k telle que

$$\begin{aligned} f_k : U \subset \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ x_k &\mapsto f(x_k) = f_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Exemple : $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = 3x^3 - 3y^3 - 2xyz + z^2$

2.3.2 Dérivées partielles

La dérivée partielle lorsqu'elle existe est la limite du taux de variation de f au point x_0 définie par

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$$

Le réel $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$ est appelé la dérivée partielle par rapport à la variables x au point x_0

Exemple : Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

- Calcul de la dérivée partielle par rapport aux variables x_i

Le calcul de la dérivée partielle de f par rapport à la variables x_i consiste à faire la dérivée de l'expression en considérant que les autres variables différente x_i sont des constantes.

Exemple : $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = 3x^2 - 5x^4y + 4z^3$$

Déterminer les dérivée partielle de f au point $X = (x_0, y_0, z_0)$

- Calcul des dérivées partielles d'ordre 2 de f par rapport x

Exemple : Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto f(x, y), \quad X_0 = (a, b)$$

Supposons que $\frac{\partial f}{\partial x}(X_0) \in \mathbb{R}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(X_0) \in \mathbb{R}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(a+t, b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)}{t}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(a+t, b) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)}{t}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(a, b+t) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)}{t}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(X_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(a, b+t) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)}{t}$$

Exemple : Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) = 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$, et $\frac{\partial f}{\partial y \partial x}(0, 0)$

2.3.3 Application de classe $\mathcal{C}^1$

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une application.

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U , si $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ de f , sont des applications définies, continues en tout point de U (U ouvert de $\mathbb{R}^n$).

Cas général : On dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur U , si $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ les dérivées partielles de tout ordre $\frac{\partial^n f}{\partial x_i^n}$ de f existe et sont des applications définies, continues en tout point de U (U ouvert de $\mathbb{R}^n$).

2.3.4 Dérivée directionnelle

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une application, où U ouvert de $\mathbb{R}^n$ puis $a \in \mathbb{R}^n U$ et $u \in \mathbb{R}^n$.

La dérivée de f au point $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ dans la direction du vecteur u notée $D_u f(a)$, lorsqu'elle existe est définie par :

$$D_u f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tu) - f(a)}{t}$$

En particulier, si on muni $\mathbb{R}^n$ de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, on a :

$$\begin{aligned} D_{e_i} f(a) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + t, \dots, a_n) - f(a)}{t} \\ D_{e_i} f(a) &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \end{aligned}$$

Exemple : Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto x^2 - 2xy^3, \quad u = (a, b) \text{ et } X_0 = (x_0, y_0)$$

Montrer que f admet des dérivées directionnelles dans toutes les directions.

2.3.5 Différentielle d'une fonction en un point

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in U$. On suppose que f admet des dérivées partielles par rapport à chaque variable x_i au point a .

On appelle alors différentielle de f au point a , l'application linéaire notée df_a ou $df(a)$ définie par :

$$\begin{aligned} df_a : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ h &\mapsto df_a(h) \end{aligned}$$

$$\text{avec } h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \text{ et } df_a(h) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + h_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

$$\text{alors } df_a(h) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Remarque :

- (R₁) La différentielle de f en a est donc une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire une application linéaire de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.
- (R₂) L'ensemble des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ est appelé **l'espace dual** de $\mathbb{R}^n$ et est noté $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$
- (R₃) Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto d_{x_i}(x) = x_i$
 d_{x_i} est une forme linéaire et on a :
- $$df_a(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) d_{x_i}(h) = \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) d_{x_i} \right] (h)$$

Exemple : Soit

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \text{ où les } (\alpha_i), i \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ sont des constantes réelles.}$$

Déterminer df_a pour tout $a \in \mathbb{R}^n$.**2.3.6 Différentiabilité au sens de Fréchet**Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in U$.On dit que f est différentiable au sens de Fréchet ou différentiable au point x_0 , s'il existe une application linéaire

$$L_{x_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$h \mapsto L_{x_0}(h); \quad L_{x_0} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

et une application $\varepsilon : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$h \mapsto \varepsilon(h), \quad \text{telle que}$$

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, f(x_0 + h) = f(x_0) + L_{x_0}(h) + \|h\| \varepsilon(h) \quad \text{avec } \lim_{h \rightarrow 0_{\mathbb{R}^n}} \varepsilon(h) = 0$$

L'application linéaire L_{x_0} est appelée différentielle de f en $x_0 : L_{x_0} \equiv df_x$.D'une manière générale, si $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ et $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$, alors f est différentiable en a si et seulement si :

$$f(a + h) = f(a) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \|h\| \varepsilon(h) \quad \text{avec } \lim_{h \rightarrow 0_{\mathbb{R}^n}} \varepsilon(h) = 0$$

Exemple : Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto x^2 + y^2,$$

Montrer que f est différentiable en tout point $x_0 = (a, b)$

Remarque :

(R₁) Le symbole $\|h\|$ désigne la norme de h pour une norme quelconque choisie dans $\mathbb{R}^n$

(R₂) On dira que f est différentiable sur U , si f est différentiable en chaque point de U .

(R₃) Toute fonction différentiable en a est continue en a , mais la réciproque n'est pas toujours vraie.

(R₃) L'existence de toutes les dérivées partielles au point a n'implique pas que f est différentiable au point a .

Exemple :

1. Soit

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto \begin{cases} f(x, y) = \frac{x^5}{y - x^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) = 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Montrer que f n'est pas continue au point $(0, 0)$, par conséquent f n'est pas différentiable au point $(0, 0)$.

Mais on a : $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$

2. Soit $f(x, y) = 2x^2y^2$. Démontrer que f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}$

Remarque :

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$.

Alors $\forall a \in U$ et $\forall h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ telle que $(a + h) \in U$, on a :

$$f(a + h) = f(a) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a) + \mathcal{O}(\|h\|) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \rightarrow 0_{\mathbb{R}^n}} \frac{\mathcal{O}(\|h\|)}{\|h\|} = 0$$

Application :

Donner une valeur approchée de $A = (1, 02)^{1,99}$ et $B = (0, 95)^{2,01}$ en utilisant le développement limité de la fonction f définie sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ telle que $f(x, y) = x^y = e^{y \ln x}$.

2.3.7 Vecteur gradient

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in U$. On suppose que f est différentiable en a . Le vecteur notée

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a); \dots; \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

est appelé gradient de f en a . Soit $h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\nabla f(a) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = df_a(h)$$

Ainsi si f est différentiable on a :

$$f(a + h) = f(a) + (\nabla f)(a) \cdot h + \|h\| \varepsilon(h)$$

avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$

2.3.8 Différentielle de la composée de deux applications

Soit f et g deux applications telles que : f différentiable au point x et g différentiable au point $f(x)$ alors $g \circ f$ est différentiable au point x et on a :

$$d(g \circ f)_x = dg[f(x)] \circ df_x$$

(a) Si $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, alors on a :

$$d(g \circ f)_x = g'[f(x)] \cdot df_x$$

$$\nabla(g \circ f)_x = g'[f(x)] \cdot \nabla df_x$$

(b) Si $h(x) = \frac{1}{f(x)}$ alors

$$\nabla h_x = \frac{1}{[f(x)]^2} \cdot \nabla f_x$$

(c) Si $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, alors on a : Règle de la chaîne suivante

$$\frac{\partial}{\partial x_i} [g \circ f]_x = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_j}[f(x)]$$

En posant $h(x) = g \circ f(x) = g[f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)]$, on obtient :

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_1}[f(x)] + \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(x) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_2}[f(x)] + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(x) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_n}[f(x)]$$

Application : On donne

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)) \\ g : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f(t) &\longmapsto g[f(t)] \end{aligned}$$

$$h : \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R} \text{ telle que } t \longmapsto h(t) = g[f(t)] = g[f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)]$$

On a :

$$h'(t) = f'_1(t) \frac{\partial g}{\partial x_1}[f(t)] + f'_2(t) \frac{\partial g}{\partial x_2}[f(t)] + \dots + f'_n(t) \frac{\partial g}{\partial x_n}[f(t)]$$

Exemples :

(1) Soit $t \in [0; 1]$.

On donne :

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto h(t) = [x_1(t), y_2(t), z_n(t)] = (t, t^2, t^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longmapsto g(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{aligned}$$

Posons $f = g \circ h$, déterminer f et en déduire f'

(2) Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et φ la fonction définie :

$$\begin{aligned} F :]0, +\infty[\times]0, 2\pi[&\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) &\longmapsto (r \cos \theta, r \sin \theta) \end{aligned}$$

On pose $F(r, \theta) = f(x, y)$ avec $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$

Déterminer $\frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta)$ et $\frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta)$

2.3.9 Dérivées partielles d'ordre supérieur

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Si les dérivées partielles de f en un point a admettent des dérivées partielles en ce point ses dérivées partielles sont appelés dérivées secondes de f au point a .

Ainsi

$$(1) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \right](a)$$

$$(2) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial f}{\partial x_j} \right](a)$$

$$(3) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \right](a)$$

2.3.10 Matrice Jacobienne

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$$

une application telle que U est un ouvert et

$$\begin{aligned} f_i : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f_i(x) \end{aligned}$$

Si f est différentiable en un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$, alors la différentielle de f en x_0 est une matrice de dimension $m \times n$ dont les élément de la ligne i et de la colonne j est donné par $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)$.

En général, on a :

$$df_{x_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

Cette matrice est appelée matrice jacobienne de f en x_0 . Le jacobien de f en x_0 est la valeur absolue du déterminant de la matrice jacobienne de f en x_0 . Dans le cas où $m = n$, le jacobien est noté $\mathcal{J}$ et on a :

$$\mathcal{J}_f(x_0) = |\det(df_{x_0})|$$

-La matrice Jacobienne de la composée de deux applications

Soit f et g deux application telles que $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}$

$$d[g \circ f](a) = dg[f(a)]df(a)$$

Sous forme matricielle on a :

$$\mathcal{J}_{(g \circ f)}(a) = \mathcal{J}_g[f(a)] \times \mathcal{J}_f(a)$$

2.3.11 Difféomorphisme

Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. On pose $\mathcal{V} = f(\mathcal{U})$. On dit que f est difféomorphisme de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{V}$ si :

- (1) f est bijective
- (2) $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U})$
- (3) $f^{-1} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{V})$

Propriétés : 

Si $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ est difféomorphisme alors ,

$$\forall x \in \mathcal{U}, [f^{-1} \circ f](x) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathcal{V}, [f \circ f^{-1}](x) = x$$

$$\forall x \in \mathcal{U}, \mathcal{J}_{(f^{-1} \circ f)}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}_n$$

$$\mathbb{I}_n = \mathcal{J}_{f^{-1}}[f(x)] \times \mathcal{J}_f(x) \quad \forall x \in \mathcal{U}$$

2.3.12 Théorème de Schwartz

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$. Alors on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j \partial x_i} \quad \forall i, j \in \{1; 2; \cdots; n\}$$

Ce résultat nous montre que la matrice des dérivées partielles d'ordre 2 au point x est, noté

$$d^2 f_x \equiv \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) \forall i, j = \{1; 2; \cdots; n\}$$

est une matrice symétrique.

On l'appelle la matrice hessienne de f au point x . On a :

$$Hess_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

2.3.13 Différentiabilité au sens de Gâteaux

Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$. On dit que f est différentiable au sens de Gâteaux en un point $x_0 \in \mathcal{U}$, si pour tout $v \in \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$, f admet une dérivée directionnelle en x_0 noté $D_v f(x_0)$ suivant la direction du vecteur v . C'est-à-dire :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} \in \mathbb{R}$$

De plus l'application

$$\begin{aligned} \varphi_{x_0} : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \varphi_{x_0}(v) = D_v f(x_0) \end{aligned}$$

est une application linéairement continue.

Proposition :

Soit une application f

-Si f est différentiable au sens de Fréchet en point x_0 , alors elle est différentiable au sens de Gâteaux en ce point

-L'existence des dérivées directionnelles de f en un point x_0 n'entraîne pas toujours f est Gâteaux-différentiable, ni Fréchet-différentiable

-Une application peut être Gâteaux-différentiable en un point sans être Fréchet-différentiable en ce point.

Exemple :

1. On donne

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto \begin{cases} f(x, y) = \frac{x(x^2 - 3y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) = 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Vérifier que f admet des dérivées directionnelles en $(0, 0)$ c'est-à-dire différentiable au sens de Fréchet, mais n'est pas différentiable au sens de Gâteaux au point $(0, 0)$.

2. On donne

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto \begin{cases} f(x, y) = \frac{x^6}{x + (y - x^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) = 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Vérifier que f est Gâteaux-différentiable en $(0, 0)$, mais n'est pas différentiable en $(0, 0)$

2.3.14 Théorème d'inversion locale

Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $a \in \mathcal{U}$ telle que $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U})$ et $\mathcal{J}_f(a)$ soit inversible. Alors il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de a tel que f soit un difféomorphisme de $\mathcal{V}$ sur $f(\mathcal{U}) = \mathcal{V}$

Si de plus f est injective alors elle est $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $\mathcal{U}$ sur $f(\mathcal{U})$

2.4 Extrema et points critiques**2.4.1 Extrema (minimum local, maximum local, minimum global, maximum global)****Définition**

Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ et $X_0 \in \mathcal{U}$

- On dit que f présente un **minimum local** au point X_0 s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de X_0 tel que

$$\mathcal{V} \subset \mathcal{U} \text{ et } \forall X \in \mathcal{V}, f(X) > f(X_0)$$

- On dit que f présente un **maximum local** au point X_0 s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de X_0 tel que

$$\mathcal{V} \subset \mathcal{U} \text{ et } \forall X \in \mathcal{V}, f(X) < f(X_0)$$

- On dit que f présente un **minimum global** au point X_0 s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de X_0 tel que

$$\mathcal{V} \subset \mathcal{U} \text{ et } \forall X \in \mathcal{U}, f(X) \geq f(X_0)$$

- On dit que f présente un **maximum global** au point X_0 s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de X_0 tel que

$$\mathcal{V} \subset \mathcal{U} \text{ et } \forall X \in \mathcal{U}, f(X) \leq f(X_0)$$

Un extremum local est un extremum relatif (un maximum local ou un minimum local).

Un extremum absolu est un extremum global.

2.4.2 Points critiques d'une fonction de plusieurs variables

Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $X_0 \in \mathcal{U}$

On suppose que les dérivées partielles de f en X_0 existe.

On dit que X_0 est un point critique de f si

$$(\nabla f)(X_0) = 0_{\mathbb{R}^n} \implies \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0); \frac{\partial f}{\partial x_2}(X_0); \dots; \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0) \right) = 0_{\mathbb{R}^n}$$

$$\implies \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(X_0) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0) = 0 \end{cases}$$

Remarque : 

Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $X_0 \in \mathcal{U}$

Si f est différentiable en X_0 et f présente en X_0 un extremum local alors X_0 est un point critique de f

Commentaire :

- Les éventuels extréma de la fonction f sont à rechercher parmi ses points critiques de f .
- Par contre, un point critiques de f n'est pas nécessairement un extremum pour f .
- Un point critiques de f qui n'est pas un extrémum est appelé **point-selle** ou **col**

2.5 Matrice hessienne

Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $X_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{U}$

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ dans un voisinage de X_0 .

On appelle **matrice hessienne** de f au point X_0 , la matrice notée $Hess_f(X_0)$.

$$Hess_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Le **hessien** de f est le déterminant de la matrice hessienne.

En posant $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_0)$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X_0)$, $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X_0)$ Alors

$$\det(Hess_f(X_0)) = rt - s^2$$

Théorème :

Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ et $X_0 \in \mathcal{U}$ un point critique de f

On pose : $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_0)$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X_0)$, $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X_0)$ et $\Delta = rt - s^2$

- (1) Si $\Delta > 0$ et $r > 0$ alors f présente un **minimum local** en X_0
- (2) Si $\Delta > 0$ et $r < 0$ alors f présente un **maximum local** en X_0
- (3) Si $\Delta < 0$ et $r > 0$ alors f présente un **point-selle** en X_0
- (4) Si $\Delta = 0$, On ne peut rien conclure. Il faut alors augmenter l'ordre du développement limité.

Exemple :

À étudier les extréma de la fonction f

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x^2 + x^2y + y^2 \end{aligned}$$

2.5.1 Extréma liés ou optimisation sans contrainte

Soit $g : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et

$$S = \{x \in \mathcal{U} / g(x) = \lambda\}$$

Posons : $P_0 \in S$ et $g(x) = \lambda$ si $f|_S$

On dit que f présente un **minimum local** en P_0 ou bien f présente un **minimum local** sous la contrainte $g(x) = \lambda$, si la restriction de f à S ($f|_S$) présente un **minimum local** en P_0

Théorème :

Soit $f, g : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ et $X_0 \in \mathcal{U}$.

On suppose que f présente en X_0 un extrémum local sous la contrainte $g(x) = \lambda$ (avec λ donné)

Si $\nabla g(X_0) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, alors il existe $k \in \mathbb{R}^n$ (Multiplicateur de Lagrange)
tel que :

$$k(\nabla g)(X_0) = (\nabla f)(X_0)$$

Commentaire :

Il faudra alors chercher les extréma de f sous la contrainte $g(x) = \lambda$ parmi les points X_0 tel que :

$$(\nabla f)(X_0) = k \nabla g(X_0) \implies \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0) = k \frac{\partial g}{\partial x_1}(X_0) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(X_0) = k \frac{\partial g}{\partial x_2}(X_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0) = k \frac{\partial g}{\partial x_n}(X_0) \end{cases}$$

Exemple :

Déterminer un parallélépipède rectangle de volume 8 et la surface minimale.

