Cours sur les suites

LMD 1ère année, Unités LM115 et LM 151,
année 2005-06

Henri Skoda

Plan du cours sur les suites.
0) Axiomes de définition de $\mathbb{R}$.
1) Définition d'une suite.
2) Définition de la convergence d'une suite.
3) Propriétés élémentaires: unicité de la limite,....
4) Théorème des "gendarmes".
5) Toute suite convergente est bornée.
6) Suites monotones bornées.
7) Exemple des suites récurrentes: $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est croissante.
8) Limites infinies.
9) Opérations sur les limites.
10) Suites réelles et complexes.
11) Suites adjacentes (ou suites d'intervalles emboîtés).
Le paragraphe 12) suivant sera traité en T.D sur des exemples dans la mesure du temps disponible. Il n'est pas strictement au programme de l'unité:
12) Suites récurrentes: $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est décroissante.
En revanche le paragraphe 13) qui suit est fondamental:
13) Suites: $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est contractante.

0) **Propriétés du corps $\mathbb{R}$ des nombres réels.**
Intuitivement, l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est représenté par l'ensemble des points d'une droite, munie d'une origine O (cette origine est identifiée au nombre 0). Un nombre réel est également représenté par un développement décimal illimité.
Nous admettons donc comme intuitive, l'existence de l'ensemble <u>$\mathbb{R}$ des nombres réels,</u> vérifiant les propriétés suivantes:

a) $\mathbb{R}$ est un corps commutatif qui contient le corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$. L'addition et la multiplication de $\mathbb{R}$ prolongent celles de $\mathbb{Q}$.
b) $\mathbb{R}$ est muni d'une relation (dite) d'ordre, notée $x \leq y$ qui vérifie par définition les propriétés suivantes:
i) $\forall x \in \mathbb{R}, \ \ x \leq x$, (réflexivité).
ii) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \ x \leq y \ \ et \ \ y \leq x \implies x = y$ (antisymétrie)
iii) $\forall x, \ y, \ z \in \mathbb{R}, \ \ x \leq y \; et \; y \leq x \implies x \leq z$ (transitivité)
iv) De plus, cet ordre est total, à savoir:
$\forall x, \ y \in \mathbb{R}, \ \ x \leq y \; ou \; y \leq x$
(c'est à dire deux réels sont toujours comparables)
v) Cet ordre est compatible avec l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$, au sens suivant:
$\forall x, \ y, \ z, \in \mathbb{R}, \ x \leq y \ \implies x + z \leq y + z$
$\forall x, \ y, \in \mathbb{R}, \ \forall z \in \mathbb{R}_+, \ \ x \leq y \ \implies \ \ xz \leq yz$
vi) L'ordre de $\mathbb{R}$ prolonge l'ordre naturel de $\mathbb{Q}$.

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite $(x_n = \frac{p_n}{q_n})_{n \in \mathbb{N}}$ de rationnels (c'est à dire $x_n \in \mathbb{Q}$) telle que: $\lim x_n = x$.
On dit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
(Prendre par exemple pour x_n la valeur décimale approchée par défaut de x à 10^{-n} près.)

d) Dans $\mathbb{R}$, toute suite croissante, majorée est convergente.
C'est à dire, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels telle que:
i) Pour tout n: $u_n \leq u_{n+1}$,
ii)$\exists M \in \mathbb{R}, \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \ \mathbf{u_n} \leq \mathbf{M}$,
alors, il existe $l \in \mathbb{R}$, unique, tel que:

$$\lim u_n = l$$

(on va définir prochainement, la signification précise de la notion de limite.)

Remarque
Soit $x \in \mathbb{R}$, on considère une écriture décimale (en général illimitée) du nombre x:

$$x = x_0, x_1 x_2 \ \ldots \ x_n \ \ldots$$

où $n \in \mathbb{N}$ et où $0 \leq x_n \leq 9$, pour tout $n \geq 1$.
Par exemple: $\frac{1}{3} = 0,3333 \ldots 3 \ldots$

Soit:
$$u_n := x_0, x_1\, x_2\, \ldots\, x_n\, 0\,0\,0\,0\, \ldots$$
l'approximation décimale de x à 10^{-n} près par défaut, soit encore:
$$u_n := x_0 + x_1 10^{-1} + x_2 10^{-2} + \ldots + x_n 10^{-n}$$
de sorte que:
$$u_n \leq x \leq u_n + 10^{-n}$$
(Par exemple: $1 = 0,9999\ldots$ de sorte qu'on a: $0,999 < 1 = 0,999 + 10^{-3}$)
On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$u_n \leq u_{n+1}$
$0 \leq x - u_n \leq 10^{-n}$.
C'est à dire tout nombre réel x est limite de la suite croissante de ses approximations décimales (par défaut) (qui sont des nombres rationnels).
Les propriétés c) et d) sont donc naturelles car ce ne sont que des extensions de la définition habituelle d'un nombre réel à l'aide d'un développement décimal (en général illimité), (observer qu'il peut exister deux développements décimaux distincts, par exemple $1 = 1,0000\ldots$ et $1 = 0,9999\ldots$).

Pour terminer, rappelons enfin les propriétés de la <u>valeur absolue</u> d'un nombre réel.
Par définition, on pose:
$|x| = x, \quad$ pour $x \geq 0$,
$|x| = -x, \quad$ pour $x \leq 0$.

La valeur absolue $|x|$ vérifie les propriétés immédiates suivantes:
i) $|x| = |-x|$,
ii) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \;\; |xy| = |x|\;|y|$,
iii) $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = 0 \iff x = 0$.
iv) enfin (et surtout) la valeur absolue vérfie l'inégalité fondamentale suivante dite **inégalité triangulaire** $\forall x, y \in \mathbb{R}$:
$$\boldsymbol{||x| - |y|| \;\leq\; |x + y| \leq\; |x| + |y|}$$
C'est la 2eme partie: $|x + y| \leq\; |x| + |y|$, qui est la plus importante.
La démonstration en est aisée car, on a en fait:
$|x + y| = \; |x| + |y|$, lorsque x et y sont de même signe.