Généralisation

Soit $f, g_1, g_2, \dots, g_n : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ des applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ et $X_0 \in \mathcal{U}$.

$$S = \{x \in \mathcal{U} / g_1(x) = \lambda_1; g_2(x) = \lambda_2, \dots; g_n(x) = \lambda_n\}$$

$X_0 \in S$ tel que X_0 soit un extrémum local pour f . Alors, il existe $k_1, k_2, \dots, k_p$ appelé les multiplicateurs de Lagrange tels que

$$(\nabla f)(X_0) = \sum_{i=1}^p k_i (\nabla g_i)(X_0)$$

2.5.2 Plan tangent à une surface

Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ et $c \in \mathbb{R}$,

$$S = f^{-1}(\{c\}) = \{(x, y, z) \in \mathcal{U} / f(x, y, z) = c\}$$

$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$t \longmapsto \gamma(t) = [x_1(t), y_2(t), z_n(t)]$$

Supposons que $\forall t \in \mathbb{R}, \gamma(t) \in S$
c'est-à-dire

$$\forall t \in \mathbb{R}, f[x_1(t), y_2(t), z_n(t)] = c \implies x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}[\gamma(t)] + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}[\gamma(t)] + z'(t) \frac{\partial f}{\partial z}[\gamma(t)] = 0$$

Propriétés : 

Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ et $k \in \mathbb{R}$,

$$(S = f^{-1}(\{k\}) = \{x \in \mathbb{R}^n / f(x) = k\})$$

Soit $M_0 \in S$

Le plan tangent à S en M_0 est l'ensemble des points M tel que le vecteur $\overrightarrow{MM_0}$ soit orthogonal au gradient de f en M_0

$$M \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{MM_0} \perp (\nabla f)(M_0)$$

- Dans $\mathbb{R}^2$ on a : $(x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = 0$

- Dans $\mathbb{R}^3$ on a : $(x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) + (z - z_0) \frac{\partial f}{\partial z}(M_0) = 0$

Exemple : $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 12\}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Déterminer le plan tangent en A à S

2.6 Développement limités

2.6.1 Formule de Taylor-Lagrange

Soit $g \in \mathcal{C}^1(I)$ où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $x_0 \in I$

$$\forall x \in I, \quad \exists x_0 < \Theta < x / \sum_{k=0}^n \frac{g^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{g^{(n+1)}(\Theta)}{(n+1)!} (x - x_0)^{(n+1)}$$

En particulier $x_0 = 0$ alors

$$g(x) = g(0) + xg'(0) + \frac{x^2}{2}g''(0) + \frac{x^3}{3!}g'''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}g^{(n)}(0) + \frac{g^{(n+1)}(\Theta)}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)}$$

avec $\Theta \in]0, x[$

Généralisation

Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathcal{U}$, $X_0 = (x_0, y_0)$ et $h = (h_1, h_2)$

$$g : \begin{matrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(X_0 + th) \end{matrix}$$

$$g'(0) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(X_0) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(X_0)$$

$$g''(0) = h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_0) + 2h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X_0) + h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X_0)$$

$$g'''(0) = h_1^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(X_0) + 3h_1^2 h_2 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(X_0) + 3h_1 h_2^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(X_0) + h_2^3 \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(X_0)$$

De proche en proche on a : $f^n(0) = \left(h_1 \frac{\partial f}{\partial x} + h_2 \frac{\partial f}{\partial y} \right)^n$

Donc le développement limité d'ordre 3 de g est

$$\begin{aligned} g(x) = g(0) &+ h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(X_0) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(X_0) + h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_0) + 2h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X_0) + h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X_0) \\ &+ h_1^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(X_0) + 3h_1^2 h_2 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(X_0) \\ &+ 3h_1 h_2^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(X_0) + h_2^3 \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(X_0) + h_1^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(X_0) + 3h_1^2 h_2 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(X_0) \\ &+ 3h_1 h_2^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(X_0) + h_2^3 \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(X_0) + \frac{g^{(n+1)}(\Theta)}{(n+1)!} (x - x_0)^{(n+1)} \quad \text{avec } \Theta \in]0, x[\end{aligned}$$

Théorème :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$, $X_0 = (x_0, y_0)$ et $h = (h_1, h_2)$
Il existe $\Theta \in]0, 1[$,

$$\begin{aligned} f(X_0 + h) - f(X_0) &= g(1) - g(0) \\ &= h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(X_0) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(X_0) + \frac{1}{2!} \left[h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_0) + 2h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X_0) + h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X_0) \right] \\ &\quad + \frac{1}{3!} \left[h_1^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(X_0)(X_0 + \Theta h) + \dots + \right] \end{aligned}$$

Corollaire :

En particulier si $\begin{cases} h_1 = x - x_0 \\ h_2 = y - y_0 \end{cases}$ et $X_0 + h = (x_0, y_0) + (x - x_0, y - y_0) = (x, y)$

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(X_0) + (x - x_0)(y - y_0) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X_0) + \|(x - x_0, y - y_0)\|^2 \varepsilon(x, y) \text{ avec } \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \varepsilon(x, y) = 0$$

2.7 Théorème des fonctions implicites

 Cas de $\mathbb{R}^2$

Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$, $X_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{U}$ telle que

- (1) $f(X_0) = 0$
- (2) $\frac{\partial f}{\partial y}(X_0) \neq 0$.

Alors il existe un voisinage ouvert de x_0 noté I et un voisinage ouvert de y_0 noté J , une application $\varphi : I \longrightarrow J$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur I telle que :

$$\begin{cases} \forall (x, y) \in I \times J \\ f(x, y) = 0 \end{cases} \iff y = \varphi(x)$$

Remarque :

$$\begin{aligned} f(x, y) = 0 &\iff y = \varphi(x) \\ &\iff f[x, \varphi(x)] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } h : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto f[x, \varphi(x)] \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) &= 1, \frac{\partial f}{\partial x}[x, \varphi(x)] + \varphi'(x) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}[x, \varphi(x)]. \quad \text{De plus } \forall x \in I, \quad h(x) = 0 \implies h'(x) = 0 \\ \text{D'où } \varphi'(x) &= - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}[x, \varphi(x)]}{\frac{\partial f}{\partial y}[x, \varphi(x)]} \end{aligned}$$

Preuve :

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } h : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, y) &\longmapsto h(x, y) = [x, f(x, y)] \end{aligned}$$

$$\mathcal{J}_h(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \det[\mathcal{J}_h(x, y)] = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0$$

Alors il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de (x_0, y_0) tel que h soit un difféomorphisme de $\mathcal{U}$ sur $h(\mathcal{U})$.

Un voisinage de (x_0, y_0) est sous la forme $\mathcal{U} = I \times J$ avec I un voisinage de x_0 et J un voisinage de y_0

$$\begin{aligned} h : I \times J &\longrightarrow h(I \times J) & \text{bijective et} & \quad h^{-1} : h(I \times J) \longrightarrow I \times J \\ (x, y) &\longmapsto h(x, y) & & \quad (x, y) \longmapsto h^{-1}(x, y) = (u, v) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} h(x, y) = (a, b) \\ x \in I \\ y \in J \end{cases} \iff (x, y) = h^{-1}(a, b) \text{ Soit } (x, 0) \in h(I \times J)$$

Alors $\exists! (a, b) \in I \times J$ tel que $h^{-1}(x, 0) = (a, b)$

$$\begin{aligned} h^{-1}(x, 0) = (a, b) &\iff (x, 0) = h(a, b) \\ &\iff (x, 0) = [a, f(a, b)] \\ &\iff \begin{cases} a = x \\ f(a, b) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = x \in I \\ b = \varphi(a) = \varphi(x) \in J \end{cases} \end{aligned}$$

Exemple :

1. Enoncer le Théorème des fonctions implicites dans le cadre général.
2. Montrer que la relation $xy - \sin y + 2x - y$ définit une fonction implicite ψ de x au voisinage de $x = 0$ et $y = 0$
3. Calculer $\psi'(x)$ au voisinage de 0.
4. Montrer que ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de $x = 0$, et donner le développement limité de ψ au voisinage de 0 à l'ordre 4.

 Cas de $\mathbb{R}^3$

Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$, $X_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{U}$ telle que

- (1) $f(X_0) = 0$
- (2) $\frac{\partial f}{\partial y}(X_0) \neq 0$.

Alors il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de (x_0, y) et un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de z_0 noté J , une application $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur I telle que :

$$\begin{aligned}
\begin{cases} \forall (x, y) & \in \mathcal{U} \\ z & \in \mathcal{V} \\ f(x, y, z) & = 0 \end{cases} & \iff y = \varphi(x, y) \\
& \iff f[x, y, \varphi(x, y)], \quad \forall (x, y) \in \mathcal{U} \\
& \iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}[x, y, \varphi(x, y)] + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) \cdot \frac{\partial f}{\partial z}[x, y, \varphi(x, y)] = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}[x, y, \varphi(x, y)] + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \cdot \frac{\partial f}{\partial z}[x, y, \varphi(x, y)] = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}[x, y, \varphi(x, y)]}{\frac{\partial f}{\partial z}[x, y, \varphi(x, y)]}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}[x, y, \varphi(x, y)]}{\frac{\partial f}{\partial z}[x, y, \varphi(x, y)]}$

Remarque : $\nabla \square$

(1) Si $f(X_0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(X_0) \neq 0$ alors il existe

(a) $\mathcal{U}$ voisinage de (y_0, z_0)

(b) $\mathcal{V}$ voisinage de x_0

(c) $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ de classe $\mathcal{C}^1$ tels que

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ x \in \mathcal{V} \iff x = \varphi(y, z) \\ (y, z) \in \mathcal{U} \end{cases}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}[x, y, \varphi(x, y)]}{\frac{\partial f}{\partial z}[x, y, \varphi(x, y)]} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}[x, y, \varphi(x, y)]}{\frac{\partial f}{\partial z}[x, y, \varphi(x, y)]}$$

(2) Idem si on voulait écrire y en fonction de x et z

Exemple : On considère le système d'équation $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2z^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$

- Montrer que pour tout x proche de l'origine il existe des fonctions positives $y(x)$ et $z(x)$ telle que $[x, y(x), z(x)]$ soient solution du système.
- Déterminer $y'(x)$ et $z'(x)$ en fonction de x, y et z .

Cas général :

Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $X = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^{n+m}$

$f(X) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)]$

On suppose

- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$
- il existe $P_0 \in \mathcal{U}$ tel que $f(P_0) = 0_{\mathbb{R}^m}$ avec $P_0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, \dots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0)$

$$(3) \quad \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_m)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \frac{\partial f_m}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{vmatrix} \neq 0$$

Alors il existe

- un voisinage $\mathcal{U}$ de $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$

- (b) un voisinage $\mathcal{V}$ de $(y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0)$
- (c) une fonction $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ de classe $\mathcal{C}^1$ tels que

$$\begin{cases} f(X) = 0_{\mathbb{R}^m} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{U} \\ (y_1, y_2, \dots, y_m) \in \mathcal{V} \end{cases} \iff (y_1, y_2, \dots, y_m) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

2.8 Champs de vecteurs

Définition :

- On appelle **champ scalaire** toute application $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$
- On appelle **champ de vecteur** toute application $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

Exemple : Le champ de vecteur

- dans $\mathbb{R}^2$ est toute application telle que : $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = f_1(x, y) \cdot \vec{i} + f_2(x, y) \cdot \vec{j} \text{ avec } \vec{i} = (1, 0) \text{ et } \vec{j} = (0, 1)$$

- dans $\mathbb{R}^3$ est toute application telle que : $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = f_1(x, y, z) \cdot \vec{i} + f_2(x, y, z) \cdot \vec{j} + f_3(x, y, z) \cdot \vec{k} \text{ avec } \vec{i} = (1, 0, 0), \vec{j} = (0, 1, 0) \text{ et } \vec{k} = (0, 0, 1)$$

Définition :

Un **champ vectoriel** F pour lequel il existe une fonction f telle que $\nabla f = F$ est appelé un champ **gradient** et la fonction f est appelé **fonction potentiel** du champ F

2.9 Les opérateurs de calcul différentiel dans $\mathbb{R}^3$

2.9.1 L'opérateur nabla

L'opérateur différentiel nabla de f noté $\nabla(f)$ en dimension 3 est le vecteur défini par

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable alors

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

Donc

$$\nabla f = (\overrightarrow{grad})f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

2.9.2 L'opérateur rotationnel

Soit $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x, y, z) \longmapsto F(x, y, z) = [f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z)]$$

L'opérateur différentiel rotationnel de f noté $\overrightarrow{rot}(f)$ en dimension 3 est le vecteur défini par

$$\overrightarrow{rot}(F) = \nabla \wedge F$$

$$\vec{rot}(F) = \nabla \wedge F = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & f_1 & \vec{i} \\ \frac{\partial}{\partial y} & f_2 & \vec{j} \\ \frac{\partial}{\partial z} & f_3 & \vec{k} \end{vmatrix}$$

Donc

$$\vec{rot}(F) = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \vec{k}$$

2.9.3 L'opérateur divergence

Soit $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x, y, z) \longmapsto F(x, y, z) = [f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z)]$$

L'opérateur différentiel divergence de f noté $div(f)$ en dimension 3 est le scalaire défini par

$$\begin{aligned} div(F) &= \nabla \cdot F \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot (f_1(x, y, z) \vec{i} + f_2(x, y, z) \vec{j} + f_3(x, y, z) \vec{k}) \\ div(F) &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \end{aligned}$$

Propriétés : 

$F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et $F \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U})$ avec $\mathcal{U}$ convexe de $\mathbb{R}^3$. F est un champ de gradient si et seulement si

$$\vec{rot}(F) = \vec{0}$$

2.9.4 L'opérateur Laplacien

Soit $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y, z) \longmapsto F(x, y, z) = [f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z)]$$

L'opérateur différentiel Laplacien de f noté $\Delta(f)$ en dimension 3 est le scalaire défini par

$$\begin{aligned} \Delta f &= div.(\vec{grad} f) = \nabla \cdot (\vec{grad} f) = \nabla^2 f \\ \Delta f &= \nabla \cdot (\vec{grad} f) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} \right) \\ \Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{aligned}$$

Propriétés : 

$$(1) \quad div[\vec{rot}(F)] = 0$$

$$(2) \quad \vec{rot}[\vec{grad}(f)] = \vec{0}$$

$$\text{Dans } \mathbb{R}^2; \quad \Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$$

Exemple :

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y, z) \longmapsto f(x, y, z)$$

1. Déterminer le Laplacien en coordonnées cartésien, cylindrique et sphérique
2. Etudier le cas particulier d'une fonction radiale

2.10 Les formes différentielles

2.10.1 Rappels

- Soit f une application définie sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^3$, à valeur réelles.
La différentielle de f en un point M s'écrit : $df_M = \frac{\partial f}{\partial x}(M) + \frac{\partial f}{\partial y}(M) + \frac{\partial f}{\partial z}(M)$
- Pour tout vecteur $h = (\alpha, \beta, \gamma)$ de $\mathbb{R}^3$, la dérivée de f en M suivant h s'écrit :

$$df_M(h) = D_h f(M) = \alpha \frac{\partial f}{\partial x}(M) + \beta \frac{\partial f}{\partial y}(M) + \gamma \frac{\partial f}{\partial z}(M)$$

2.10.2 Définition d'un formes différentielles

On appelle forme différentielle sur l'ouvert $\mathcal{U}$ inclut dans $\mathbb{R}^3$ toute expression de la forme :

$$\omega(x, y, z) = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

où P, Q, R sont des applications de $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

Propriétés : 

A une forme différentielle on peut toujours associée un champ de vecteur

Ainsi, si $\omega(x, y, z) = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$

Alors $F(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$

Définition :

On dit que la forme différentielle ω est continue (respectivement de classe $\mathcal{C}^k$) si les applications P, Q, R sont continues (respectivement de classe $\mathcal{C}^1$).

2.10.3 Les forme différentielle exactes, ou fermées

1. forme différentielle exactes

Soit $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ une forme différentielle et F un champ de vecteur associé à ω .

On dit que ω est forme différentielle exacte s'il existe une application $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^{k+1}$, telle que :

$$\forall M \in \mathcal{U}, \omega(M) = df(M)$$

Cela revient à dire que le champ de vecteur F associé à ω est un champ de gradient.

$$\forall M \in \mathcal{U}, \begin{cases} P(M) = \frac{\partial f}{\partial x}(M) \\ Q(M) = \frac{\partial f}{\partial y}(M) \\ R(M) = \frac{\partial f}{\partial z}(M) \end{cases}$$

On dit que f est une primitive de ω .

2. forme différentielle fermée

Soit $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ une forme différentielle et F un champ de vecteur associé à ω .

On dit que ω est forme différentielle fermée si le rotationnel du champ de vecteur qui lui est associé est nul :

$$\vec{\text{rot}}(F) = \vec{0} \implies \begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \end{cases}$$

Propriétés :

Soit ω une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$

- Si ω est exacte, alors elle est fermée.
- La réciproque est vraie si ω est un **ouvert convexe** de $\mathbb{R}^3$

Exemple : On considère la forme différentielle définie par :

$$\omega = \frac{2x}{y} dx - \frac{x^2}{y^2} dy$$

sur $\mathcal{U} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$

1. Montrer que ω est fermé sur $\mathcal{U}$
2. Montrer deux façons différentes que ω est exacte.

mail@ideal

Troisième partie

Sommes et Séries numérique

mail@ideal

Sommes de Riemann

3.1 Rappel sur les sommes de Riemann

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable et $\sigma = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ une subdivision de $[a, b]$; et $c_i \in [x_i, x_{i+1}]$

$$R_n(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(c_i)$$

Thérème : 

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(f) = \int_a^b f(x) dx$$

Application

Pour n fixé mais quelconque on prend

$$\begin{cases} x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}, & n \in \mathbb{N}^* \\ x_0 = a \\ c_i = x_i \end{cases}$$

$\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}; \quad x_k = a + \frac{(b-a)k}{n}$ on a :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(b-a)}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + \frac{(b-a)i}{n}\right) \right]$$

Exemple :

Calculer les limites des suites suivantes :

- (a) $\frac{\sqrt{1}}{n\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{n}} + \dots + \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$
- (b) $\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$
- (c) $\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n^n \cdot n!}}$

Séries Numériques

4.1 Généralités

Définition 4.1.1

Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels, on pose :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

La limite de S_n est appelé série de terme général u_n .
 $(S_n)_n$ est appelée suite des sommes partielles de la série.

Notation : Une série de terme général u_n est notée $\left(\sum_{n \geq 0} u_n\right)$ ou $\left(\sum_{n \geq 0} u_n\right)$

4.2 Convergence

Définition 1.2.1

Une série de terme général u_n est dite convergente si la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ est convergente.
 Dans ce cas, la limite de la suite $(S_n)_n$ est appelée somme de la série et on note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

La limite de S_n est appelée série de terme général u_n . $(S_n)_n$ est appelée suite des sommes partielles de la série.
 Une série qui n'est pas convergente est dite divergente. En d'autres termes, si on note $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ on a alors :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n \geq 0} u_n\right) \text{ converge vers } &\iff \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ell \\ &\iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \implies |S_n - \ell| < \varepsilon) \\ &\iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, \left(n \geq N \implies \left|\sum_{n \geq 0}^n u_n - \ell\right| < \varepsilon\right) \end{aligned}$$

Exemple 1.2.1

(1) Série géométrique.

Une série géométrique est une série dont le terme général est de la forme

$$u_n = a \cdot q^n, \quad a \neq 0$$

Pour ce type de série, le calcul de la somme partielle est donné par la formule suivante :

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + \cdots + u_n \\ &= a + a.q + a.q^2 + \cdots + a.q^n \\ &= a(1 + q + q^2 + \cdots + q^n) \\ &= \begin{cases} a \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} & \text{si } q \neq 1 \\ a(n+1) & \text{si } q = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

On remarque ainsi que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ existe si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas la série géométrique converge et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a.q^n = \frac{a}{1-q}$$

(2) Série harmonique.

C'est la série dont le terme général est de la forme $u_n = \frac{1}{n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que cette série n'est pas convergente.

Pour cela montrons qu'elle n'est pas de Cauchy. En effet, posons $S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$

Alors

$$\begin{aligned} S_{2n} - S_n &= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

.Or pour tout $p \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq n$, on a $n+1 \leq p+1 \leq 2n$ et par suite :

$$\begin{aligned} n+1 \leq 2n &\implies \frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{2n} \\ 2+n \leq 2n &\implies \frac{1}{n+2} \geq \frac{1}{2n} \\ 2n \leq 2n &\implies \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

Par conséquent $S_{2n} - S_n \geq n \left(\frac{1}{2n} \right) = \frac{1}{2}$

alors la suite $(S_n)_n$ n'est pas de Cauchy, donc divergente.

De plus, $(S_n)_n$ est strictement croissante, on déduit alors que $\sum_{n=1}^{+\infty} = +\infty$

(3) Soit la série de terme général $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ avec $n \geq 1$. On peut écrire après décomposition en

éléments simples que : $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

Alors

$$\begin{aligned} S_n &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Comme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1$, alors la série est convergente et vaut 1.

Remarque :

Si le terme général u_n est complexe $u_n = a_n + ib_n$; la somme partielle est :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n u_k \\ &= \sum_{k=0}^n (a_k + ib_k) \\ &= \sum_{k=0}^n a_k + i \sum_{k=0}^n b_k \end{aligned}$$

Alors on a le résultat suivant :

$$\left(\sum u_n \right) \text{ converge} \iff \left(\sum a_n \right) \text{ et } \left(\sum b_n \right) \text{ convergent en même temps}$$

A ce moment là on a le résultat évident $\sum_{k=0}^n a_k + i \sum_{k=0}^n b_k$.

Proposition 1.2.1

Soient $\left(\sum u_n \right)$ et $\left(\sum v_n \right)$ deux séries, on suppose que ces deux séries ne diffèrent que par un nombre fini de termes (i.e il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq p$ on a $u_n = v_n$) alors les deux séries sont de même nature.

Preuve.

Soit $n \geq p$.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^p u_k + \sum_{k=p+1}^n u_k = S_p + \sum_{k=p+1}^n u_k \\ T_n &= \sum_{k=0}^n v_k = \sum_{k=0}^p v_k + \sum_{k=p+1}^n v_k = T_p + \sum_{k=p+1}^n v_k \end{aligned}$$

La différence $S_n - T_n = S_p - T_p = c$, c étant une constante indépendante de n et p alors :

$$\left(\sum u_n \right) \text{ converge} \iff (S_n)_n \text{ converge} \iff (T_n)_n \text{ converge} \iff \left(\sum v_n \right) \text{ converge}.$$

Remarque :1.2.2

La proposition (1.2.1) permet de dire que les séries sont de même nature mais en cas de convergence, elles n'ont pas nécessairement la même somme.

Corollaire 1.2.1

On ne change pas la nature d'une série $\left(\sum u_n \right)$ si on lui rajoute ou on lui retranche un nombre fini de termes.

Proposition 1.2.2

Soit $\left(\sum u_n \right)$ une série **convergente** alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. La réciproque est fausse.

Preuve.

$$1) \text{ Posons } \ell = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n-1}.$$

$$S_n - S_{n-1} = (u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n) - (u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}) = u_n \text{ et}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - S_{n-1}) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n-1} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - S_{n-1}) &= 0 \end{aligned}$$

2) La série harmonique $\left(\sum \frac{1}{n}\right)$ est divergente bien qu'elle vérifie $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

En effet posons $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

$$\begin{aligned} S_{2n} - S_n &= \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}\right) - \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) \\ &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n+1 < k < 2n &\implies \frac{1}{2n} < \frac{1}{k} < \frac{1}{n+1} \\ \implies \frac{1}{2} &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2k} < S_{2n} - S_n < \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k+1} = \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

Ainsi $\frac{1}{2} < S_{2n} - S_n \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} - S_n \neq 0$, donc (S_n) n'est pas de Cauchy.

Remarque :1.2.3 

La proposition (1.2.2) est utile sous sa forme contraposée

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0 \implies \left(\sum u_n\right) \text{ diverge.}$$

On dira que la série est grossièrement divergente

Proposition 1.2.3

Soient $\left(\sum u_n\right)$ et $\left(\sum v_n\right)$ deux séries convergentes respectivement vers u et v . Alors

1. La série $\left(\sum (u_n + v_n)\right)$ est convergente et on a $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n = u + v$

2. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la série $\left(\sum \alpha \cdot u_n\right)$ est convergente et on a $\sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha \cdot u_n) = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \alpha \cdot u$

Preuve.

1) Soit $w_n = u_n + v_n$. On aura :

$$W_n = \sum_{n=0}^n w_n = \left(\sum_{n=0}^n (u_n + v_n)\right) = \sum_{n=0}^n u_n + \sum_{n=0}^n v_n = S_n + T_n. \text{ Ainsi}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} W_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n + T_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = u + v$$

2) Soit $t_n = \alpha \cdot u_n$. $T_n = \sum_{k=0}^n t_k = \sum_{k=0}^n \alpha \cdot t_k + \alpha \cdot \sum_{k=0}^n u_k = \alpha \cdot S_n$ et par suite

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha \cdot S_n) \\ &= \alpha \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \alpha \cdot u$$

Définition 1.2.2 (Critère de Cauchy)

Une série $\left(\sum u_n\right)$ est dite de Cauchy si la suite des sommes partielles (S_n) n est de Cauchy. Cela revient à dire que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\left(\sum u_n\right)$ est de Cauchy
2. $(S_n)_n$ est de Cauchy
3. $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall p, q \in \mathbb{N} (p \geq q \geq N \implies |S_p - S_q| < \varepsilon)$
4. $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall p, q \in \mathbb{N} \left(p \geq q \geq N \implies \left| \sum_{k=0}^p u_k - \sum_{k=0}^q u_k \right| < \varepsilon \right)$
5. $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall p, q \in \mathbb{N} \left(p \geq q \geq N \implies \left| \sum_{k=q+1}^p u_k \right| < \varepsilon \right)$

Proposition 1.2.4

Toute série réelle ou complexe de Cauchy est convergente.

4.3 Séries à termes positifs

Définition 1.3.1

Une série $\left(\sum u_n\right)$ est dite série à termes positifs si $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Propriétés :

1. Les séries $\left(\sum u_n\right)$ vérifiant $u_n \geq 0$ pour $n \geq n_0$ sont aussi appelées séries à termes positifs (voir corollaire (1.2.1)) car la nature d'une série ne change pas si on lui retranche un nombre fini de termes.
2. Si une série $\left(\sum u_n\right)$ est dite série à termes positifs, la suite des sommes partielles (S_n) est croissante.
En effet, $S_n - S_{n-1} = u_n \geq 0$; d'où la proposition :

Proposition 1.3.1

Soit $\left(\sum u_n\right)$ une série à termes positifs.

$$\left(\sum u_n\right) \text{ converge} \iff (S_n)_n \text{ est majorée}$$

Preuve.

Il suffit d'appliquer la remarque (1.3.1) et de se rappeler que les suites croissantes et majorées sont convergentes.

Théorème 1.3.1 (Règle de comparaison)

Soit $\left(\sum u_n\right)$ et $\left(\sum v_n\right)$ deux séries à termes positifs. On suppose que $0 \leq u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors :

1. $\left(\sum v_n\right)$ converge $\implies \left(\sum u_n\right)$ converge.
2. $\left(\sum u_n\right)$ diverge $\implies \left(\sum v_n\right)$ diverge.

Preuve.

1. $u_n \leq v_n \implies S_n = \sum_{k=0}^n u_k \leq \sum_{k=0}^n v_k = T_n$. Puisque $(T_n)_n$ est une suite convergente donc majorée alors $(S_n)_n$ est convergente comme étant une suite croissante et majorée. $\left(\sum u_n\right)$ converge.

2. C'est la contraposée de la première proposition.

Ce théorème reste vrai si l'inégalité $0 \leq u_n \leq v_n$ est réalisée à partir d'un certain ordre p_0 (i.e $u_n \leq v_n$ si $n \geq p_0$)

Exemple 1.3.1

Montrer que série $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$ est convergente.

Effet posons $u_n = \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$, montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$

$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < \frac{1}{2^n} < 1 < \frac{\pi}{2}$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$. De plus $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2^n}$

Soit $x \mapsto f(x) = \sin x - x$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], f'(x) = \cos x - 1 < 0$,

$-1 < \cos < 1 \implies -2 < f'(x) < 0$.

Ainsi f est strictement décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], f(x) \leq 0 \implies \sin x \leq x$

Alors $u_n \leq \frac{1}{2^n}$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		—
$f(x)$	0	$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}$

$$u_0 \leq \frac{1}{2}$$

$$u_1 \leq \frac{1}{2^2}$$

$$u_2 \leq \frac{1}{2^3}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$u_n \leq \frac{1}{2^n}$$

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$\implies 0 \leq S_n \leq 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

Alors u_n est convergente.

Théorème 1.3.2 (Règle de comparaison logarithmique)

Soit $\left(\sum u_n\right)$ et $\left(\sum v_n\right)$ deux séries à termes strictement positifs.

On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$. Alors

1. $\left(\sum v_n\right)$ converge $\implies \left(\sum u_n\right)$ converge.

2. $\left(\sum u_n\right)$ diverge $\implies \left(\sum v_n\right)$ diverge.

Preuve.

1. $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \iff \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n}$.
 $\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n} \leq \frac{u_{n-1}}{v_{n-1}} \leq \dots \frac{u_0}{v_0}$. Ceci implique que $u_n \leq \frac{u_0}{v_0} v_n$. Sachant que $\left(\sum v_n\right)$ converge alors $\left(\sum \frac{u_0}{v_0} v_n\right)$ converge et d'après le théorème de comparaison ci-dessus, $\left(\sum u_n\right)$ converge.

2. C'est la contraposée de la première proposition.

Théorème 1.3.3 (Critère d'équivalence)

Soit $\left(\sum u_n\right)$ et $\left(\sum v_n\right)$ deux séries à termes strictement positifs.

On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \ell, \ell \neq 0$ et $\neq +\infty$. Alors les deux séries sont de même nature.

Preuve.

En effet :

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \ell\right) \iff \left(\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} (n \geq N \implies \left|\frac{u_n}{v_n} - \ell\right| < \varepsilon)\right).$$

Pour un ε tel que $0 < \varepsilon < \ell$ on a alors $\ell - \varepsilon < \frac{u_n}{v_n} < \ell + \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. On a aussi $(\ell - \varepsilon)v_n < u_n < (\ell + \varepsilon)v_n$ pour tout $n \geq N$.

1. Si $\left(\sum v_n\right)$ converge alors $\left(\sum (\ell + \varepsilon)v_n\right)$ converge et par suite grâce au théorème de comparaison (1.3.1) $\left(\sum u_n\right)$ converge.
2. Si $\left(\sum u_n\right)$ converge alors $\left(\sum (\ell - \varepsilon)v_n\right)$ converge et donc $\left(\sum v_n\right)$ converge.

Exercice

Que se passe-t-il si $\ell = 0$ ou $\ell = +\infty$

Exemple 1.3.2

Montrer que la série $\left(\sum u_n\right)$ tel que $u_n = \text{Log}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ est divergente.

Exemple 1.3.3

Soient les séries $\left(\sum u_n\right)$ et $\left(\sum v_n\right)$ tels que $u_n = \text{Log}\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$ et $v_n = \frac{1}{2^n}$.

Montrer que les séries $\left(\sum u_n\right)$ et $\left(\sum v_n\right)$ sont de même nature et convergent.

Exemple 1.3.4

Soient les séries $\left(\sum u_n\right)$ et $\left(\sum v_n\right)$ tels que $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \text{Log}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Montrer que les séries $\left(\sum u_n\right)$ et $\left(\sum v_n\right)$ sont de même nature et divergent.

4.4 Séries de Riemann

Définition 1.3.2

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On appelle série de Riemann toute série dont le terme général est de la forme

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha}, n \geq 1 \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Les séries de Riemann sont donc des séries à termes positifs.

Remarquons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 0 \\ 1 & \text{si } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$

On conclut immédiatement que si $\alpha \geq 0$, la série de Riemann est divergente puisque le terme général ne tend pas vers 0.

Si $\alpha = 1$, on obtient la série harmonique qui est divergente elle aussi.

Examinons le cas $\alpha > 0$ et $\alpha \neq 1$

Soit la fonction $f_\alpha : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. f_α est une fonction positive, continue et décroissante

car la dérivée $f'_\alpha = \frac{-\alpha}{x^{\alpha+1}} < 0$.

On a : $\int_1^t f_\alpha(x) dx = \frac{1}{1-\alpha} (t^{1-\alpha} - 1)$ et comme

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} = \begin{cases} +\infty & \text{si } 0 < \alpha < 1 \\ \frac{1}{\alpha-1} & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$

Proposition 1.3.2

Une série de Riemann $\left(\sum \frac{1}{n^\alpha}\right)$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Les théorèmes (1.3.1), (1.3.2) et (1.3.3) vont nous permettre d'étudier beaucoup de séries en les comparant seulement à une série géométrique ou une série de Riemann.

Proposition 1.3.3 (Règle de Riemann)

Soit $\left(\sum u_n\right)$ une série à termes positifs.

1. S'il existe $\alpha > 1$ tel que la suite $(n^\alpha u_n)_n$ soit majorée par une constante $M > 0$; alors $\left(\sum u_n\right)$ est convergente.
2. S'il existe $\alpha \leq 1$ tel que la suite $(n^\alpha u_n)_n$ soit minorée par une constante $m > 0$, alors la série $\left(\sum u_n\right)$ est divergente.

Preuve.

1. Par hypothèse $n^\alpha u_n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $u_n \leq \frac{M}{n^\alpha}$. Comme $\alpha > 1$ la série $\left(\sum \frac{1}{n^\alpha}\right)$ est convergente et d'après le théorème de comparaison $\left(\sum u_n\right)$ converge.
2. On a : $n^\alpha u_n \geq m$ et donc $u_n \geq \frac{m}{n^\alpha}$. Le fait que $\alpha \leq 1$ alors la série $\left(\sum \frac{m}{n^\alpha}\right)$ est divergente et par suite la série $\left(\sum u_n\right)$ diverge en vertu du théorème de comparaison.

Corollaire 1.3.1

Soit $\left(\sum u_n\right)$ une série à termes positifs. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha u_n = \ell$, $\ell \neq 0$ et $\ell \neq +\infty$.

Les séries $\left(\sum u_n\right)$ et $\left(\sum \frac{1}{n^\alpha}\right)$ sont de même nature.

Preuve.

$$\begin{aligned} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha u_n = \ell\right) &\iff (\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} \implies \ell - \varepsilon < n^\alpha u_n < \ell + \varepsilon) \\ &\iff \left(\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} \implies \frac{\ell - \varepsilon}{n^\alpha} < u_n < \frac{\ell + \varepsilon}{n^\alpha}\right). \end{aligned}$$

On choisit alors $\forall \varepsilon > 0$ de manière que $\ell - \varepsilon > 0$.

1. $\left(\sum \frac{1}{n^\alpha}\right)$ converge $\iff \alpha > 1$ et ceci implique que $\left(\sum u_n\right)$ converge.

2. Si $\left(\sum u_n\right)$ converge alors $\left(\sum \frac{\ell - \varepsilon}{n^\alpha}\right)$ converge et par suite $\left(\sum \frac{1}{n^\alpha}\right)$ converge et donc $\alpha > 0$.

4.4.1 Critère de de D'Alembert

Proposition 1.3.4

Soit $\left(\sum u_n\right)$ une série à termes strictement positifs.

1. S'il existe $\lambda \in \mathbb{R}, 0 < \lambda < 1$ tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \lambda$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors la série $\left(\sum u_n\right)$ est convergente.
2. Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ alors $\left(\sum u_n\right)$ est divergente.

Preuve.

1. $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \lambda < 1 \implies \frac{u_n}{u_{n-1}} \leq \lambda \implies u_n \leq \lambda \cdot u_{n-1}$.

Par récurrence on obtient $u_n \leq \lambda^n \cdot u_0$. Puisque $0 < \lambda < 1$, alors $\left(\sum u_0 \lambda^n\right)$ est une série géométrique convergente et en vertu du critère de comparaison, la série $\left(\sum u_n\right)$ converge.

2. $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \implies u_n \leq u_{n+1}$ la suite (u_n) est alors croissante. Puisque $u_n > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0$ et par suite $\left(\sum u_n\right)$ diverge.

Corollaire 1.3.2 (Critère de D'Alembert)

Sous les mêmes hypothèses que la proposition (1.3.4), posons $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$

1. $\ell < 1 \implies \left(\sum u_n\right)$ converge.
2. $\ell > 1 \implies \left(\sum u_n\right)$ diverge.
3. $\ell = 1$, On ne peut rien conclure.

Preuve.

1. Si $\ell < 1$.
 $\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell\right) \iff \left(\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} \implies \ell - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \ell + \varepsilon\right).$

On choisit dans ces conditions $\varepsilon > 0$ tel que $\ell + \varepsilon < 1$ pour que $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \ell + \varepsilon < 1$.

La conclusion est une conséquence de la proposition (1.3.4).

2. Si $\ell > 1$, on choisit $\varepsilon > 0$ tel que $\ell - \varepsilon > 1$ et par suite il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \ell - \varepsilon > 1$. D'après la proposition (1.3.4), la série $\left(\sum u_n\right)$ diverge.

Exemple 1.3.5

Déterminer la nature des séries $\left(\sum \frac{1}{n^2}\right)$ et $\left(\sum \frac{1}{n!}\right)$

4.4.2 Critère de Cauchy

Proposition 1.3.5

Soit $\left(\sum u_n\right)$ une série à termes positifs.

1. S'il existe $\lambda \in \mathbb{R}, 0 < \lambda < 1$ tel que $\sqrt[n]{u_n} \leq \lambda$ alors la série $\left(\sum u_n\right)$ converge.

2. Si $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$ la série est alors divergente.

Preuve.