$|x+y| = \; ||x|-|y||$, lorsque x et y sont signes opposés.

Enfin, en appliquant à répétitions l'inégalité iv), on obtient:

$$\boldsymbol{|x_1+x_2+\ldots+x_n| \;\leq\; |x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|,}$$

pour tous $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, forme très utilisée de **l'inégalité triangulaire**. Rappelons que les mêmes inégalités triangulaires sont vraies pour des nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ avec le module $|z|$.

1) Définition d'une suite

Rappelons la définition classique d'une suite.

Définition.
On appelle suite $(u_n)_{n \in N}$ ou (u_n) de nombres réels toute application (ou fonction) de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad \mathbf{n} \to \mathbf{u(n)} = \mathbf{u_n}$$

On préfère noter u_n plutôt que (la notation fonctionnelle) $u(n)$, la valeur de la suite pour la valeur n de la variable $n \in \mathbb{N}$.

Exemples:
1) $n \to \frac{1}{n}$ ou $(\frac{1}{n})$.
2) $n \to \frac{1}{n^2}$ ou $(\frac{1}{n^2})$.
3)Les suites dites récurrentes. On se donne une fonction f d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans lui-même:

$$f : I \to I, \quad x \to f(x)$$

La suite est définie en se donnant u_0 dans I et en calculant u_{n+1} en fonction de u_n par:

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

Par exemple: $u_0 = 2$ et $f(x) = x^2$, soit: $u_{n+1} = u_n^2$.

2) Notion de suite convergente.

Définition.
On dit que la suite (u_n) de nombres réels converge vers la limite $l \in \mathbb{R}$ quand n tend vers l'infini, si et seulement si:

$$\forall \epsilon > 0, \; \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que} : \forall \mathbf{n} \geq \mathbf{N}, \;\; |\mathbf{u_n} - \mathbf{l}| < \epsilon.$$

On écrit: $\lim_{n\to\infty} u_n = l$ *ou* $\lim u_n = l$ *ou encore* $u_n \longrightarrow l$ *quand* $n \longrightarrow \infty$.

Intuitivement, cela signifie que le terme général u_n de la suite se rapproche indéfiniment de l quand n augmente indéfiniment: si petit que soit le nombre ϵ, u_n diffère de moins de ϵ de sa limite l, pourvu que n soit assez grand (c'est à dire, pourvu que n soit plus grand qu'un certain entier N qui, bien sûr, dépend de ϵ).

Remarques

1) Si on travaille dans $\mathbb{R}$, c'est à dire $u_n \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$, la condition:

$$|u_n - l| < \epsilon.$$

est équivalente à:

$$l - \epsilon < u_n < l + \epsilon.$$

ou encore:

$$u_n \in \,]l - \epsilon \, , \, l + \epsilon[$$

2) La condition: $\lim u_n = l$, signifie encore que pour tout intervalle $]l - \epsilon \, , \, l + \epsilon[$, centré au point l, tous les termes u_n de la suite sont dans cet intervalle sauf, au plus, un nombre fini d'entre eux (sauf éventuellement ceux pour lesquels $n \leq N(\epsilon)$)

3) Pour chaque $\epsilon > 0$ donné à l'avance, l'entier N dépend de ϵ: N = N(ϵ). Par exemple, pour la suite (u_n) avec $u_n = \frac{1}{n}$ qui a pour limite 0, l'inégalité: $\frac{1}{n} \leq \epsilon$ est équivalente à: $n \geq \frac{1}{\epsilon}$. On peut donc choisir pour $N(\epsilon)$ le premier entier supérieur à $\frac{1}{\epsilon}$. Par exemple, pour $\epsilon = 10^{-k}$, on peut choisir $N = 10^k$. Autrement dit, on a $N(\epsilon)$ de l'ordre de $\frac{1}{\epsilon}$.

4) On dispose d'une grande flexibilité sur le choix de l'entier $N(\epsilon)$. Car, si un entier $N(\epsilon)$ convient, alors tout autre entier $\geq N(\epsilon)$ convient également, par exemple $N(\epsilon) + 1$ ou $N(\epsilon) + 2$ ou encore $2N(\epsilon)$.

5) Dans le même ordre d'idée, on observera que si $u_n \longrightarrow l$ alors on a aussi: $u_{n+1} \longrightarrow l$, $u_{n+2} \longrightarrow l$ ou encore $u_{n+p} \longrightarrow l$ pour tout p fixé (c'est évident d'après la définition).

6) La condition $u_n \longrightarrow 0$ est équivalente à la condition $|u_n| \longrightarrow 0$.

7) Dans la définition, seule l'inégalité stricte: $\epsilon > 0$ est importante, les autres inégalités (strictes ou larges) $n \geq N$ ou $|u_n - l| < \epsilon$ peuvent être remplacées par les inégalités (strictes ou larges) $n > N$ ou $|u_n - l| \leq \epsilon$.
En effet, $n > N$ entraîne: $n \geq N$ et $n \geq N + 1$ entraîne: $n > N$.
De même, $|u_n - l| < \epsilon$ entraîne: $|u_n - l| \leq \epsilon$ et $|u_n - l| \leq \frac{\epsilon}{2}$ entraîne $|u_n - l| < \epsilon$.

8) Exemples: On a déjà vu que la suite (u_n) avec $u_n = \frac{1}{n}$ converge vers 0. Comme $10^{-n} \leq 2^{-n} \leq \frac{1}{n}$ (car $2^n \geq n$), on a aussi: $\lim 10^{-n} = \lim 2^{-n} = \lim \frac{1}{n} = 0$ et on peut choisir le même entier $N(\epsilon)$ pour ces trois suites.