1. $\sqrt[n]{u_n} \leq \lambda \implies u_n \leq \lambda^n$. $(\sum \lambda^n)$ étant une série géométrique convergente ($0 < \lambda < 1$), d'après le théorème de comparaison $(\sum u_n)$ converge.
2. $\sqrt[n]{u_n} \geq 1 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \geq 1$ et donc $(\sum u_n)$ diverge.

Corollaire 1.3.3 (Critère de Cauchy)

Sous les mêmes hypothèses de la proposition (1.3.5), posons $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$.

1. $\ell < 1 \implies (\sum u_n)$ converge.
2. $\ell > 1 \implies (\sum u_n)$ diverge.
3. $\ell = 1$, On ne peut rien conclure.

Preuve.

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell \right) \iff (\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} \implies \ell - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < \ell + \varepsilon) \\ \iff (\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} \implies (\ell - \varepsilon)^n < u_n < (\ell + \varepsilon)^n)$$

1. Si $\ell < 1$. On choisit $\varepsilon > 0$ tel que $0 < \ell + \varepsilon < 1$. La série $(\sum (\ell + \varepsilon)^n)$ est alors convergente et par voie de conséquence $(\sum u_n)$ converge.
2. Si $\ell > 1$. On choisit $\varepsilon > 0$ vérifiant $\ell - \varepsilon > 1$. On aura alors $u_n > (\ell - \varepsilon)^n > 1$ ce qui entraîne que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \geq 1$ et par suite la série diverge.

Exemple 1.3.6

1. Déterminer la nature de la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$
2. Déterminer suivant les valeurs de a et p la nature de la série de terme général

$$t_n = \left(a + \frac{1}{n^p} \right)^n \text{ avec } a > 0 \text{ et } p \geq 0.$$

Proposition 1.3.6

Soit $(\sum u_n)$ une série à termes positifs. Alors si

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell_1 \neq 0 \right) \text{ et } \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell_2 \neq 0 \right)$$

on a $\ell_1 = \ell_2$.

Preuve.

Considérons la série de terme général $v_n = a^n \cdot u_n$; où a est un réel positif qu'on va préciser. On a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = a \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell_1 \neq 0 = a \cdot \ell_1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{v_n} = a \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = a \cdot \ell_2 \neq 0.$$

Fixons a strictement entre $\frac{1}{\ell_1}$ et $\frac{1}{\ell_2}$ alors nécessairement 1 est compris entre $a \cdot \ell_1$ et $a \cdot \ell_2$; donc notre série de terme général v_n est convergente suivant un critère et divergente suivant l'autre, ce qui est absurde ; d'où $\ell_1 = \ell_2$.

Proposition 1.3.7

Soit $(\sum u_n)$ une série à termes positifs. Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$$

On n'a pas l'équivalence.

Preuve.

Soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N$ on ait : $\ell - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \ell + \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $n \geq N$.

$$\begin{array}{ccc} \ell - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{u_n}{u_{n-1}} < \ell + \frac{\varepsilon}{2} \\ \ell - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} < \ell + \frac{\varepsilon}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \ell - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{u_{N+1}}{u_N} < \ell + \frac{\varepsilon}{2}. \end{array}$$

En faisant le produit membres à membres, on obtient :

$$\left(\ell - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-N} < \frac{u_n}{u_{n-1}} \times \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \times \cdots \times \frac{u_{N+1}}{u_N} < \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-N}$$

Après simplification on obtient :

$$\left(\ell - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-N} < \frac{u_n}{u_N} < \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-N} \implies u_N^{\frac{1}{n}} \left(\ell - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{1-\frac{N}{n}} < \sqrt[n]{u_n} < u_N^{\frac{1}{n}} \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{1-\frac{N}{n}}.$$

Soit $\alpha_n = u_N^{\frac{1}{n}} \left(\ell - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{1-\frac{N}{n}}$ et $\beta_n = u_N^{\frac{1}{n}} \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{1-\frac{N}{n}}$.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n &= \ell - \frac{\varepsilon}{2} \implies \exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_1 \text{ on ait } \alpha_n > \left(\ell - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \frac{\varepsilon}{2} = \ell - \varepsilon. \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n &= \ell + \frac{\varepsilon}{2} \implies \exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_2 \text{ on ait } \beta_n < \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{\varepsilon}{2} = \ell + \varepsilon. \end{aligned}$$

Soit $N_3 \geq \max\{N, N_1, N_2\}$. Pour tout $n \geq N_3$ on a :

$\ell - \varepsilon < \alpha_n < \sqrt[n]{u_n} < \beta_n < \ell + \varepsilon$, ce qui exprime bien que $|\sqrt[n]{u_n} - \ell| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N_3$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$.

Contre-exemple

Soit $a > 0$ et $b > 0$, $a \neq b$ et considérons la série $\left(\sum u_n\right)$ définie par

$$u_n = \begin{cases} a^{n+1}b^n & \text{si } n \text{ est pair} \\ a^{n+1}b^{n+1} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^{n+1}b^n = a + a^2b + a^3b^2 + a^4b^3 + a^5b^4 + a^6b^5 + \cdots$$

En utilisant le critère de Cauchy :

$$\sqrt[n]{u_n} = \begin{cases} \sqrt[2n]{a^{n+1}b^n} = a^{\frac{n+1}{2n}} b^{\frac{1}{2}} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \sqrt[2n+1]{a^{n+1}b^{n+1}} = a^{\frac{n+1}{2n+1}} b^{\frac{n+1}{2n+1}} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Dans les deux cas, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \sqrt{ab}$.

En utilisant la règle de D'Alembert :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} \frac{(ab)^{n+1}}{a^{n+1}b^n} = b & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{a^{n+2}b^{n+1}}{(ab)^{n+1}} = a & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Ainsi

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} b & \text{si } n \text{ est pair} \\ a & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Donc la limite n'existe pas.

Cette exemple montre bien que le critère de Cauchy est plus "fort" que celui de D'Alembert.

Un autre exemple plus simple est $u_{2n} = 2$ et $u_{2n+1} = 3$, la série est donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} = 2 + 3 + 2 + 3 + 2 + 3 + 2 + 3 + \dots$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} \frac{3}{2} = b & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{2}{3} = a & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$$

4.4.3 Critère de Kummer

Proposition 1.3.8

Soit $(\sum u_n)$ une série à termes strictement positifs.

1. S'il existe $\alpha > 0$ tel que $n \left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \geq \alpha$ alors la série est convergente.
2. Si $n \left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \leq \alpha$ alors la série est divergente.

Preuve : Bon exercice de maison

Corollaire 1.3.4 (Critère de Raab)

Soit $(\sum u_n)$ une série à termes strictement positifs.

On pose $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ell$.

1. Si $\ell > 1 \Rightarrow (\sum u_n)$ converge.
2. Si $\ell < 1 \Rightarrow (\sum u_n)$ diverge.
3. Si $\ell = 1$, On ne peut rien conclure.

Preuve.

On utilise toujours la définition de la limite d'une suite quand elle existe :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ell \iff \left(\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} \implies \ell - \varepsilon < n \left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) < \ell + \varepsilon \right).$$

1. Si $\ell > 1$. On choisit ε de manière à avoir $\ell - \varepsilon = \alpha > 1$ pour qu'on ait $n \left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \geq \alpha$ pour $n \geq N$ et par suite utiliser le critère de Kummer pour affirmer qu'il y a convergence.
2. Si $\ell < 1$. On choisit ε tel que $0 < \varepsilon \leq 1 - \ell$. Dans ces conditions, on aura $n \left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) < \ell + \varepsilon < 1$ pour tout $n \geq N$ et donc la série diverge.

4.5 Séries $\tilde{A}$ termes quelconques

Le paragraphe précédent était consacré à l'étude des séries à termes positifs et c'est dans cette partie qu'il y a beaucoup de résultats sur la convergence. Dans ce paragraphe il sera question des séries à termes quelconques.

4.5.1 Regroupement des termes

Théorème 1.4.1

Soit $(\sum u_n)$ une série à termes quelconques et soit $\varphi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ une application strictement croissante vérifiant $\varphi(0) = 0$. On suppose en plus :

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
2. $\exists M \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi(n+1) - \varphi(n) \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On considère la série $(\sum v_n)$ définie par $v_n = \sum_{k=\varphi(n)+1}^{\varphi(n+1)} u_k$.

Alors les séries $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ sont de même nature.

Si les séries sont convergentes on a en plus : $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$

Remarque 1.4.1 : 

Prenons un exemple d'application pour comprendre les hypothèses de ce théorème.

Soit $\varphi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ définie par $\varphi(n) = 2n$.

On a $\varphi(n+1) - \varphi(n) = (2n+2) - 2n = 2 = M$ et $v_n = \sum_{k=\varphi(n)+1}^{\varphi(n+1)} u_k = \sum_{k=2n+1}^{2n+2} u_k = u_{2n+1} + u_{2n+2}$

Ceci donne par exemple $v_0 = u_1 + u_2$, $v_1 = u_3 + u_4$ et ainsi de suite. On remarque sur cet exemple que les termes sont regroupés 2 par 2.

Preuve. Bon exercice de maison

Exemple 1.4.1

Appliquons ce théorème pour étudier la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

Théorème 1.4.2 (Critère D'Abel)

Soit $(\sum u_n)$ une série à termes quelconques. On suppose qu'il existe deux suites $(\varepsilon_n)_n$ et $(v_n)_n$ telles que :

1. $u_n = \varepsilon_n v_n$ pour tout n .
2. Il existe $M > 0$ tel que pour tout $p, q \in \mathbb{N}$ $\left(p \geq q \left| \sum_{k=q}^p v_k \right| \leq M \right)$.
3. $\sum_{n=1}^{+\infty} |\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}|$ converge.
4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$.

Alors la série $(\sum u_n)$ converge.

Preuve. Bon exercice de maison

Exemple 1.4.2

Appliquons ce théorème pour montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente.

4.6 Séries alternées**Définition 1.4.1**

On appelle série alternée toute série $(\sum u_n)$ vérifiant la relation $u_n \cdot u_{n+1} \leq 0$.
Le terme général u_n d'une telle série peut-être noté

$$u_n = (-1)^n v_n \text{ ou } u_n = (-1)^{n+1} v_n \text{ avec } v_n \geq 0.$$

Dans le cas général une série alternée sera souvent notée : $((-1)^n \sum |u_n|)$.

Théorème 1.4.3 (Critère de Leibniz)

Soit $(\sum u_n)$ une série alternée. On suppose que :

1. La suite $(|u_n|)_n$ est décroissante.
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 0$.

Alors la série $(\sum u_n)$ est convergente.

Preuve. Bon exercice de maison

4.7 Séries absolument convergentes**Définition 1.5.1**

Une série $(\sum u_n)$ est dite absolument convergente si la série $(\sum |u_n|)$ est convergente. Il est clair que toute série à termes positifs convergente est absolument convergente.

Théorème 1.5.1

Toute série absolument convergente est convergente. La réciproque est fausse.

En d'autres termes : $(\sum |u_n|)$ converge $\implies (\sum u_n)$ converge.

Preuve. Bon exercice de maison

Remarque 1.5.1 :

On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\left| \sum_{n=0}^n u_n \right| \leq \sum_{n=0}^n |u_n|$ (inégalité triangulaire).

En cas de convergence absolue, cette inégalité est conservée ; à savoir $\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$

Pour montrer que la réciproque est fausse, il suffit de considérer la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ qu'on a vu qu'elle est convergente mais pas absolument convergente puisque car $\left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n}$

Théorème 1.5.2

Soit $\left(\sum u_n\right)$ une série absolument convergente. Alors pour toute bijection $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ on a :

1. $\left(\sum u_{\varphi(n)}\right)$ est absolument convergente.

2. $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)}.$

Preuve. Bon exercice de maison

Exemple :

Montrer que la série alternée $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \text{Log} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ est absolument convergente.

mail@ideal

Quatrième partie

Suites et séries

mail@idead

Suites et séries de fonctions

5.1 Suites de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Définition 1 :

Soit $E \neq \emptyset$. Une **suite de fonction numérique** définie par sur E est la donnée d'une application $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi, pour x fixé dans E ; $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite numérique

Définition 2 :

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonction numérique définie par sur un ensemble E

On dit que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en un point $x \in E$ si la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Soit A une partie non vide de E . On dit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f sur l'ensemble A si

$$\forall x \in A, \quad (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$$

En d'autre terme, (f_n) converge f simplement si :

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x) \right) \iff (\forall \varepsilon > 0, \forall x \in A, \exists n_0 \in \mathbb{N} / (n \geq n_0) \implies |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon)$$

La convergence simple est encore appelée la convergence point par point.

Exemple 1 :

Soit $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonction définie par

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \left(1 + \frac{x}{n} \right) \end{aligned}$$

Etudier la convergence simple de $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$

5.1.1 Convergence uniforme d'une suite de fonction

Soit $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonction définie sur un ensemble E et A une partie non vide de E . On dit que la suite de fonction $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur A . S'il existe une fonction f définie sur A à valeur dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / (n \geq n_0) \implies |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \forall x \in A$$

Cela revient à dire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \right] = 0$$

Remarque :

La différence entre la convergence simple et la convergence uniforme sur un ensemble A est que dans la définition

de la convergence simple l'entier n_0 dépend de ε et de x alors que dans la convergence uniforme l'entier n_0 dépend uniquement de ε .

Proposition :

Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur A . C'est-à-dire :

la convergence uniforme $\implies$ la convergence simple

Mais on a pas toujours la réciproque.

Règle : pour la convergence uniforme

Pour démontrer qu'une suite de fonction $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur un ensemble A .

Il suffit de :

- ① Etudier convergence simple pour trouver la fonction f .
- ② Calculer $\delta_n = \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)|$
- ③ Démontrer que (δ_n) converge vers 0. C'est-à-dire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n = 0$

Remarque :

Si la suite (δ_n) ne converge pas vers 0, on déduit que la convergence n'est pas uniforme.

Exemple :

Soit $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonction définie par

$$\begin{array}{ccc} f_n : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}$$

1. Etudier la convergence uniforme de $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$
2. La suite de fonction $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)$ converge-elle uniformément ?

5.1.2 Continuité-Intégration-Dérivation de la limite d'une suite de fonctions

Théorème : Continuité

Soit $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonction numérique définie sur une partie non vide I de $\mathbb{R}$.

Soit $a \in I$ fixé. On suppose que :

- ① $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue en a (respectivement f_n est continue sur I).
- ② f_n converge uniformément vers une fonction f sur I .

Alors f est continue en a (respectivement f est continue sur I).

Exemple :

Utilise ce théorème pour montrer si la suite de fonction $f_n(x) = x^n$ converge uniformément.

Théorème : Continuité

Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ et $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonction définie et continue sur $[a, b]$.

① Si f converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f , alors

② $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x)dx$. C'est-à-dire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) dx.$$

On dit qu'on a passé la limite sous l'intégrale, mais cela n'est possible que si la convergence est uniforme.

Remarque :

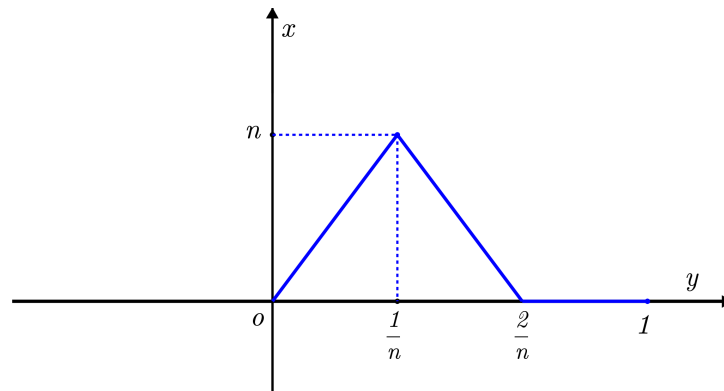
La convergence simple seule suffit pour faire passer la limite sous l'intégrale.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)dx$$

Exemple :

Soit $n \geq 2$, $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonction définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} -n^2x + 2n & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n}; \frac{2}{n}\right] \\ n^2x & \text{si } x \in \left[0; \frac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{si } x \in \left[\frac{2}{n}; 1\right] \end{cases}$$



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0, \forall x \in [0; 1]$$

f_n converge simplement sur $[0; 1]$ vers la fonction $x \mapsto f(x) = 0$

- f_n est continue sur $[0; 1]$
- f est continue sur $[0; 1]$
- calculons $\int_0^1 f_n(x)dx$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f_n(x) dx &= \int_0^{\frac{1}{n}} n^2 x dx + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} (2n - n^2 x) dx + \int_{\frac{2}{n}}^1 0 dx \\
&= \left[\frac{1}{2} n^2 x^2 \right]_0^{\frac{1}{n}} + \left[2nx - \frac{1}{2} n^2 x^2 \right]_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \\
\int_0^1 f_n(x) dx &= 1
\end{aligned}$$

De plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 1 \neq \int_0^1 f(x) dx$

Alors f_n ne converge pas uniformément vers f sur $[0; 1]$

Théorème : Dérivation

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un singleton, et $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonction définie et continue sur I à valeur dans $\mathbb{R}$.

- (a) $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est dérivable sur I (respectivement f est dérivable sur I et de classe $\mathcal{C}^1$)
- (b) La suite (f'_n) converge sur tout intervalle $[a; b] \subset I$ vers une fonction $f' = g$
- (c) $\exists x_0 \in I$ tel que $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Alors :

- ① $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément convergente sur tout intervalle fermé borné $[0; 1] \subset I$ vers une fonction f .
- ② f est dérivable (respectivement f est de classe $\mathcal{C}^1$) sur I .
- ③ $\forall x \in I, f'(x) = g(x)$.

Exemple :

Etudier la convergence uniforme de la suite de fonction définie par :

$$\begin{aligned}
f_n : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
&\longmapsto f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}
\end{aligned}$$

5.2 Série de fonction

Soit $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonction définie sur E vers $\mathbb{R}$

On appelle **série de fonction** de terme général (f_n) la suite de fonction (S_n) définie sur E telle que :

$$\forall x \in E, \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$$

Définition 1 :

Soit $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonction définie sur E vers $\mathbb{R}$ et $S_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$ la série de fonction.

- ☞ La série de fonction $\left(\sum f_n\right)$ est dit simplement convergente sur $A \subset E$ lorsque la suite de fonction $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est simplement convergente sur A
- ☞ De même, on dira que la $\left(\sum S_n\right)$ converge uniformément sur A lorsque la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur A .

Notation :

Lorsque la série $\left(\sum f_n\right)$ converge simplement sur A , la limite simple de la suite de fonction (S_n) est appelée **somme de la série** $\left(\sum f_n\right)$ sur A et est souvent notée : $S_n(x)$

$$\forall x \in A, \quad S(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$$

Définition 2 :

Soit $\left(\sum f_n\right)$ une série de fonction définie sur E et A une partie non vide de E .

On dit que $\left(\sum f_n\right)$ est normalement convergente sur A s'il existe une série numérique $\left(\sum \vartheta_n\right)$ à terme positive telle que :

1. $\forall x \in A, |f_n(x)| \leq \vartheta_n$
2. $\left(\sum \vartheta_n\right)$ est convergente.

Cela revient à dire que :

- (a) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée sur A
- (b) $u_n = \sup_{x \in A} |f_n(x)|$ est une série convergente

Exemple :

Etudier la convergence normale de la série de fonction $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^2}, x \in \mathbb{R}$$

Théorème :

Toute série de fonction normalement convergente sur A est uniformément convergente sur A .

NB : La réciproque n'est pas toujours vraie.

Exemple :

Montrer que la série de fonction $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^2}, x \in \mathbb{R}$ n'est pas convergente uniformément, mais elle converge normalement.

Théorème : Continuité

Soit I une partie non vide et non réduite en un singleton, et (f_n) une suite de fonction définie sur I à valeur dans $\mathbb{R}$.

On suppose que :

- ① $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue en un point $a \in I$ (respectivement f est continue sur I).
- ② $\left(\sum f_n\right)$ convergente uniformément sur I vers S .

Alors $x \mapsto S(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n f_k(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$ est continue en a (respectivement f est continue sur I).

Exemple :

Théorème : Intégration

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a; b]$, $\forall n \in \mathbb{N}$

On suppose que la série $\left(\sum f_n\right)$ convergente uniformément sur $[a; b]$. Alors la série de terme général

$\int_a^b f_n(x)dx$ est convergente et on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^b f_k(x) = \int_a^b \left(\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) \right) dx.$$

Autrement dire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \int_a^b f_k(x) = \int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n f_k(x) \right) dx.$

Exemple :

On considère la suite de fonction définie sur $I = [0; 1]$ par :

$$f_n(x) = \frac{x^2 + ne^{-x}}{n+x}$$

1. Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de $f_n(x)$ sur I
2. En déduire la nature de la suite numérique (u_n) définie par $u_n = \int_0^1 f_n(x)dx$

Théorème : Dérivabilité

Soit $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonction définie sur une partie non vide I et non réduit en un singleton

On suppose que :

- ① $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est dérivable (respectivement de classe $\mathcal{C}^1$) sur I .
- ② La série $\left(\sum f'_n\right)$ convergente uniformément sur tout intervalle fermé $[a; b]$.
- ③ Il existe $x_0 \in I$ tel que $\left(\sum f'_n(x_0)\right)$ converge.

Alors :

(a) $\left(\sum f_n\right)$ convergente uniformément sur tout intervalle fermé borné $[a; b]$.

(b) $x \mapsto S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$ est dérivable (respectivement de classe $\mathcal{C}^1$) sur I et on a :

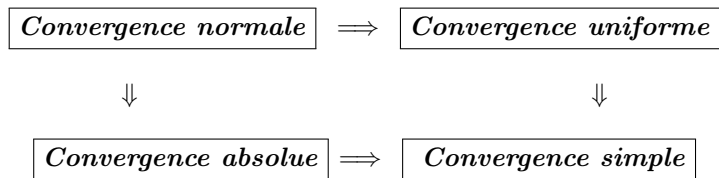
$$\forall x \in I, \quad S'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f'_k(x)$$

Exemple :

Etudier la convergence normale de la série de fonction $\left(\sum f_n\right)$ définie par

$$\begin{aligned} f_n : [0; +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+n^2} \end{aligned}$$

Conclusion générale :



mail@ideal

Séries de Fourier

6.1 Polynômes de Fourier

On appelle polynôme de Fourier tout expression de la forme :

$$\begin{aligned} x \mapsto F_n(x) &= \sum_{k=0}^n [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)], \quad n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R} \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)] \end{aligned}$$

Les coefficients a_0, a_k et b_k pour $k \in \{1; 2; \dots; n\}$ sont appelés les coefficients de Fourier du polynôme F_n .

Remarque :

- (1) Un polynôme de Fourier est une fonction périodique de période $T = 2\pi$. On dit simplement que c'est une fonction 2π -périodique
- (2) En utilisant les transformations trigonométriques suivantes :

- $\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$
- $\sin(a) \sin(b) = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$
- $\sin(a) \cos(b) = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

On détermine les coefficients de Fourier du polynôme F_n .

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \cos(k\pi) = (-1)^k \text{ et } \sin(k\pi) = 0.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 0 \\ 2\pi & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) dx = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(nx) + i \sin(nx)) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 0 \\ 2\pi & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\sin(nx) \cos(mx)) dx = 0, \quad \forall (n, m) \in \mathbb{N}^2$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(nx) \cos(mx)) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \pi & \text{si } n = m \geq 1 \\ 2\pi & \text{si } n = m = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\sin(nx) \sin(mx)) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \text{ ou } n = m = 0 \\ \pi & \text{si } n = m \geq 1 \end{cases}$$

Application :

- $\int_{-\pi}^{\pi} F_n(x) dx = 2a_0\pi \implies a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(x) dx$
- $\int_{-\pi}^{\pi} (F_n(x) \cos(nx)) dx = \pi \cdot a_n \implies a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (F_n(x) \cos(nx)) dx$
- $\int_{-\pi}^{\pi} (F_n(x) \sin(nx)) dx = \pi \cdot b_n \implies b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (F_n(x) \sin(nx)) dx$

Théorème : 

Soit F_n un polynôme de Fourier de la forme.

$$F_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(x) dx \quad \text{et}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (F_n(x) \cos(nx)) dx \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (F_n(x) \sin(nx)) dx \end{cases}$$

6.2 Série de Fourier d'une fonction 2π -périodique

Soit f une fonction 2π -périodique et intégrable sur $[-\pi, \pi]$.

La série de Fourier de la fonction f est la fonction notée S_f ou $\mathcal{F}(f)$.

$$S_f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)], \quad \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Avec } a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, \begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) \cos(nx)) dx \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) \sin(nx)) dx \end{cases}$$

Remarque ① Si f est paire sur $[-\pi, \pi]$

$$(a) \quad a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$(b) \quad \forall n \geq 1, \begin{cases} a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x) \cos(nx)) dx \\ b_n = 0 \end{cases}$$

② Si f est impaire sur $[-\pi, \pi]$

$$(a) \quad a_0 = 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

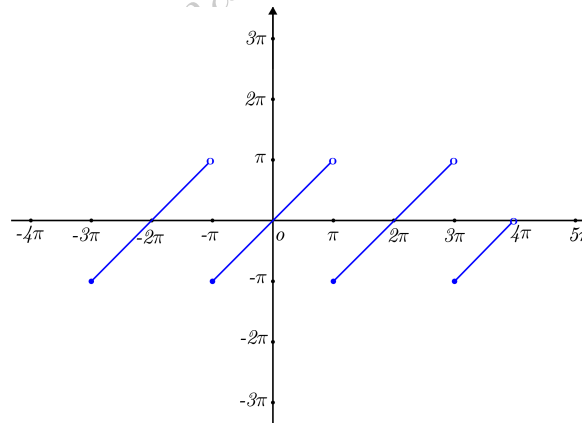
$$(b) \quad \forall n \geq 1, b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x) \sin(nx)) dx$$

Exemple 1 :Soit f la fonction 2π -périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = x$

1. Tracer le graphe de la fonction f sur $[-3\pi, 4\pi]$.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f et donner la série de Fourier de f .

Solution :

1. Traçons le graphe de la fonction f sur $[-3\pi, 4\pi]$.



2. Calculons les coefficients de Fourier de f et donner la série de Fourier de f .
 f est impaire sur $[-\pi, \pi]$ alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = 0$$

$$\begin{aligned} \forall n \geq 1, \quad b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x) \sin(nx)) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l|l} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v'(x) = \sin(nx) & v(x) = \frac{-1}{n} \cos(nx) \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\pi} b_n &= \left[\frac{-x}{n} \cos(nx) \right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{-1}{n} \cos(nx) dx \\
&= \left[\frac{-x}{n} \cos(nx) \right]_0^\pi + \left[\frac{-1}{n^2} \sin(nx) \right]_0^\pi \\
&= \frac{-\pi}{n} \cos(n\pi) + 0 \quad \text{Or } \cos(k\pi) = (-1)^k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

$$\text{Alors } \frac{2}{\pi} b_n = \frac{-\pi(-1)^n}{n} \implies b_n = \frac{-2(-1)^n}{n}$$

$$\text{Conclusion : } \begin{cases} a_n = 0, & \forall n \in \mathbb{N} \\ b_n = \frac{-2(-1)^n}{n}, & \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

$$S_f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)], \quad \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

Donc

$$S_f(x) = -2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(nx)$$

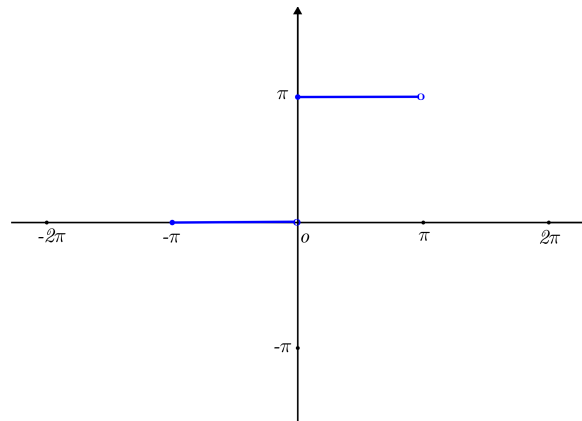
Exemple 2 :

Soit g 2π -périodique définie par :
$$\begin{cases} g(x) = 0 & \text{si } -\pi \leq x < 0 \\ g(x) = \pi & \text{si } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de la fonction g .
2. Calculer les coefficients de Fourier de g et donner la série de Fourier de g .

Solution :

1. Traçons le graphe de la fonction f



2. Calculons les coefficients de Fourier de g et donnons la série de Fourier de g .

$$\bullet a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx$$

$$\begin{aligned}
 2\pi \cdot a_0 &= \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx \\
 &= \int_{-\pi}^0 g(x) dx + \int_0^{\pi} g(x) dx = \int_0^{\pi} \pi \cdot dx = \pi^2
 \end{aligned}$$

$$2\pi \cdot a_0 = \pi^2 \implies a_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\bullet \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(nx) dx$$

$$\begin{aligned}
 \pi \cdot a_n &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) g(x) dx \\
 &= \int_{-\pi}^0 g(x) \cos(nx) dx + \int_0^{\pi} g(x) \cos(nx) dx = \pi \int_0^{\pi} \cos(nx) dx = 0
 \end{aligned}$$

$$\pi \cdot a_n = 0 \implies a_n = 0, \quad \forall n \geq 1$$

$$\bullet \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin(nx) dx$$

$$\begin{aligned}
 \pi \cdot b_n &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) g(x) dx \\
 &= \int_{-\pi}^0 g(x) \sin(nx) dx + \int_0^{\pi} g(x) \sin(nx) dx = \pi \int_0^{\pi} \sin(nx) dx = \frac{1}{n} [\cos(nx)]_0^{\pi} \\
 &= \pi \left(\frac{-1}{n} \right) [\cos(n\pi) - \cos(0)] = \pi \frac{1 - (-1)^n}{n}
 \end{aligned}$$

$$\pi \cdot b_n = \pi \frac{1 - (-1)^n}{n} \implies b_n = \frac{1 - (-1)^n}{n}, \quad \forall n \geq 1$$

$$\forall n \geq 1, b_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 2n \\ \frac{2}{2n+1} & \text{si } k = 2n+1 \end{cases}$$

$$\text{Donc } S_g(x) = \frac{\pi}{2} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1 - (-1)^n}{n} \right] \sin(nx)$$

$$S_g(x) = \frac{\pi}{2} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{\sin[(2n+1)x]}{2n+1} \right]$$

6.3 Série de Fourier d'une fonction 2ℓ -périodique ($\ell \in]0, +\infty[$)

Soit f une fonction périodique de période 2ℓ et intégrable sur $] -\ell, \ell[, \ell > 0$.

Soit $g : x \mapsto g(x) = f\left(\frac{x\ell}{\pi}\right)$.

$$\textcircled{1} \quad -\ell \leq \frac{x\ell}{\pi} < \ell \implies -\pi \leq x \leq \pi. \quad g \text{ est donc définie sur } [-\pi, \pi[$$

$$\textcircled{2} \quad g(x + 2\pi) = f\left(\frac{(x + 2\pi)\ell}{\pi}\right) = f\left(\frac{x\ell}{\pi} + 2\ell\right) = f\left(\frac{x\ell}{\pi}\right) = g(x)$$

Ainsi g est périodique de période $T = 2\ell$. Donc on peut calculer le coefficient de Fourier de g

$$\textcircled{p} \quad a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{x\ell}{\pi}\right) dx = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) dt$$

$$\textcircled{p} \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{x\ell}{\pi}\right) \cos(nx) dx = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}t\right) dt$$

$$\textcircled{p} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{x\ell}{\pi}\right) \sin(nx) dx = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}t\right) dt$$

Alors

$$S_f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}t\right) \right], \quad \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

Théorème :

Soit f une fonction périodique de période 2ℓ et intégrable sur $] -\ell, \ell[$, $\ell > 0$.

La série de Fourier définie par :

$$S_f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}t\right) \right], \quad \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) dt \quad \text{et}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}t\right) dt \\ b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}t\right) dt \end{cases}$$

Exemple 3 :

Déterminer la série de Fourier de la fonction périodique de période $T = 4$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x < 2 \end{cases}$$

Solution :

Déterminer la série de Fourier $S_f(t)$ de f .

$$T = 4 \implies \ell = 2; \quad a_0 = \frac{1}{2}$$

$$n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{2[(-1)^n - 1]}{n^2\pi^2} = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k \\ \frac{-4}{\pi^2(2n+1)^2} & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}$$

$$b_n = \frac{-2(-1)^n}{n\pi} = \begin{cases} \frac{-1}{n\pi} & \text{si } n = 2k \\ \frac{2}{(2n+1)\pi} & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}$$

Donc

$$S_f(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\pi t)}{n} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{-2 \cos\left[\left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi t\right]}{\pi(2n+1)^2} + \frac{\sin\left[\left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi t\right]}{\pi(2n+1)^2} \right]$$

6.3.1 Convergence de la série de Fourier

A- Convergence simple

A-1/ Condition de Dirichlet

Soit f une fonction périodique de période $T = 2\ell$.

On dit que f satisfait aux conditions de Dirichlet si :

- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$
- f est monotone par morceau.

A-2/ Théorème de Dirichlet

Soit f une fonction périodique de période $T = 2\ell$.

On dit que f satisfait aux conditions de Dirichlet alors :

$\forall t \in [-\ell, \ell[$, la série de Fourier converge simplement sur l'intervalle $[-\ell, \ell[$ vers la fonction

$$t \mapsto \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}, \quad \text{avec } f(t^+) = \lim_{x \rightarrow t^+} f(x) \text{ et } f(t^-) = \lim_{x \rightarrow t^-} f(x)$$

C'est-à-dire $\forall t \in [-\ell, \ell[$, $S_f(t) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$

En particulier si f est continue au point x_0 alors

$$S_f(x_0) = f(x_0)$$

6.3.2 Convergence quadratique

Théorème de Parseval

Soit f une fonction 2ℓ -périodique intégrable sur $[-\ell, \ell[$. On suppose que $t \mapsto f^2(t)$ est intégrable sur $[-\ell, \ell[$ alors

$$\frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f^2(t) dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

Exercice d'application :

On considère la fonction $x \mapsto f(x) = x$ sur $[-\pi, \pi]$ de période $T = 2\pi$

1. Déterminer les coefficients de Fourier de f .
2. Etudier la convergence de la série de Fourier de f .
3. En déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Solution :

1. Déterminons les coefficients de Fourier de f .

D'après l'exercice 1 : on a $a_0 = 0$ et $a_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$; $b_n = \frac{-2(-1)^n}{n}$, $n \geq 1$.

$$S_f(x) = -2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin(nx)}{n}$$

2. Etudions la convergence de la série de Fourier de f .

- f est monotone sur $[-\pi, \pi]$
- $\lim_{t \rightarrow t^+} f(t) = -\pi$ et $\lim_{x \rightarrow t^-} f(x) = \pi$

f est alors continue sur $[-\pi, \pi]$ et discontinue en $-\pi$ et π

Conclusion : $\forall t \in]-\pi, \pi[, S_f(t) = f(t)$, $S_f(\pi) = 0$ et $S_f(-\pi) = 0$

3. En déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1}$.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } \forall t \in]-\pi, \pi[, \quad S_f(t) = f(t) &\implies -2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin(nx)}{n} = t \\ &\implies \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin(nx)}{n} = -\frac{1}{2}t \end{aligned}$$

$$\text{En particulier } t = \frac{\pi}{2} \in]-\pi, \pi[\text{ On a : } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n} = -\frac{\pi}{4}$$

$$\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k \\ (-1)^k & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{2k} \sin(k\pi)}{2k} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2k+1} \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right)}{2k+1} = -\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n} = -\frac{\pi}{4} \implies -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = -\frac{\pi}{4}$$

$$\implies \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

Donc

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}}$$

Application du théorème de Parseval :

$$\text{Posons } A = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt \quad \text{et} \quad B = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

$$A = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}$$

$$B = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

D'après le théorème de Parseval $A = B$

$$A = B \iff \frac{\pi^2}{3} = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\iff \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\text{Posons } S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}\end{aligned}$$

Alors $S_1 = \frac{1}{4} S_1 + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \implies \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{3}{4} S_1$