3) Propriétés élémentaires des limites de suite

Proposition
*Lorsqu'elle **existe**, la limite **l** de la suite $(u_n)_{n \in I\!N}$ est **unique**.*

En effet, supposons qu'on ait deux limites l et l' pour la suite (u_n).
Pour $\epsilon > 0$ donné, par définition de la limite $\lim u_n = l$, il existe un entier $N(\epsilon)$ tel que pour tout $n \geq N(\epsilon)$, on ait:

$$|u_n - l| < \epsilon.$$

De même, par définition de $\lim u_n = l'$, il existe un entier $N'(\epsilon)$ tel que pour tout $n \geq N'(\epsilon)$, on ait:

$$|u_n - l'| < \epsilon.$$

On en déduit, pour $n \geq \max(N(\epsilon), N'(\epsilon))$, en utilisant l'inégalité triangulaire:

$$|l - l'| = |(l - u_n) + (u_n - l')| \leq |u_n - l| + |u_n - l'| < \epsilon + \epsilon$$

Soit encore, pour tout $\epsilon > 0$:

$$|l - l'| < 2\epsilon$$

Si on avait: $l \neq l'$, on pourrait choisir $\epsilon = \frac{1}{4}|l - l'|$ (qui est strictement positif) de sorte qu'on aurait:

$$|l - l'| < \frac{1}{2}|l - l'|$$

ou encore:

$$1 < \frac{1}{2}$$

ce qui est absurde.
On a donc bien $l = l'$.

Proposition
Si la suite réelle (u_n) converge vers une limite $l \neq 0$, le terme général u_n de la suite est $\neq 0$ et du signe de l pour n assez grand.

On peut encore énoncer le résultat sous la forme suivante:
Il existe un entier N tel que pour tout $n > N$, on ait: $u_n\, l > 0$.

Démonstration:
Supposons, par exemple, que: $l > 0$.
On a par définition de la limite:

$$(1) \qquad \forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que} : \forall \mathbf{n} \geq \mathbf{N},\ \ \mathbf{l} - \epsilon < \mathbf{u_n} < \mathbf{l} + \epsilon.$$

Comme $l > 0$, on peut choisir pour ϵ tout nombre > 0 petit devant l, par exemple $\epsilon = \frac{1}{2}l$. (1) devient:

$$(2) \qquad \exists N = N(\frac{1}{2}l) \text{ tel que} : \forall n \geq N,\ \ l - \frac{1}{2}l < u_n < l + \frac{1}{2}l.$$

ou encore:

$$(2') \qquad \exists N = N(\frac{1}{2}l) \text{ tel que} : \forall n \geq N,\ \ 0 < \frac{1}{2}l < u_n < \frac{3}{2}l.$$

On a bien:

$$(2") \qquad \forall n \geq N \qquad u_n > 0$$

Exemple d'application:
La suite de terme général $u_n = (-1)^n$ diverge. En effet, si elle convergeait vers une limite $l \neq 0$, u_n serait du signe de l pour n assez grand, or ceci est impossible puisque $u_{2p} = 1$ et que $u_{2p+1} = -1$. On aurait forcément $l = 0$, or c'est également impossible car $|u_n| = 1$, u_n ne tend pas vers 0.

Corollaire. *Passage à la limite dans les **inégalités larges.***
1) Supposons que $\forall n,\ u_n \geq 0$ et que $\lim u_n = l$, alors: $l \geq 0$.

1') Supposons que $\forall n,\ u_n \leq 0$ *et que* $\lim u_n = l$*, alors:* $\ \ l \leq 0$.
2) Supposons que $\forall n,\ u_n \leq v_n$ *et que* $\lim u_n = l$, $\lim v_n = l'$ *alors:* $\ \ l \leq l'$.

En effet, pour le 1), si, par l'absurde, on avait:

$$l < 0$$

alors u_n serait du signe de l c'est à dire < 0, pour n assez grand. Or ceci contredit l'hypothèse $\forall n,\ u_n \geq 0$.

Pour prouver le 2), on applique le 1) à la suite $(v_n - u_n)$ qui est à termes ≥ 0;
On a donc:

$$\lim(v_n - u_n) \geq 0$$

Comme on verra que:

$$\lim(v_n - u_n) = l' - l$$

on en déduit:

$$l' - l \geq 0$$
$$l' \geq l.$$

En revanche les inégalités strictes ne passsent pas à la limite comme le montre l'exemple très simple de $u_n = \frac{1}{n}$ qui est strictement positive or on a: $\lim u_n = 0$, cette limite n'est pas strictement positive.

4) Théorème *dit des* ***"gendarmes"*** *(ou méthode de l'encadrement).*
Soit (u_n), (v_n), (w_n) *trois suites de nombres réels telles que:*

$$\forall n, \ \ u_n \leq v_n \leq w_n,$$

et telles que:

$$\lim u_n = \lim w_n = l,$$

alors, on a aussi:

$$\lim v_n = l.$$

Démonstration:
Comme $\lim u_n = l$, on a, par définition: $\forall \epsilon > 0, \exists N_1(\epsilon)$ tel que $\forall n \geq N_1(\epsilon)$, on ait:

(1) $$l - \epsilon < u_n < l + \epsilon$$

De même, comme $\lim w_n = l$, on a, par définition: $\forall \epsilon > 0, \exists N_2(\epsilon)$ tel que $\forall n \geq N_2(\epsilon)$, on ait:

$$l - \epsilon < w_n < l + \epsilon \tag{2}$$

On déduit de (1) et de (2) que pour $n \geq \max(N_1(\epsilon), N_2(\epsilon))$, on a:

$$l - \epsilon < u_n \leq v_n \leq w_n < l + \epsilon \tag{3}$$

Soit encore:

$$l - \epsilon \leq v_n \leq l + \epsilon \tag{4}$$

Ce qui montre bien que: $\lim v_n = l$.

Exemple:
Soit $u_n = \sin \frac{1}{n}$, on a l'encadrement:

$$0 \leq \sin \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}$$

il en résulte: $\lim u_n = 0$.

5) Suites bornées et convergence des suites

Proposition
Une suite **convergente** est **bornée**.