D'où

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$$

mail@ideal

Cinquième partie

Les intégrales

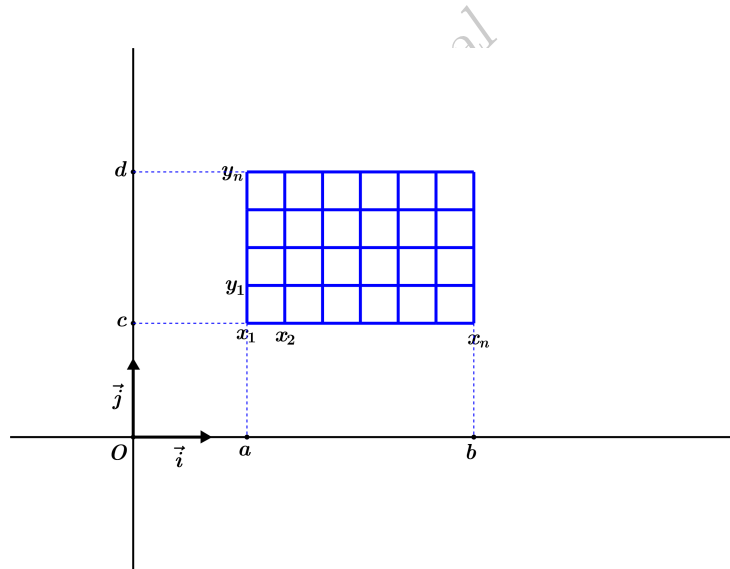
Intégrales multiples

7.1 Intégrales doubles

7.1.1 Un aperçu formelle de l'intégrales doubles

Soit $R = [a, b] \times [c, d]$ un rectangle de $\mathbb{R}^2$, ($a < b$) et ($c < d$)

a- Quadrillage d'un rectangle



Quadriller le rectangle de $\mathbb{R}^2$ c'est se donner une subdivision $\sigma_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de $[a, b]$ c'est-à-dire $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ une subdivision $\sigma_2 = \{y_0, y_1, \dots, y_n\}$ de $[c, d]$ c'est-à-dire $y_0 = c < y_1 < y_2 < \dots < y_n = d$. Les rectangles qui constituent le quadrillage du rectangle de départ sont de la forme

$$R = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \text{ avec } i \in \{1; 2; \dots; n\} \text{ et } j \in \{1; 2; \dots; m\}$$

Un quadrillage est dit régulier si

$$\begin{aligned} x_{i-1} - x_i &= \frac{b-a}{n} \quad \forall i \in \{1; 2; \dots; n\} \\ y_{j-1} - y_j &= \frac{d-c}{m} \quad \forall j \in \{1; 2; \dots; m\} \end{aligned}$$

b- Fonction en escalier un rectangle

Soit $R = [a, b] \times [c, d]$ un rectangle de $\mathbb{R}^2$ et

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y) \end{aligned}$$

On dit que f est une fonction en escalier sur E si f est bornée sur E et il existe un quadrillage $\{R_{ij}\}_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ de E avec $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ tel que $\forall (i, j) \in \{1; 2; \dots; n\} \times \{1; 2; \dots; m\}$ et f est une constante sur le rectangle ouvert

$$R_{ij} =]x_{i-1}, x_i[\times]y_{j-1}, y_j[\quad \forall (i, j) \in \{1; 2; \dots; n\} \times \{1; 2; \dots; m\}$$

7.1.2 Définition de l'intégrale double d'une fonction en escalier.

Soit $E = [a, b] \times [c, d]$ un rectangle de $\mathbb{R}^2$ et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction en escalier sur E

- On dit qu'un quadrillage $\{R_{ij}\}_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ est adapté à f si f est une constante sur l'intérieur de $\{R_{ij}\}$
- On suppose que $\{R_{ij}\}_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ est adapté à f .

Soit k_{ij} la valeur de f sur le rectangle ouvert $R_{ij} =]x_{i-1}, x_i[\times]y_{j-1}, y_j[$. Le réel

$$I_R(f) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} k_{ij} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

est appelé intégrale double de f sur E et est noté $\iint_E f(x, y) dx dy$

I_R est indépendant du quadrillage adapté à f

$$\iint_E f(x, y) dx dy = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} k_{ij} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

Généralisation de l'intégrale double

Soit $E = [a, b] \times [c, d]$ un rectangle de $\mathbb{R}^2$ et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée.

On dit que f est intégrable sur E (au sens de Riemann) si :

$\forall \varepsilon > 0$, on peut trouver deux fonctions en escaliers φ_1 et φ_2 sur E telle que :

$$\textcircled{1} \quad \varphi_1(x) \leq f(x) \leq \varphi_2(x) \quad \forall x \in E$$

$$\textcircled{2} \quad \left| \iint_E \varphi_1(x, y) dx dy - \iint_E \varphi_2(x, y) dx dy \right| \leq \varepsilon$$

Dans ce cas on posera,

$$\iint_E f(x, y) dx dy \approx \iint_E \varphi_1(x, y) dx dy \approx \iint_E \varphi_2(x, y) dx dy$$

Théorème :

Soit $E = [a, b] \times [c, d]$ un rectangle fermé de $\mathbb{R}^2$ et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur E

Soit $\{R_{ij}\}_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ un quadrillage régulier de E et $c_{ij} =]x_{i-1}, x_i[\times]y_{j-1}, y_j[$

On suppose

$$I_{n,m} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(c_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

On montre que $(\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ m \rightarrow +\infty}} I_{n,m}) \in \mathbb{R}$

I est appelé intégrale double de f sur E

$$\text{Ainsi } \iint_E f(x, y) dx dy = \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ m \rightarrow +\infty}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(c_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}), \text{ avec } \begin{cases} x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} \\ y_j - y_{j-1} = \frac{d-c}{m} \end{cases}$$

En pratique on prend $c_{ij} = \left[\left(a + \frac{b-a}{n} \right) i, \left(c + \frac{d-c}{m} \right) j \right]$

Corollaire :

Soit $E = [a, b] \times [c, d]$ un rectangle fermé de $\mathbb{R}^2$ et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, alors f est intégrable sur E au sens de Riemann.

7.1.3 Quelques propriétés de l'intégrale double

Soit $E = [a, b] \times [c, d]$ un rectangle fermé de $\mathbb{R}^2$

- Si f et g sont deux fonctions intégrables sur E , alors $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $(x, y) \mapsto \alpha f(x, y) + \beta g(x, y)$ est aussi intégrable sur E et on a :

$$\iint_E [\alpha f + \beta g](x, y) dx dy = \alpha \iint_E f(x, y) dx dy + \beta \iint_E g(x, y) dx dy$$

- Si f et g sont intégrables sur E , et $\forall (x, y) \in E, f(x, y) \leq g(x, y)$ alors

$$\iint_E f(x, y) dx dy \leq \iint_E g(x, y) dx dy$$

- Si f est intégrable sur E , alors la fonction $(x, y) \mapsto |f(x, y)|$ est aussi intégrable sur E , $|f(x, y)| = |f|(x, y)$ et on a :

$$\left| \iint_E f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_E |f(x, y)| dx dy$$

7.1.4 Théorème de Fubini**Introduction :**

Soit E un rectangle de $\mathbb{R}^2$ et f de E vers $\mathbb{R}$ une fonction continue.

- Pour x fixé dans $]a, b[$, $y \mapsto f_1(y) = f(x, y)$ est continue sur $[c, d]$ donc intégrable sur $[c, d]$

Posons : $\int_c^d f_1(y) dy = A(x)$ c'est-à-dire $A(x) = \int_c^d f_1(y) dy$

Ainsi la fonction $x \mapsto A(x)$ est définie sur $]a, b[$ on a :

$$\int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

On dit alors qu'on a intégré d'abord par rapport à y puis par rapport à x

De manière analogue : pour y fixé dans $]c, d[$, on considère la fonction $x \mapsto f_2(x) = f(x, y)$

$$B(x) = \int_a^b f_2(x) dx = \int_a^b f_2(x, y) dx$$

On a :

$$\int_c^d B(x) dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$$

Exemple 1 : $E = [1; 2] \times [0; 3]$ et

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y) = xy + y^2 + 1 \end{aligned}$$

En utilisant ce théorème de Fubini Calculer de deux manière différente l'intégrale double de f sur E puis conclure.

Théorème :

Soit $E = [a, b] \times [c, d]$ un rectangle fermé de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction continue sur E .

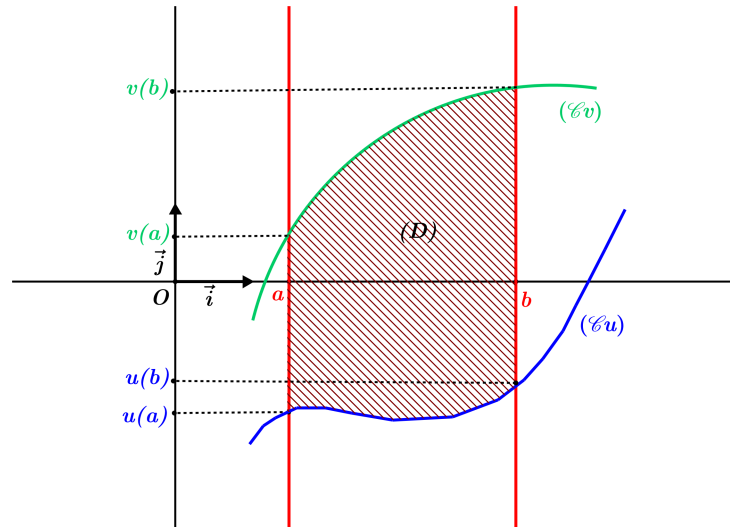
Alors on a :

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy &= \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx \\ &= \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy \end{aligned}$$

Exemple : $\int_1^2 \int_0^2 ye^{xy} dx dy \equiv \iint_{[1;2] \times [0;2]} ye^{xy} dx dy$

7.1.5 Intégrale double sur des domaines non rectangle

a- Domaine compris entre les graphes de deux fonctions et deux droites verticales



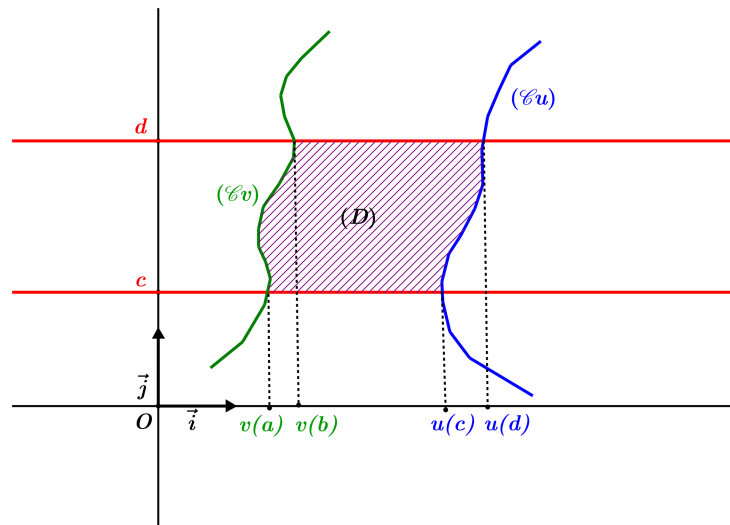
Soit u et v deux fonctions définies de $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b \text{ et } u(x) \leq y \leq v(x)\}$$

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ continue alors :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

b- Domaine compris entre les graphes de deux fonctions et deux droites horizontales



Soit u et v deux fonctions définies de $[c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ continue

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / v(x) \leq y \leq u(x) \text{ et } c \leq y \leq d\}$$

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ continue alors :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_{v(x)}^{u(x)} f(x, y) dx \right] dy$$

Cas général :

Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$ ($D \subset \mathbb{R}^2$)

On suppose que D n'est ni rectangle, ni la représentation d'un domaine située entre les graphes de deux fonctions et deux droites (verticales ou horizontale). Dans ce cas on décompose D en des domaines élémentaire de type de ceux déjà traité et on applique la propriété suivante.

Remarque 1.5.1 :

Soit D un domaine fermé et borné de $\mathbb{R}^2$.

On suppose que D est la réunion de deux domaines fermés c'est-à-dire que $D = D_1 \cup D_2$ tel que .

$$D_1 \cap D_2 = \emptyset \text{ ou } D_1 \cap D_2 \subset \partial D$$

Dans ce cas :

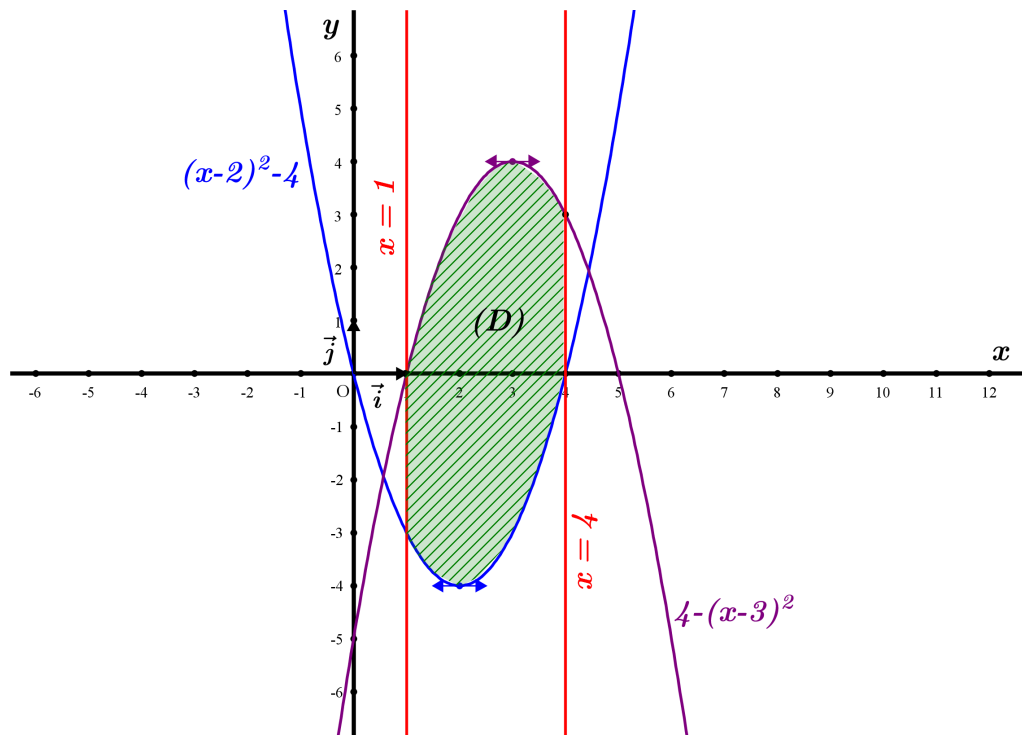
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy$$

Exemple 1 : Soit D le domaine compris entre les droites $x = 1$; $y = 4$; les paraboles d'équations $y = (x - 2)^2 - 4$ et $y = 4 - (x - 3)^2$

1. Représenter et déterminer le domaine D .
2. Calculer $I = \iint_D f(x, y) dx dy$ avec $f(x, y) = 3x - 2y + 1$.

Solution :

1. Représentons et déterminons le domaine D .



$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x \leq 4 \text{ et } (x-2)^2 - 4 \leq y \leq 4 - (x-3)^2\}$$

2. Calculons $I = \iint_D f(x, y) dx dy$

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_1^4 \int_{(x-2)^2-4}^{4-(x-3)^2} f(x, y) dy dx$$

Posons $I' = \int_{(x-2)^2-4}^{4-(x-3)^2} f(x, y) dy$ et $I = \int_1^4 I' dx$

$$I' = \int_{(x-2)^2-4}^{4-(x-3)^2} f(x, y) dy = \int_{(x-2)^2-4}^{4-(x-3)^2} (3x - 2y + 1) dy$$

$$= [3xy - y^2 + y]_{(x-2)^2-4}^{4-(x-3)^2}$$

$$I' = 2x^3 - 2x^2 + 55x - 30$$

Ainsi

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_1^4 (2x^3 - 2x^2 + 55x - 30) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{55}{2}x^2 - 30x \right]_1^4$$

$$I = 153$$

$$\boxed{I = 153}$$

Exemple 2 :

On donne $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -2 \leq x \leq \frac{1}{4}y^2 + 1 \text{ et } -2 \leq y \leq -\frac{1}{4}x^2 + 3\}$ et $f(x, y) = x - y$

1. Représenter le domaine D .

2. Déterminer D sous forme de la réunion de deux domaines D_1 et D_2 .

3. Calculer $J = \iint_D f(x, y) dx dy$

Solution :

1. Représentation du domaine D .

Posons $x \mapsto f_1(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3$

$$x \mapsto f_2(x) / [f_2(x)]^2 = 4(x-1)$$

2. Déterminons D sous forme de la réunion de deux domaines D_1 et D_2 .

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -2 \leq x \leq \frac{1}{4}y^2 + 1 \text{ et } -2 \leq y \leq 2\}$$

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -2 \leq x \leq 2 \text{ et } 2 \leq y \leq -\frac{1}{4}x^2 + 3\}$$

Alors $D = D_1 \cup D_2$

3. Calculons $J = \iint_D f(x, y) dx dy$

$$\boxed{J = -\frac{32}{3}}$$

7.1.6 Calcul d'aire d'un domaine de $\mathbb{R}^2$

Soit D un domaine borné de $\mathbb{R}$. L'aire d'un domaine de $\mathbb{R}^2$ est le réel

$$\mathcal{A}(D) = \iint_D dx dy$$

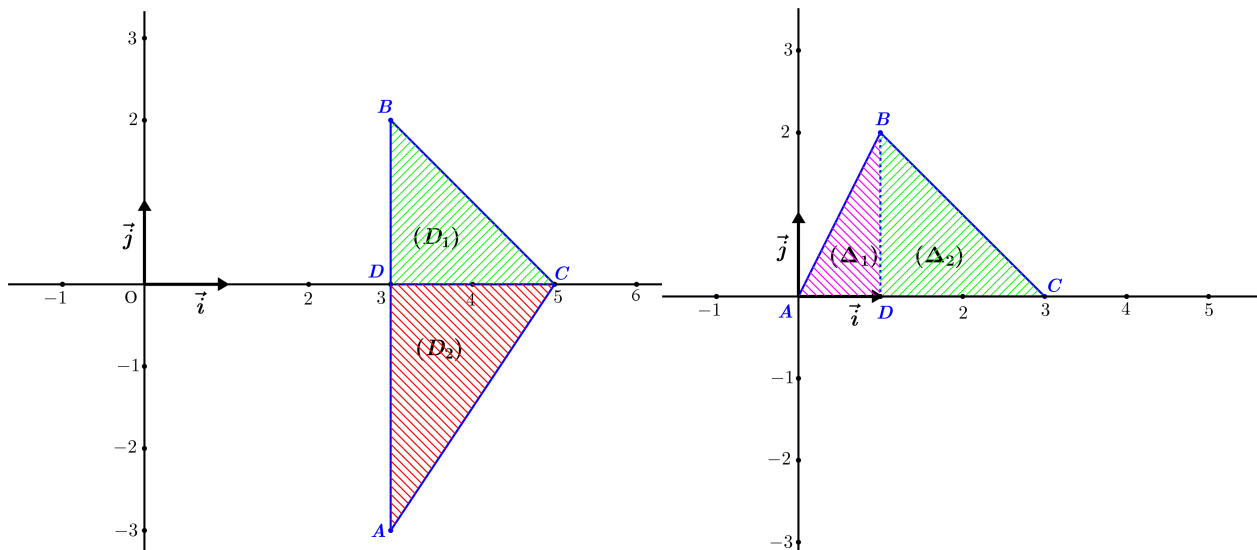
Autrement dit l'aire de D est la fonction caractéristique de D

$$1_D(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) \in D \\ 0 & \text{si } (x, y) \notin D \end{cases}$$

Exemple 1 : $D = [a, b] \times [c, d]$

$$\mathcal{A}(D) = \iint_D dx dy = \int_a^b \int_c^d dx dy = (b - a)(d - c)$$

Exemple 2 : On donne les représentations graphiques des domaines respectifs D et Δ :



Calculer l'aire des domaines respectifs D et Δ .