C'est à dire qu'il exise une constante réelle M telle que, pour tout n:

$$|u_n| \leq M.$$

En effet, soit $l := \lim u_n$. Choisissons, par exemple, la valeur 1 pour le nombre $\epsilon > 0$ apparaissant dans la définition de la convergence d'une suite:

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \ \text{ telque } \ \forall \mathbf{n} \geq \mathbf{N_1}, \ \ |\mathbf{u_n} - \mathbf{l}| < \mathbf{1} \tag{1}$$

comme d'après l'inégalité triangulaire, on a:

$$|u_n| = |(u_n - l) + l| \leq |u_n - l| + |l|, \tag{2}$$

il résulte de (1) et (2) que pour tout $n \geq N_1$, on a:

$$(3) \qquad |u_n| < 1 + |l|.$$

et par suite, pour tout n:

$$(4) \qquad |u_n| < 1 + |l| + |u_1| + |u_2| + \ldots + |u_{N_1}|.$$

Attention, la réciproque à la proposition est **fausse**: une suite **bornée n'est pas** en général **convergente**, par exemple la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car $|(-1)^n| = 1$ mais on a vu qu'elle n'était pas convergente.

La plupart des fonctions mathématiques non élémentaires sont définies comme limites de suites. Il est donc fondamental en mathématiques, de savoir démontrer la convergence d'une suite sans connaître *a priori* sa limite. Le résultat qui suit est fondamental et pour des raisons de commodités pédagogiques a été placé dans les axiomes de définition de $\mathbb{R}$.

6) Suites monotones, bornées

Théorème
Toute suite ***croissante et majorée*** *est* ***convergente****.*

De même, toute suite (u_n) décroissante et minorée est convergente, il suffit en effet de considérer la suite $(-u_n)$ qui est croissante et majorée.

Par exemple:
La suite de terme général:

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^n}$$

est croissante car:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^{n+1}} > u_n.$$

et est majorée, car on peut, pour tout $k \geq 2$, minorer k^k par 2^k et donc majorer $\frac{1}{k^k}$ par $\frac{1}{2^k}$, soit:

$$u_n < 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n}$$

ou encore (en rajoutant $\frac{1}{2}$ au membre de droite):

$$u_n < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} < \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

On a bien, pour tout n:

$$u_n < 2$$

La suite u_n croissante et majorée est donc convergente.

7) Suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$, lorsque $f$est croissante

Théorème

*Soit: $f : I \longrightarrow I, \ x \longrightarrow f(x)$ une fonction **croissante**. Alors la suite récurrente définie par: $\mathbf{u_{n+1} = f(u_n)}$, est **monotone**. Elle est croissante si $u_0 \leq u_1$, décroissante si $u_0 \geq u_1$.*
Si $u_0 \leq u_1$ et si la suite (u_n) est majorée, alors la suite (u_n) est convergente.
Si $u_0 \geq u_1$ et si la suite (u_n) est minorée, alors la suite (u_n) est convergente.

En effet, dire que f est croissante signifie que f "respecte l'ordre" sur I, c'est à dire que:

$$(1) \qquad x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

Si on a:

$$u_0 \leq u_1$$

on déduit de (1):

$$f(u_0) \leq f(u_1)$$

c'est à dire (car $u_1 = f(u_0)$ et $u_2 = f(u_1)$):

$$u_1 \leq u_2$$

Par récurrence, supposons que:

$$u_{n-1} \leq u_n$$

d'après (1), on en déduit:

$$f(u_{n-1}) \leq f(u_n)$$

soit:

$$u_n \leq u_{n+1}$$

On a donc bien:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{u_n \leq u_{n+1}}$$

La suite (u_n) est bien croissante.
Si maintenant on suppose:

$$u_0 \geq u_1$$

on démontre, de même, en renversant le sens des inégalités que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{u_n \geq u_{n+1}}$$

la suite est décroissante.

Si $u_0 \leq u_1$, la suite est croissante et si de plus, elle est majorée, la suite est convergente d'après le théorème sur les suites monotones bornées.

Remarque.
1) La croissance ou la décroissance de la suite (u_n) se décide donc "dès le départ", elle dépend du signe de $u_1 - u_0$ ou encore du signe de $f(u_0) - u_0$ et donc de u_0.
On est donc conduit à étudier les variations de la fonction auxiliaire $x \to g(x), \;\; g(x) := f(x) - x$ sur l'intervalle I, puis le signe de $g(x) = f(x) - x$ sur I et finalement à discuter le type de monotonie suivant la position de u_0 sur I.
2) Le fait que la suite (u_n) soit majorée ou non (ou minorée) résulte des propriétés concrètes de f dans chaque cas particulier et ne peut se décider par un énoncé général. Mais c'est parfois évident lorsque, par exemple, la fonction f elle-même est majorée ou minorée sur I (en particulier si l'intervalle I lui-même est borné).
3) La limite l de la suite (u_n) n'est pas connue, a priori, mais peut souvent se calculer "après coup", car elle vérifie presque toujours (usuellement) la relation:

$$f(l) = l$$

d'après le résultat suivant:

Proposition
Si l'intervalle I est du type $[a,b]$ ou $[a,+\infty[$ ou $]-\infty,b]$ ou $I=\mathbb{R}$ (c'est à dire si I contient ses bornes finies) et si la fonction f est continue sur l'intervalle I, alors la limite l de la suite récurrente (u_n) est un point fixe de f sur I:

$$\boldsymbol{f(l)=l.}$$

où $l \in I$.

La limite l de la suite (u_n) est toujours dans I lorsque l'intervalle I est du type $[a,b]$ ou $[a,+\infty[$ ou $]-\infty,b]$ ou $I=\mathbb{R}$, car l'inégalité:

$$a \leq u_n \leq b$$

pour tout n, entraîne:

$$a \leq l \leq b$$

par passage à la limite dans les inégalités larges.
Nous verrons plus loin, en détail, la notion de continuité. Il nous suffit ici de savoir que (par définition de la continuité au point l), lorsque $u_n \to l$, alors:

$$f(u_n) \to f(l) \tag{3}$$

quand $n \to \infty$, c'est à dire f transforme une suite qui converge vers l en une suite qui converge vers $f(l)$, ou encore la fonction f respecte les passages à la limite.
Mais comme $u_{n+1}=f(u_n)$, (3) signifie encore que:

$$u_{n+1} \to f(l)$$

quand $n \to \infty$. Mais $u_{n+1} \to l$ quand $n \to \infty$. D'après l'unicité de la limite, on a donc bien: $f(l)=l$.

Remarque
En particulier, on verra qu'une fonction dérivable est toujours continue. Comme la fonction f sera usuellement dérivable, sa continuité sera automatiquement assurée.
La propriété: $f(l)=l$ est donc, en pratique, toujours vérifiée (lorsque la limite l existe !!) mais pour des raisons profondes non immédiates. On vous demandera d'en rappeler une justification précise.

Marche à suivre pour l'étude d'une suite récurrente dans le cas f croissante:
1) Vérifier que f est croissante, par exemple, en calculant sa dérivée.
2) Calculer $u_1 - u_0$ et conclure sur le type de monotonie de (u_n).
Si $(u_0) \in I$ est arbitraire, étudier les variations et le signe de la fonction auxiliaire $g(x) = f(x) - x$ sur l'intervalle I, éventuellement en calculant les dérivées premières et secondes de g sur I et conclure sur le signe de $u_1 - u_0$ quand u_0 varie sur I puis sur la monotonie de (u_n).
3) Chercher si la suite (u_n) est bornée. Dans ce cas elle converge vers une limite l.
4) Montrer que $f(l) = l$ et calculer l en cherchant les points fixes de f sur I.

Exemple (les détails sont laissés en exercice):
La suite récurrente: $u_{n+1} = \frac{u_n+1}{u_n+2}$, c'est à dire $f(x) = \frac{x+1}{x+2} = 1 - \frac{1}{x+2}$, avec $u_0 = 0$ et $I = [0, +\infty[$. 0n a $u_1 = \frac{1}{2} > u_0 = 0$, de sorte que la suite (u_n) est croissante. Comme $f(x)$ est majorée par 1 pour $x \geq 0$, la suite (u_n) est majorée par 1 et croissante, elle est donc convergente. Sa limite l est solution de l'équation $f(l) = l$ soit $l^2 + l - 1 = 0$. On a donc $l = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. La suite $(u_n) \in \mathbb{Q}$ donne une approximation du nombre irrationnel $l = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Si maintenant u_0 est donné avec $u_0 \geq 0$, on constate que (u_n) est croissante pour $0 \leq u_0 \leq l$ décroissante pour $u_0 \geq l$ et converge, dans tous les cas, vers $l = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

8) Limites infinies

Définition
On dit que la suite réelle (u_n) tend vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$ si et seulement si:

$$\forall A > 0, \ \ \exists N \in I\!N, \ \ \text{tel que}: \ \forall \mathbf{n} \geq \mathbf{N}, \quad \mathbf{u_n} > \mathbf{A}$$

On écrit:

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

ou encore: $u_n \to +\infty$, quand $n \to +\infty$.

Cela signifie que u_n est plus grand que tout nombre A fixé (si grand soit-il) pourvu que n soit assez grand, plus grand qu'un certain entier N = N(A) qui dépend de A ou encore que quelque soit A tous les u_n sont plus grands que A, à l'exception d'un nombre fini de termes u_n (ceux pour lesquels $n < N(A)$).

Proposition
Une suite croissante, non majorée, tend vers $+\infty$.

Une suite croissante n'a donc que deux possiblités:
ou elle est majorée et donc convergente,
ou bien, elle est non majorée et tend vers $+\infty$.

Démonstration:
Soit $A > 0$ donné. A n'est pas un majorant de la suite (u_n). Il existe donc des termes u_n tels que:

$$u_n > A$$

On choisit un tel terme soit donc u_N (N dépendant donc de A) tel que:

$$u_N > A.$$

Comme u_n est croissante, on a, pour tout $n \geq N$: $u_n \geq u_N > A$, soit donc:

$$u_n > A$$

ce qui montre bien que $u_n \to +\infty$.

Exemple:
Soit la suite récurrente définie par $u_{n+1} = u_n^2$ et $u_0 > 1$. Comme $u_1 - u_0 = u_0^2 - u_0 = u_0(u_0 - 1) > 0$, la suite (u_n) est strictement croissante. Si elle convergeait vers une limite finie l on aurait: $l > u_0 > 1$. Cette limite vérifierait d'autre part $f(l) = l$ soit $l^2 - l = 0$, c'est à dire $l = 0$ ou $l = 1$ ce qui contredit le fait que $l > 1$. La suite croissante (u_n) ne peut donc que tendre vers $+\infty$.

9) Opérations sur les limites de suites.
La notion de limite est compatible avec les opérations algébriques courantes. On a:

Théorème
Si les deux suites (u_n) *et* (v_n) *convergent respectivement vers les limites* l *et* l'*, alors:*
1) $\lim(u_n + v_n) = l + l'$.
2) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*)*, $\lim(\alpha \mathbf{u_n}) = \alpha \mathbf{l}$.
3) $\lim(u_n v_n) = l\, l'$,
4) Si de plus $l' = \lim v_n$ *est* $\neq 0$*, alors:* $\lim(\frac{u_n}{v_n}) = \frac{l}{l'}$.

En revanche, si on a $l = l' = 0$, on ne peut conclure sur la limite de la suite $(\frac{u_n}{v_n})$, on dit que l'on a la forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

Démontrons, par exemple, le 1):
Comme $\lim u_n = l$, on a:

$$(1) \qquad \forall \epsilon > 0,\ \exists N_1(\epsilon) \ \text{ tel que} : \forall n \geq N_1(\epsilon),\ \ |u_n - l| < \epsilon.$$

De même, comme $\lim v_n = l'$, on a:

$$(2) \qquad \forall \epsilon > 0,\ \exists N_2(\epsilon) \ \text{ tel que} : \forall n \geq N_2(\epsilon),\ \ |v_n - l| < \epsilon.$$

Posons, par définition:

$$(3) \qquad N_3(\epsilon) := \max(N_1(\epsilon), N_2(\epsilon))$$

On a l'inégalité triangulaire:

$$(4) \qquad |(u_n + v_n) - (l + l')| = |(u_n - l) + (v_n - l')| \leq |u_n - l| + |v_n - l'|$$

Pour $n \geq N_3(\epsilon)$, on a, d'après (1), (2), (3), (4):

$$(5) \qquad |(u_n + v_n) - (l + l')| \leq \epsilon + \epsilon = 2\epsilon$$

Ce qui montre bien que: $\lim(u_n + v_n) = l + l'$.