7.1.7 Changement de variables

Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(u, v) \longmapsto \varphi(u, v) = (x, y)$$

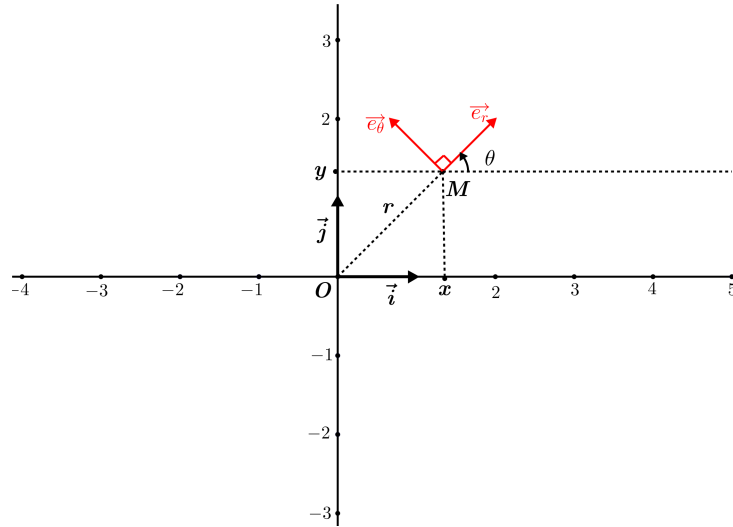
Soit $E \subset \mathbb{R}^2$ tel que

$$(a) \det(J_\varphi(u, v)) \neq 0, \quad \forall (u, v) \in E$$

$$(b) \varphi(E) = D$$

$$\text{Alors } \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_E (f \circ \varphi)(u, v) |J_\varphi(u, v)| du dv$$

a- Coordonnées polaires



La fonction $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(u, v) \longmapsto \varphi(u, v) = \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

Alors $|J_\varphi(r, \theta)| = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$

Donc

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_E r f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr d\theta$$

Exercice :

Calculer de deux manière différente l'aire de la boule $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < a^2\}$

c'est-à-dire $\mathcal{A} = \iint_{B(0, r)} dx dy$

7.2 Les intégrales triples**Introduction :**

On introduit de façon analogue à l'intégrale double l'intégrale triple.

Si $f : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue avec $D = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ alors

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ m \rightarrow +\infty \\ \ell \rightarrow +\infty}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{\ell} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1}) f(c_{ijk})$$

Remarque 1.5.1 :

Soit $D = [a, b] \times [c, d] \times [e, t]$ un fermé de $\mathbb{R}^2$.

- Si f, g et h sont trois fonctions intégrables sur D , alors $\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, la fonction $(x, y, z) \mapsto \alpha f(x, y, z) + \beta g(x, y, z) + \gamma h(x, y, z)$ est aussi intégrable sur D et on a :

$$\begin{aligned} \iiint_D [\alpha f + \beta g + \gamma h](x, y, z) dx dy dz &= \alpha \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz + \beta \iiint_D g(x, y, z) dx dy dz \\ &\quad + \gamma \iiint_D h(x, y, z) dx dy dz \end{aligned}$$

- Si f, g et h sont intégrables sur D , et $\forall (x, y, z) \in D, f(x, y, z) \leq g(x, y, z) \leq h(x, y, z)$ alors

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz \leq \iiint_D g(x, y, z) dx dy dz \leq \iiint_D h(x, y, z) dx dy dz$$

- Si f est intégrable sur D , alors la fonction $(x, y, z) \mapsto |f(x, y, z)|$ est aussi intégrable sur D , $|f(x, y, z)| = |f|(x, y, z)$ et on a :

$$\left| \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz \right| \leq \iiint_D |f(x, y, z)| dx dy dz$$

Technique de calcul

Soit $D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

On suppose que D a une des formes suivantes.

1^{er} cas : $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \text{ et } h_1(x, z) \leq z \leq h_2(x, z)\}$ où g_1, g_2, h_1 et h_2 sont des fonctions continues

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left(\int_{h_1(x, y)}^{h_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right] dx$$

2^{em} cas : $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / a \leq x \leq b, h_1(x, z) \leq y \leq h_2(x, z) \text{ et } g_1(x) \leq z \leq g_2(x)\}$

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left(\int_{h_1(x, y)}^{h_2(x, y)} f(x, y, z) dy \right) dz \right] dx$$

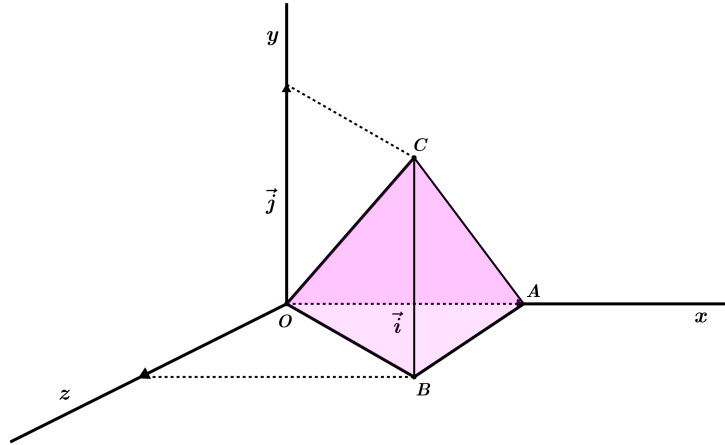
Exemple : Soit R l'intérieur du tétraèdre $OABC$

avec $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, et $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. Construire et déterminer le domaine R .
2. Calculer l'aire de ce domaine.

Solution :

1. Construisons et déterminons le domaine R .



déterminons l'équation des plans (OAB) , (OAC) , (OC) , (ABC)

- $\vec{OA} \wedge \vec{OB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (OAB) : z = 0$
- $\vec{OA} \wedge \vec{OC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (OBD) : -y + z = 0$
- $\vec{OC} \wedge \vec{OB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (OCB) : -x + y = 0$
- $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (ABC) : x = 1$

$(AC)|_{(xoy)} : x = y$

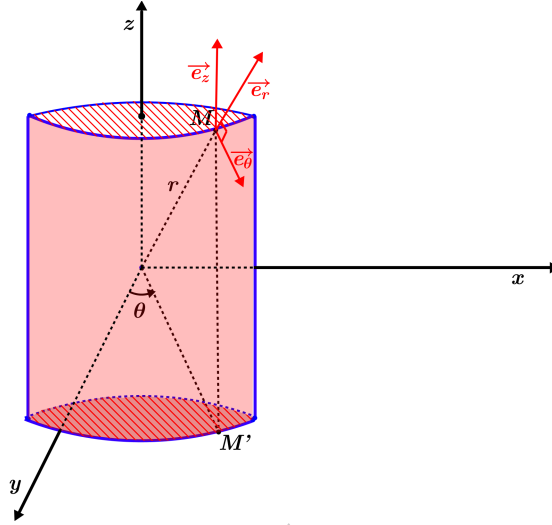
Alors $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}/0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x \text{ et } 0 \leq z \leq y\}$

2. Calculons l'aire de ce domaine. $\boxed{\mathcal{A}_R = \frac{1}{2}}$

Exemple : Calculer l'aire du domaine $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}/x \geq 0, y \geq 0, \text{ et } x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$

7.2.1 Changement de variables dans $\mathbb{R}^3$

a-Coordonnées cylindriques



Soit $E =]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\times \mathbb{R}$ et $\varphi : E \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
 $(r, \theta, z) \longmapsto (x, y, z)$

tel que $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$, et $J_\varphi(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} \cos \theta & r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\det [J_\varphi(r, \theta, z)] r \neq 0$

Soit D et $E \subset \mathbb{R}^3$ tel que $\varphi(D) = E$ avec $E =]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\times \mathbb{R}$
 Donc

$$\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_E r f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) dr d\theta dz$$

Exemple 1 : Calculer $I = \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$

avec $f(x, y, z) = ze^{x^2+y^2}$ et $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2 \text{ et } 0 \leq z \leq 1\}$

Effet posons $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$ avec $\begin{cases} x > 0 \\ \theta \in [0, 2\pi] \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$

$\sqrt{x^2 + y^2} = r \in [1; 2]$ et $\varphi(D) = [1; 2] \times [0; 2\pi] \times [0; 1] = E$

$$I = \iiint_E f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_E ze^{r^2} dr d\theta dz$$

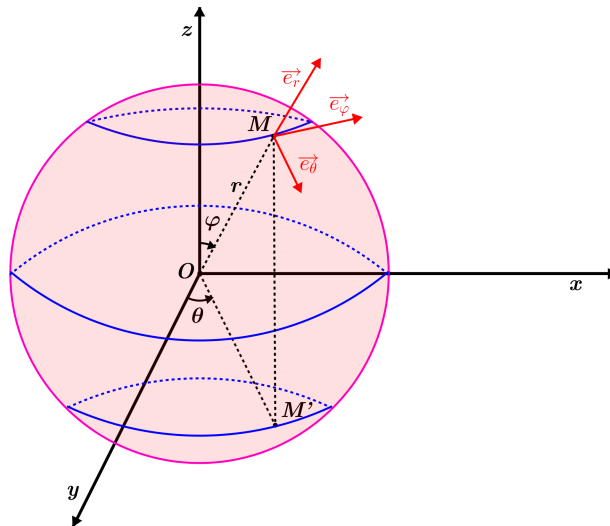
$$\iiint_E ze^{r^2} dr d\theta dz = \left(\int_0^1 z dz \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \cdot \left(\int_1^2 re^{r^2} dr \right) = \frac{\pi}{2} (e^4 - e)$$

$$I = \frac{\pi}{2} (e^4 - e)$$

Exemple 2 : Calculer $J = \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$ et le volume du domaine délimité par la fonction

$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ et le domaine $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq 1, z^2 \leq 4(x^2 + y^2) \text{ et } -2 \leq z \leq 2\}$

b-Coordonnées sphériques



Soit $\psi : E \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
 $(r, \theta, \varphi) \longmapsto (x, y, z)$

tel que
$$\begin{cases} x = r \cos \theta \sin \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \varphi \end{cases} \implies \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \tan \theta = \frac{y}{x} \\ \varphi = \arctan(\sqrt{x^2 + y^2}) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} r \geq 0 \\ \theta \in [0, 2\pi[\\ \varphi \in [0, \pi] \end{cases}$$

$$J_\psi(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \varphi & 0 & -r \sin \varphi \end{pmatrix} \quad \det [J_\psi(r, \theta, \varphi)] = r^2 \sin \varphi$$

Si D et $E \subset \mathbb{R}^3$ tel que $\psi(D) = E$ alors

$$\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_D r^2 f(r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi) |\sin \varphi| dr d\theta d\varphi$$

Intégrales généralisées

définition 1 :

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \setminus \{-\infty\} =]-\infty, +\infty]$.

On dit que f est localement intégrable sur $[a, b]$ si $\forall c \in]a, b[$, $\int_a^c f(x)dx \in \mathbb{R}$

définition 2 :

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et localement intégrable sur $[a, b[$

- On dit que b est une borne impropre de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ si
 - $b = +\infty$
 - $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \infty$
- Si $b = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \infty$ alors on dit que $\int_a^b f(x)dx$ est une intégrale généralisée

définition 3 :

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et localement intégrable sur $[a, b[$ et soit $c \in]a, b[$

- Si $\lim_{c \rightarrow b} \int_a^c f(x)dx = \ell \in \mathbb{R}$, on dit que $\int_a^b f(x)dx$ est convergente et converge vers ℓ et on écrira

$$\int_a^b f(x)dx = \ell$$
- Si $\lim_{c \rightarrow b} \int_a^c f(x)dx \in \mathbb{R}$, on dit que $\int_a^b f(x)dx$ diverge.

Exemple 1 : $f(x) = \ln(x)$ et $I = \int_0^1 f(x)dx$

Solution :

La fonction $x \longmapsto \ln(x)$ est continue sur $[a; 1]$, $\forall a \in [0; 1]$ donc f est localement intégrable sur $]0; 1]$

De plus

$$\int_a^1 \ln(x)dx = [x \ln(x) - x]_a^1 = -1 - a \ln(a) + a$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} (-1 - a \ln(a) + a) = -1 \text{ donc } \int_0^1 f(x)dx \text{ est convergente et } \int_0^1 f(x)dx = -1$$

Exemple 2 : Calculer $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$

Propriété :

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et localement intégrable sur $[a, b[$ et soit $c \in]a, b[$

$\int_a^b f(x)dx$ et $\int_c^d f(x)dx$ sont de même natures

De plus on a : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

8.1 Intégrale généralisée des fonctions ayant un signe constant

En remarquant que

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(-x)dx$$

On peut se limiter à l'étude de l'intégrale généralisée des fonctions positives.

Propriété :

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et localement intégrable sur $[a, b]$ et positive.

(1) On suppose que $\forall x \in [a, b], 0 \leq f(x) \leq g(x)$

(a) Si $\int_a^b g(x)dx$ converge alors $\int_a^b f(x)dx$ converge aussi et on a :

$$0 \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

(b) Si $\int_a^b f(x)dx$ diverge alors $\int_a^b g(x)dx$ diverge aussi

(c) Si $\int_a^b g(x)dx$ diverge alors on ne peut rien conclure pour $\int_a^b f(x)dx$

(d) Si $\int_a^b f(x)dx$ converge alors on ne peut rien conclure pour $\int_a^b g(x)dx$

(2) Si $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in]0, +\infty[$ alors les intégrales $\int_a^b f(x)dx$ et $\int_a^b g(x)dx$ sont de même nature

(2) Si $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ et $\int_a^b g(x)dx$ converge alors $\int_a^b f(x)dx$ converge.

8.2 Les intégrales de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $t \mapsto f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$

Etudions les intégrales $I = \int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ et $J = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$

- $I = \int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 0 \\ 1 & \text{si } \alpha = 0 \\ 0 & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$$

Supposons que $\alpha > 0$.

Posons $I(a) = \int_a^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ avec $a \in]0; 1]$

$$I(a) = \int_a^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$$

$$= \begin{cases} \left[\frac{1}{-\alpha+1} t^{-\alpha+1} \right]_a^1 & \text{si } \alpha \neq 1 \\ [\ln(t)]_a^1 & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \left[\frac{1}{1-\alpha} \left(1 - \frac{1}{a^{\alpha-1}} \right) \right] & \text{si } \alpha \neq 1 \\ -\ln(a) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt = \lim_{a \rightarrow 0^+} I(a) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Conclusion : $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge $\iff \alpha \in]0; 1[$

$$\bullet J = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$$

$$J(a) = \int_1^a \frac{1}{t^\alpha} dt \text{ avec } a > 0$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} \left(1 - \frac{1}{a^{\alpha-1}} \right) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ -\ln(a) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt = \lim_{a \rightarrow +\infty} J(a) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha < 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Conclusion : $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge $\iff \alpha > 1$

Remarque :

(1) Par un changement de variable $\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha} = \int_0^{b-a} \frac{dt}{(t)^\alpha}$

(2) Si f n'est ni définie en a ni en b on prend un réel $c \in \mathbb{R}$ et on pose :

$$I_1 = \int_a^c f(t)dt \text{ et } I_2 = \int_c^b f(t)dt$$

Si I_1 et I_2 convergent alors $\int_a^b f(t)dt$ converge et on a :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Exemple 1 :

Etudier l'intégrale $I = \int_2^{+\infty} \frac{\ln[\cos(\frac{1}{t})]}{\ln(t)} dt$

Solution :

$$\ln(1+x) \sim_0(x) \quad \text{et} \quad \cos(x) \sim_0 \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) \Rightarrow \cos\left(\frac{1}{t}\right) \sim_0 \left(1 - \frac{1}{2t^2}\right)$$

$$\text{Alors } \ln[\cos(\frac{1}{t})] \sim_{+\infty} \left(-\frac{1}{2t^2}\right)$$

$$\forall t \in [2; +\infty[; \begin{cases} 0 < \frac{1}{t} < \frac{1}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\left(\frac{1}{2}\right) < \cos\left(\frac{1}{t}\right) < 1 \\ \ln(t) > 0 \text{ et } \ln[\cos(\frac{1}{t})] < 0 \end{cases}$$

Donc $\forall t \in [2; +\infty[, f(t) < 0$

Posons $g : t \mapsto -f(t)$; $g(t) \sim_{+\infty} \frac{1}{2t^2 \ln(t)}$

$$\left[\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) := \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2t^2 \ln(t)} = 0 \right] \text{ Or } \forall t \in [2; +\infty[, \ln(t) > \ln 2 > 0 \text{ alors } \frac{1}{\ln(t)} < \frac{1}{\ln 2} \Rightarrow 0 < \frac{1}{2t^2} < \frac{1}{(2 \ln 2)t^2}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \text{ est convergente donc } \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt \text{ converge}$$

$$\text{Ainsi } \int_0^{+\infty} g(t)dt \text{ converge} \Rightarrow \int_0^{+\infty} f(t)dt = -\int_0^{+\infty} g(t)dt \text{ converge.}$$

$$\textbf{Exemple 2 : } I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(t-1)^\beta}$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur α et β pour que I converge.

8.3 Intégrales généralisées de fonction ne gardant pas un signe constant

Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction ne gardant pas un signe constant sur un intervalle I contenu dans $\mathbb{R}$

Définition :

On dit que f est absolument intégrable sur $[a, b[$ si la fonction $x \mapsto |f(x)|$ est intégrable sur $[a, b[$.