10) Suites complexes et suites réelles.

La convergence d'une suite à termes complexes se définit comme celle d'une suite réelle en remplaçant la valeur absolue $|x|$ par le module $|z|$.
Le résultat suivant permet (si l'on veut) de ramener la convergence d'une suite complexe à celle de deux suites réelles, à savoir les parties réelles et imaginaires de la suite (u_n).

Théorème
Soit $u_n = u'_n + iu"_n$, où u'_n et $u"_n \in \mathbb{R}$, le terme général d'une suite complexe. La suite (u_n) converge vers la limite $l = l' + il"$, avec l' et $l" \in \mathbb{R}$, si et seulement si:
(u'_n) converge vers l' et $(u"_n)$ converge vers $l"$.

La démonstration résulte aussitôt des inégalités suivantes pour un nombre complexe $z = x + iy$:
$|x| \leq |z| \leq |x| + |y|$
$|y| \leq |z| \leq |x| + |y|$
(en effet $|x| \leq |z|$ équivaut à: $|x|^2 \leq |z|^2$, soit encore: $x^2 \leq x^2 + y^2$, ou encore: $0 \leq y^2$. D'autre part $|x+iy| \leq |x|+|iy| = |x|+|y|$ d'après l'inégalité triangulaire).
Il en résulte aussitôt (avec $z = u_n - l$) les inégalités:
$|u_n - l| \leq |u'_n - l| + |u"_n - l|$
$|u'_n - l'| \leq |u_n - l|$
$|u"_n - l"| \leq |u_n - l|$
qui entraînent le résultat.

11) Suites adjacentes ou "principe" des intervalles emboîtés

Définition
Deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont dites ***adjacentes,*** *si on a:*
1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n}$.
2) $\mathbf{\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0}$.

La suite (u_n) est donc croissante et majorée par le terme v_0 (par exemple). (u_n) a donc une limite l. De même, la suite (v_n) est décroissante et est minorée par u_0. (v_n) a donc une limite l'. On a:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \mathbf{u_0 \leq u_n \leq l \leq l' \leq v_n \leq v_0}$$

(passage à la limite dans les inégalités larges).
et donc:

$$0 \leq l' - l \leq v_n - u_n.$$

Comme $\lim(v_n - u_n) = 0$, on a donc:

$$l' - l = 0.$$

Soit finalement, l'énoncé:

Proposition
Deux suites adjacentes (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite l telle que:

$$\forall n, \ \ u_n \leq l \leq v_n.$$

Remarque: Suites d'intervalles emboîtés.
Un langage équivalent consiste à considérer la suite d'intervalles:

$$I_n := [u_n, v_n].$$

Dire que (u_n) et (v_n) sont adjacentes équivaut à dire que:
1) $\forall n, \ \ I_{n+1} \subset I_n$, la suite d'intervalles I_n est décroissante, on dit aussi que les I_n sont emboîtés.
2) Longueur de $I_n = (v_n - u_n) \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Comme:

$$\forall n, \quad u_n \leq l \leq v_n,$$

et que:

$$\lim(v_n - u_n) = 0,$$

on a:

$$\{l\} = \bigcap_{n=0}^{+\infty} I_n \, ,$$

l est l'unique point commun à tous les intervalles I_n.
On peut énoncer le résultat sous la forme:

L'intersection d'une suite d'intervalles emboîtés dont la longeur tend vers 0 est réduite à un seul point.

Exemples

1) Si $x \in \mathbb{R}$ est fixé et si u_n est la valeur décimale approchée par défaut strict à 10^{-n} près et v_n la valeur décimale approchée par excès large à 10^{-n} près, on a:

$$u_n < x \leq v_n \ \text{ et } \ u_n < u_{n+1} < v_{n+1} \leq v_n$$

et:

$$v_n - u_n = 10^{-n}.$$

Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes de limite x.

2) Soit (S_n) la suite (dite alternée harmonique):

$$S_n := 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

On pose:

$$u_n = S_{2n} \ \text{ et } \ v_n = S_{2n+1}.$$

On a:

$$S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1},$$

$$v_n = u_n + \frac{1}{2n+1},$$

$$u_n \leq v_n.$$

D'autre part:

$$u_{n+1} := S_{2n+2} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2},$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$$

$$u_n \leq u_{n+1}.$$

De même, on a:

$$v_{n+1} := S_{2n+3} = S_{2n+1} - \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3},$$

$$v_{n+1} = v_n - \frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$$
$$v_{n+1} \leq v_n.$$

En définitive, on a:

$$u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n,$$

et comme:

$$v_n - u_n = \frac{1}{2n+1},$$

on a:

$$\lim\,(v_n - u_n) = 0$$

Les suites (u_n) et (v_n) sont bien adjacentes.

$$l = \lim u_n = \lim v_n,$$

existe donc.
On en déduit aussitôt:

$$l = \lim S_n = \lim\,[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}]$$

On peut montrer qu'en fait: $l = \log 2$.

Remarque
Le rôle des suites adjacentes est fondamental car lorsqu'une suite n'est pas monotone, la méthode pour démontrer sa convergence consiste à construire des suites auxiliaires adjacentes comme on va le voir par exemple dans l'exemple qui suit.

12) Suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$, lorsque $f$est décroissante.

On reprend l'étude d'une suite récurrente: $f : I \longrightarrow I,\ x \longrightarrow f(x)$

$$\boldsymbol{u_{n+1} = f(u_n)}$$

où $u_0 \in\ I$est donné
lorsque la fonction f est **décroissante**.
La situation est alors plus compliquée que lorsque f est croissante:
La suite (u_n) n'est jamais monotone.

Elle ne converge pas, en général, comme le montre les exemples très simples suivants:
1) $I = \mathbb{R}$ et: $f(x) = -x$,
$u_n = (-1)^n$.
$u_{2p} = 1$.
$u_{2p+1} = -1$.
2)$I = \mathbb{R}_+^*$ et$f(x) = \frac{1}{x}$
avec $u_0 \neq 1$ donné dans $\mathbb{R}_+^*$.
$u_{2p+1} = \frac{1}{u_0}$,
$u_{2p} = u_0$.
Dans les deux cas précédents, on a $f^2 = f \circ f = \mathrm{Id}$.
Rappelons que tout point fixe de f (c'est àdire $f(x) = x$) est un point fixe de $g = f \circ f$ (c'est àdire $f[f(x)] = x$) mais qu'un point fixe de $g = f \circ f$ n'est pas, en général, un point fixe de f, comme le montre précisément les deux exemples précédents.
Plus généralement, si u_0 est un point fixe de f^2 qui n'est pas point fixe de f, c'est à dire:

$$u_2 = f^2(u_0) = u_0 \text{ mais } \; u_1 = f(u_0) \neq u_0$$

alors, la suite (u_n) ne converge pas:
$u_{2p+1} = u_1$,
$u_{2p} = u_0$.
avec:$u_1 \neq u_0$.
Néanmoins la suite partielle $(u_{2p})_{p \in \mathbb{N}}$ formée à partir des termes d'indice pair, est monotone (ici elle est même constante), de même la suite partielle (on dit aussi extraite) $(u_{2p+1})_{p \in \mathbb{N}}$ est monotone.
C'est toujours le cas:

Proposition
Lorsque f est décroissante, les suites partielles $(u_{2p})_{p \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2p+1})_{p \in \mathbb{N}}$ associées à la suite récurrente définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, sont monotones et de sens de variation contraires (l'une est croissante, l'autre est décroissante):
Si $u_0 \leq u_2$, (u_{2p}) est croissante et (u_{2p+1}) décroissante.
Si $u_0 \geq u_2$, (u_{2p}) est décroissante et (u_{2p+1}) croissante.

En effet, le point important est d'observer que, comme f est décroissante, $g = f \circ f$ est **croissante**, car f renverse le sens des inégalités:
Si $x_1 \leq x_2$ alors: $f(x_1) \geq f(x_2)$

et donc $f \circ f$ le conserve:
$f[f(x_1)] \leq f[f(x_2)]$
$g(x_1) \leq g(x_2)$
Les suites partielles $(u_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ vérifient, par construction:

$$u_{2p+2} = g(u_{2p})$$

$$u_{2p+1} = g(u_{2p-1})$$

Ce sont donc des suites récurrentes relatives à la fonction croissante $g := f^2 = f \circ f$, d'après l'étude relative au cas f croissante appliquée à g, les suites (u_{2p}) et (u_{2p+1})sont monotones.

Si, par exemple, $u_0 \leq u_2$, montrons que: $u_{2p} \leq u_{2p+2}$, par récurrence sur p, car: $u_{2p} \leq u_{2p+2}$ entraîne: $g(u_{2p}) \leq g(u_{2p+2})$, soit $u_{2p+2} \leq u_{2p+4}$. La suite des termes d'indice pair $(u_{2p})_{p\geq 0}$ est donc bien croissante.
Comme f est décroissante, l'inégalité $u_{2p} \leq u_{2p+2}$ entraîne $f(u_{2p}) \geq f(u_{2p+2})$, soit $u_{2p+1} \geq u_{2p+3}$ pour $p \geq 0$. La suite des termes d'indice impair est donc décroissante. Ce qui achève de démontrer la proposition.

Pour pouvoir conclure sur la convergence de la suite (u_n), on doit raisonner dans chaque cas particulier en montrant que la suite (u_n) est bornée (et donc chaque suite partielle (u_{2p}) et (u_{2p+1})), puis que les deux limites $l' := \lim_{p\to+\infty} u_{2p}$ et $l" := \lim_{p\to+\infty} u_{2p+1}$ sont égales $l' = l"$.
Il peut très bien arriver que $l' \neq l"$ et donc que la suite (u_n) soit divergente. C'est le cas par exemple si $u_2 < u_0 < u_1$ de sorte que la suite (u_{2p}) est alors décroissante tandis que la suite (u_{2p+1}) est croissante et que pour tout $p \geq 2$: $l' < u_{2p} < u_2 < u_0 < u_1 < u_{2p+1} < l"$.

Supposons maintenant, par exemple, que: $\boldsymbol{u_0 \leq u_2 \leq u_1}$.
Comme g est croissante, l'inégalité $u_0 \leq u_1$ entraîne: $g(u_0) \leq g(u_1)$, $u_2 \leq u_3$ puis, par récurrence sur p, $u_{2p} \leq u_{2p+1}$ (en effet, $u_{2p} \leq u_{2p+1}$ entraîne $g(u_{2p}) \leq g(u_{2p+1})$, c'est à dire $u_{2p+2} \leq u_{2p+3}$). Comme u_{2p} est croissante et que u_{2p+1} est décroissante on a bien:

$$\boldsymbol{u_0 \leq u_{2p} \leq u_{2p+1} \leq u_1.}$$

La suite u_{2p} est croissante et majorée par u_1, elle est donc convergente de limite l'. De même la suite u_{2p+1} est décroissante et minorée par u_0, elle est donc convergente de limite l". Comme $u_0 \leq u_{2p} \leq u_{2p+1} \leq u_1$, on a, par passage à la limite dans les inégalités larges:

$$\boldsymbol{u_0 \leq u_{2p} \leq l' \leq l" \leq u_{2p+1} \leq u_1.}$$

Supposons f continue sur I, en particulier donc sur l'intervalle $[u_0, u_1]$.
Comme $u_{2p+2} = g(u_{2p})$ et que $u_{2p+1} = g(u_{2p-1})$ et que g est continue aux points l' et l", on a:

$$g(l') = l' \text{ et } g(l") = l".$$

l'* et *l"* sont des points fixes de *g.
D'autre part, l'égalité:

$$u_{2p+1} = f(u_{2p})$$

entraîne quand $p \to +\infty$:

$$l" = f(l')$$

en effet $u_{2p} \to l'$, par continuité de f au point l', $f(u_{2p}) \to f(l')$ et $u_{2p+1} \to l$", on a donc bien par unicité de la limite $l" = f(l')$. De même (à partir de $u_{2p} = f(u_{2p-1})$) on montre que:

$$l' = f(l")$$

Si f et g ont les mêmes points fixes, soit un seul l sur I, alors on a:

$$l = l' = l"$$

et donc:

$$\lim u_n = l.$$

Remarque
Il y a deux cas simples dans lesquels on peut affirmer que les point fixes de f et de $g := f \circ f$ sont les mêmes: voir le paragraphe 13) suivant.