Proposition :

Soit f de $[a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable sur $[a, b[$

Si f est absolument intégrable sur $[a, b[$ alors f est intégrable sur $[a, b[$ et on a :

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Remarque :

Il existe des fonctions intégrables qui ne sont pas absolument intégrables

Exemple 1 : $t \mapsto f(t) = \frac{\sin(t)}{1+t^2}$

Montrer que est f absolument intégrable sur $[1, +\infty[$

Solution :

Montrons que f absolument intégrable sur $[1, +\infty[$

Soit $t \mapsto g(t) = |f(t)| = \frac{|\sin(t)|}{1+t^2}$

• $\forall t \in [1, +\infty[; g(t) \geq 0$

• De plus $\forall t \in [1, +\infty[, |\sin(t)| \leq 1$ et $1+t^2 > 0$ alors $g(t) \leq \frac{1}{1+t^2}$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan(t)]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}$

D'après le critère de comparaison f est absolument intégrable sur $[1, +\infty[$.

Exemple 2 : $t \mapsto f(t) = \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}$

Montrer que est f intégrable mais pas absolument intégrable sur $[1, +\infty[$

Intégrales curviligne.

9.1 Généralités

9.1.1 Courbes paramétrées

Soit $D \subset \mathbb{R}^n$. une courbe paramétrée dans D est toute application

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto \gamma(t) \in D \end{aligned}$$

et définie sur intervalle $[a, b]$.

L'ensemble image $\gamma([a, b]) = \{\gamma(t), t \in [a, b]\}$ est appelé courbe géométrique associée à γ . Il s'agit de la trajectoire décrite par γ et on identifie γ à son image. On dira alors que γ est une courbe sur D

$\gamma(a)$ est appelé l'origine du courbe et $\gamma(b)$ son extrémité

Une courbe est dite fermée si l'origine du courbe et l'extrémité se confondent $\gamma(a) = \gamma(b)$

9.2 Courbes inverses et juxtaposition

Soit $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe.

- La courbe $\gamma' : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $\gamma'(t) = \gamma(a + b - t)$ est appelé courbe inverses de γ car $\gamma'(a) = \gamma(b)$ et $\gamma'(b) = \gamma(a)$
- Soit $\gamma_1 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $\gamma_2 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ deux courbes telle que : $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$.

La juxtaposition des courbes γ_1 et γ_2 est la courbe $\gamma : [a, c] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ telle que :

$$\gamma|_{[a,b]} = \gamma_1 \quad \text{et} \quad \gamma|_{[b,c]} = \gamma_2$$

Remarque :

Paramétriser un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ c'est déterminer une courbe sur ce sous-ensemble.

Exemple :

Donner la paramétrisation de : $(AB); [AB]$ et $\mathcal{C}(A(a, b); R)$

Solution :

Donner la paramétrisation de : $(AB); [AB]$ et $\mathcal{C}(A(a, b); R)$

Soit

$$\begin{aligned} \gamma_1 : \mathbb{R} &\longrightarrow D \\ t &\longmapsto \gamma_1(t) \end{aligned}$$

$A(a, b), B(c, d)$ avec $c \neq a$

Posons : $\alpha = \frac{b-d}{a-c}$ et $\beta = b - \left(\frac{b-d}{a-c}\right)a$

Ainsi $(AB) : y = \alpha a + \beta$

$$\begin{aligned} \gamma_1 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \gamma_1(t) = (x(t); y(t)) \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \alpha t + \beta \end{cases}$$

Cherchons $[t_0; t_1]$ tel que $\alpha_1(t_0) = A$ et $\alpha_1(t_1) = B$

$$\begin{cases} \alpha_1(t_0) = (t_0, \alpha t_0 + \beta) = (a, b) \\ \alpha_1(t_1) = (t_1, \alpha t_1 + \beta) = (c, d) \end{cases} \implies \begin{cases} t_0 = a \\ t_1 = c \\ \alpha t_0 + \beta = b \\ \alpha t_1 + \beta = d \end{cases}$$

- Une paramétrisation de la droite (AB) est $\begin{cases} a = t_0 \\ c = t_1 \\ b = \alpha t_0 + \beta \\ d = \alpha t_1 + \beta \end{cases} \quad (\alpha, \beta, t_0, t_1) \in \mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned} \gamma_2 : [a, b] &\longrightarrow [AB] \subset \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \gamma_2(t) = \gamma_1(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Autrement dit } \gamma_1(t) = [x(t), y(t)] \in (AB) &\implies \overrightarrow{A\gamma_1(t)} = t\overrightarrow{AB} \\ &\implies \begin{cases} x(t) = t.x_{AB} + x_A \\ y(t) = t.y_{AB} + y_A \end{cases} \quad t \in [0; 1] \text{ et } \gamma_2(t) = \gamma_1(t)|_{t \in [0; 1]} \end{aligned}$$

- Une paramétrisation du segment $[AB]$ est $\begin{cases} x(t) = t.x_{AB} + x_A \\ y(t) = t.y_{AB} + y_A \end{cases} \quad t \in [0; 1]$

$$\begin{aligned} \text{Soit } M(x, y) \in \mathcal{C} &\iff (x - a)^2 + (y - b)^2 = R \\ &\iff \left(\frac{x - a}{R}\right)^2 + \left(\frac{y - b}{R}\right)^2 = 1 \end{aligned}$$

$t \longmapsto \gamma(t) = (R \cos t + a; R \sin t + b) = (x(t); y(t))$. Alors $\forall t \in \mathbb{R}, \gamma(t) \in \mathcal{C}(A(a, b); R)$

- Une paramétrisation du cercle $\mathcal{C}(A(a, b); R)$ est $\begin{cases} x(t) = R \cos t + a \\ y(t) = R \sin t + b \end{cases} \quad R > 0 \text{ et } t \in [0; 2\pi]$

9.3 Vecteur tangent.

Soit $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $t \longmapsto \gamma(t)$ une courbe.

$A \in \mathbb{R}^n$; $\gamma(A) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ avec $\gamma \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Un vecteur tangent à la courbe γ est le vecteur $X(t) = x'(t) = (x'_1(t), x'_2(t), \dots, x'_n(t))$.

En mécanique du point, lorsque $\gamma(t)$ décrit la trajectoire de point matériel, alors $\gamma'(t)$ représente la vitesse de ce point matériel.

9.4 Intégrale d'un champs de vecteur le long d'une courbe

9.4.1 Champs de vecteur

Un champs de vecteur de $\mathbb{R}$ est toute application F d'efinie par :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) &\longmapsto F(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Exemple :

$F(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ avec $\vec{i} = (1; 0)$; $\vec{j} = (0; 1)$ et $F(x, y) = [P(x, y), Q(x, y)]$

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ on a :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

Définition :

Soit $F : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur D .

Soit γ une paramétrisation de D . On appelle intégrale de F le long de γ (intégrale curviligne); le réel noté $\int_{\gamma} \vec{F}$ tel que :

$$\int_{\gamma} \vec{F} = \int_a^b \vec{F}[\gamma(t)] \cdot \gamma'(t) dt \quad \text{si } \gamma : [a, b] \longrightarrow D$$

On écrit plus souvent $\int_{\gamma} \vec{F} = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$

Remarque : 

En physique, l'intégrale curviligne de F le long de γ est encore appelée la circulation ou le travail de F le long de γ .

Lorsque γ est une courbe fermée, on écrit souvent

$$\int_{\gamma} \vec{F} = \oint_{\gamma} \vec{F}$$

Exemple :

Calculer l'intégrale curviligne sur $[0; 1]$ le long de la courbe $\gamma(t)$ et du champs de vecteur F tel que : $\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\gamma(t) = (t, 2t)$

9.4.2 Longueur d'une courbe.

Soit $\gamma : t \mapsto \gamma(t)$ une courbe dessinée sur $D \subset \mathbb{R}^n$

La longueur de la courbe γ est le réel $L(\gamma)$ égale à l'intégrale curviligne le long de γ du champ de vecteur unitaire tangent à γ . C'est-à-dire :

$$L(\gamma) = \int_{\gamma} \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \cdot d\vec{\ell}$$

Si $\gamma : [a, b] \longrightarrow D$ alors $L(\gamma) = \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \cdot \gamma'(t) dt$

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

9.4.3 Quelques propriétés de l'intégrale curviligne

(1) Si γ^- est la courbe inverse de γ alors

$$\int_{\gamma} \vec{F} = - \int_{\gamma^-} \vec{F}$$

(2) Soit $\gamma_1 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $\gamma_2 : [b, c] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tels que $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$

La juxtaposition de $\gamma_1(b)$ et $\gamma_2(b)$ est la courbe notée $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 : [a, c] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ telle que : $\gamma|_{[a, b]} = \gamma_1$ et $\gamma|_{[b, c]} = \gamma_2$

$$\int_{\gamma} \vec{F} = \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} \vec{F} = \int_{\gamma_1} \vec{F} + \int_{\gamma_2} \vec{F}$$

9.4.4 Cas particulier de champs dérivant d'un potentiel

Soit $F : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

On dit que F dérivant d'un potentiel ou bien F est un champs conservatif, s'il existe $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur D telle que $\vec{\nabla} f = \vec{F}$.

Dans ce cas la fonction f est appelé potentiel de F .

Propriété :

Soient $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$
 Alors

$$\int_{\gamma} \overrightarrow{grad}(f) = f[\gamma(b)] - f[\gamma(a)]$$

On dit que l'intégrale curviligne d'un champs de vecteur dérivant d'un potentiel ne dépend pas du chemin choisit plutôt de l'origine et de l'extrémité.

En particulier : si γ est fermé

$$\oint_{\gamma} \overrightarrow{grad}(f) = 0$$

Propriété :

Soit F un champs de vecteur et γ fermé.

Si $\oint_{\gamma} \vec{F} = 0$ alors $\vec{F}$ est un conservatif.

Rappel : Condition nécessaire suffisante pour qu'un champs décrive d'un potentiel lorsque le domaine est simplement connexe.

Définition :

Soit $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe.

On dit que γ est une courbe simple lorsque $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ pour tout $t_1 \neq t_2$ sauf lorsque $t_1 = a$ et $t_2 = b$; γ est dit simple lorsque γ ne se coupe pas. On dit aussi que γ est une courbe régulier.

Un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ est dit simplement connexe si tout chemin fermé construit dans ce sous-ensemble n'entoure que des points de D .

Autrement dit on dit que D est un ensemble connexe lorsque D n'a pas de trou.

Exemple :

$\mathbb{R}^2$ et tout ensemble convexe est simplement connexe.

Théorème : de point carré

Soit F un champ de vecteur définie par :

$$\begin{aligned} F : D \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto [P(x, y), Q(x, y)] \end{aligned}$$

$F \in \mathcal{C}^1(D)$ et D simplement connexe.

F est un champs conservatif si et seulement si $\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y), \forall (x, y) \in D$

Exemple :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (3 + 2xy, x^2 - 3y^2) \end{aligned}$$

Démontrer que ce champs est conservatif et démontrer ses fonctions potentielles.

9.5 Formule de Green-Riemann

Soit $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe fermée de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux délimitant un domaine compacte D simple du plan (γ est une paramétrisation de $D \subset \mathbb{R}^2$)

Soit F un champs de vecteur $F : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que :

$$F(x, y) = [P(x, y), Q(x, y)], \forall (x, y) \in D$$

Alors on a la formule suivante appelé formule de **Green-Riemann**

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\gamma} F[\gamma(t)] \cdot \gamma'(t) dt = \iint_D \left[\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \right] dx dy$$

Exemple :

Calculer l'intégrale curviligne donnant circulation de $F(x, y) = (x^3 - y^3, x^3 + y^3)$ le long de $\mathcal{C}((0, 0); 1)$ parcouru dans le sens trigonométrique.

9.5.1 Conséquence de la formule de Green

Soit D un domaine compact simple et γ une courbe fermée de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux délimitant D .

Par définition on a : $\mathcal{A} = \iint_D dx dy$

$$\mathcal{A} = \iint_D dx dy = \mathcal{A} = \iint_D \left[\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \right] dx dy$$

On a les résultats suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \iint_D dx dy \\ &= \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \text{ avec } F(x, y) = [P(x, y), Q(x, y)] \\ &= \int_{\gamma} (0, x) \cdot d\vec{\ell} = \int_{\gamma} x dy \\ &= - \int_{\gamma} y dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\gamma} (-y dx + x dy) \end{aligned}$$

Exemple :

Calculer l'aire de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a > 0$ et $b > 0$

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

Solution :

$$\begin{aligned} \text{Soit } \gamma : [0; 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \gamma(t) = (a \cos t, b \sin t) \end{aligned}$$

γ est la paramétrisation de E

$$\mathcal{A}(E) = \int_0^{2\pi} (0, a \cos t) \cdot \gamma'(t) dt$$

$$\gamma'(t) dt = (-a \sin t, b \cos t) \text{ alors } F[\gamma(t)] \cdot \gamma'(t) = ab \cos^2 t$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(E) &= \int_0^{2\pi} (0, a \cos t) \cdot \gamma'(t) dt \\
&= \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} (1 - a \cos 2t) dt \\
&= \frac{ab}{2} \left[t - \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{2\pi} = \pi ab \quad \boxed{\mathcal{A}(E) = \pi ab}
\end{aligned}$$

Exemple :

Calculer l'aire de l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a > 0$ et $b > 0$

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

9.6 Les intégrales de surfaces

D une surface régulier de $\mathbb{R}^3$ c'est-à-dire

$$D = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / f(x, y, z) = k \}$$

avec $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que

$$\forall M \in D, (\nabla f)(M) \neq \vec{0}_{\mathbb{R}^3}$$

une paramétrisation de D est toute application

$$\begin{aligned}
\varphi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\
(u, v) &\longmapsto \varphi(u, v) = [x(u, v); y(u, v); z(u, v)]
\end{aligned}$$

telle que $\varphi(u, v) \in D, \forall (u, v) \in \mathcal{U}$. Ainsi φ est un champs scalaire de $\mathbb{R}^3$

9.6.1 Définition de l'intégrales de surface

Soit φ un champs scalaire de $\mathbb{R}^3$. On appelle intégrale de φ le long de la surface D , le réel I noté

$$I = \iint_D \phi d\sigma = \iint_A \phi[\varphi(u, v)] \cdot \|\vec{N}\| du dv$$

$A = \varphi(D)$ et $\vec{N}$ le vecteur normal associé à la paramétrisation.

L'élément $\|\vec{N}\| du dv$ est appelé élément de surface et est noté souvent $d\sigma$

Exemple :

Calculer l'aire D tel que $D = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = z^2 \text{ et } 0 \leq a \leq z \leq b \}$

Solution :

Calculons l'aire D tel que $D = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = z^2 \text{ et } 0 \leq a \leq z \leq b \}$

$$\mathcal{A}(D) = \iint_D 1 d\sigma$$

$$\begin{aligned}
\text{Soit } \gamma : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\
(r, t) &\longmapsto \gamma(t) = (r \cos t, r \sin t, r)
\end{aligned}$$

est une paramétrisation de D avec $\forall (r, t) \in \mathbb{R}^2, \varphi(r, t) \in D, r \in [a, b] \text{ et } t \in [0; 2\pi]$

$$\vec{e}_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = (\cos t, \sin t, 1) \quad \text{et} \quad \vec{e}_t = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = (-r \sin t, r \cos t, 0)$$

$$\vec{N} = \vec{e}_r \wedge \vec{e}_t = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r \cos t \\ -r \sin t \\ r \end{pmatrix}$$

alors $\vec{N} = \sqrt{(-r \cos t)^2 + (-r \sin t)^2 + r^2} = r\sqrt{2}$
 $\mathcal{A}(D) = \sqrt{2} \int_a^b \int_0^{2\pi} r dr dt = \sqrt{2} \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_a^b [t]_0^{2\pi} = \pi\sqrt{2}(b^2 - a^2)$

9.6.2 Flux d'un champ vectoriel

Soit F un champ de vecteur de $\mathbb{R}^3$ et D une surface de $\mathbb{R}^3$

On appelle flux de F à travers la surface D , l'intégrale :

$$I = \iint_D (\vec{F} \cdot \vec{n}) d\sigma$$

où $\vec{n}$ est la normale unitaire à la surface

$$I = \iint_D (\vec{F} \cdot \vec{n}) d\sigma = \iint_A F[\varphi(u, v)] \cdot \vec{N} du dv$$

si φ est une paramétrisation de D et $\varphi(D) = A$

Exemple :

Calculer le flux sortant à travers la demi sphère $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z \geq 0 \text{ et } x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ et $F(x, y, z) = (x, -y, 2)$

9.6.3 Formule de stockes-Ampère

Soit D une surface de $\mathbb{R}^2$ dont le ∂D est orienté et paramétriser par la courbe définie par

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow \partial D \subset \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \gamma(t) \end{aligned}$$

Ainsi ;

$$\iint_D [\vec{r} \partial t(\vec{V}) \cdot \vec{N}] du dv = \int_{\gamma} \vec{V} \cdot d\vec{\ell}$$

9.6.4 Formule de Green-Ostogradshy

Soit $K \subset \mathbb{R}^3$ un domaine fermé et borné délimité par une surface orientée D c'est-à-dire $D = \partial K$.

Soit F un champs de vecteur de classe $\mathcal{C}^1$ sur K

$$\iint_D (\vec{F} \cdot \vec{n}) d\sigma = \iiint_K \text{div}(\vec{F}) dx dy dz$$

Exemple :

En utilisant la formule Green-Ampère calculer la surface d'elimitée par

$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z \geq 0 \text{ et } x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ et le champ de vecteur $F(x, y, z) = (x, -y, 2)$

Solution :

D'après la formule Green-Ampère on a : $I = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} du dv$

Cherchons $\vec{V}$ tel que $\vec{r} \partial t(\vec{V}) = \vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V}$

$$\begin{aligned} \vec{V} : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto V(x, y, z) = (f_1, f_2, f_3) \end{aligned}$$

$$\vec{r} \partial t(\vec{V}) = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \text{ et } \vec{V}(x, y, z) = (-y, x, xy), \partial S = \mathcal{C}(0; 1)$$

$$\begin{aligned} \text{Soit } \gamma : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto \gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0) \end{aligned}$$

est une paramétrisation de S

$$\begin{aligned}
I &= \int \vec{V} \cdot d\vec{\ell} \\
&= \int_0^{2\pi} \vec{V}[\gamma(t)] \cdot \gamma'(t) dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t, \sin t \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt \\
&= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t + 0) dt \\
&= \int_0^{2\pi} 1 dt \\
I &= [t]_0^{2\pi} = 2\pi \quad \boxed{I = 2\pi}
\end{aligned}$$

Exemple :

En utilisant la formule Green-Ostogradshy calculer le flux du champ de vecteur

$F(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$ sortant à travers la sphère S d'équation

$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

FIN.

C'est bon maintenant

mail@ideal