13) Suites: $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est contractante.

Remarque
Il y a deux cas simples dans lesquels on peut affirmer que les point fixes de f et de $g := f \circ f$ sont les mêmes:

1) Losque $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ est une fonction homographique avec $ad - bc \neq 0$ et $a + d \neq 0$.

Faire le calcul: les points fixes de f et de g vérifient la même équation du second degré (ce qui est prévisible, car les points fixes de f sont toujours des points fixes de g. De plus, f et g ont au plus deux points fixes, d'après l'équation des points fixes).
On a $a+d=0$ si et seulement si $f \circ f = \mathrm{Id}$, on dit que f est une involution. C'est équivalent au fait que le graphe (ou courbe représentative) de f est symétrique par rapport à la 1ere bissectrice.

2) Les point fixes de f et de $g := f \circ f$ sont les mêmes lorsque f est dérivable sur l'intervalle fermé, borné $I = [a, b]$ et que sa dérivée $f'(x)$ vérifie l'inégalité:

$$\textbf{(1)} \qquad \boldsymbol{\forall x \in I, \quad |f'(x)| < 1.}$$

En effet, on observe d'abord (indépendamment de (1)) que la fonction $f(x)-x$ a pour dérivée:

$$f'(x) - 1 \leq -1 < 0$$

car $f'(x) \leq 0$ puisque f est décroissante. La fonction $f(x) - x$ est donc strictement décroissante et décroît de $f(a) - a \geq 0$ à $f(b) - b \leq 0$ ($f(a)$ et $f(b) \in [a, b]$). $f(x)-x$ a donc un zéro unique et f un seul point fixe sur $[a, b]$.
On observe ensuite que la dérivée de $g = f \circ f$ vérifie la même inégalité (1) que celle de f car:

$$[f \circ f]'(x) = f'[f(x)]\ f'(x)$$

d'où:

$$|[f \circ f]'(x)| = |f'[f(x)]|\ |f'(x)|$$

puis, d'après (1):

$$(2) \qquad |[f \circ f]'(x)| < 1$$

$$(2') \qquad |g'(x)| < 1$$

La fonction auxiliaire: $h(x) := g(x) - x$ a pour dérivée:

$$h'(x) := g'(x) - 1 < 0$$

d'après (2').
La fonction $h(x)$ est donc strictement décroissante et décroît de $g(a) - a \geq 0$

à $g(b) - b \leq 0$ ($g(a)$ et $g(b) \in [a, b]$ car $g = f \circ f : I \to I$).
$h(x) = g(x) - x$ a donc un zéro unique et g un seul point fixe sur $[a, b]$.
Comme tout point fixe de f est point fixe de g, l'unique point fixe de g est le même que celui de f.

On considère maintenant le cas où la fonction f est partout dérivable sur I (sans même supposer la monotonie de f) et que la dérivée f' vérifie une inégalité du type:

$$\textbf{(3)} \qquad \boldsymbol{\forall x \in I, \ \ |f'(x)| < \alpha}$$

où α est une constante telle que $\mathbf{0 < \boldsymbol{\alpha} < 1}$, on dira alors que f est contractante.
On va montrer la convergence vers l'unique point fixe l de f (qui existe d'aprs la remarque 2) précédente car $f(x) - x$ est encore à dérivée < 0 donc strictement décroissante) en lui appliquant la formule des accroissements finis (qui sera vue ou revue plus tard) sur chaque intervalle $[u_n, l]$ ou $[l, u_n]$. Il existe donc $c_n \in \mathbb{R}$ tel que:

$$u_{n+1} - l = f(u_n) - f(l) = (u_n - l) f'(c_n),$$

où $c_n \in]u_n, l[$, ou $c_n \in]l, u_n[$. Il en résulte:

$$|u_{n+1} - l| = |(u_n - l)||f'(c_n)|,$$

soit, en tenant compte de (3):

$$(4) \qquad |u_{n+1} - l| \leq \alpha \, |u_n - l|,$$

pour tout $n \geq 0$.
c) Par récurrence immédiate sur n, on déduit de (4):

$$\textbf{(5)} \qquad \boldsymbol{|u_n - l| \leq \alpha^n \, |u_0 - l|,}$$

pour tout $n \geq 0$. Comme la suite géométrique α^n tend vers 0 quand $n \to +\infty$, (puisque $\alpha < 1$) on a bien:

$$\lim u_n = l.$$

par le théorème des "gendarmes".
De plus l'inégalité (4) fournit une approximation numérique explicite simple

de l par u_n.

Exemple:

$$f(x) = \frac{x+1}{2x+1}$$

sur $I = [0, +\infty]$. On a: $f'(x) = -\frac{1}{(2x+1)^2}$. La fonction est décroissante. Si on se donne $u_0 = 0$, on a: $u_1 = 1$ et $u_2 = \frac{2}{3}$, soit: $u_0 \leq u_2 \leq u_1$. On est bien dans la situation évoquée dans la théorie.
On a également:

$$|f'(x)| = \frac{1}{(2x+1)^2} < 1$$

pour $x > 0$.
Il y a convergence de la suite (u_n) vers le point fixe: $l = f(l)$, soit: $2l^2 = 1$, $l = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Remarque: Point fixe de f dit "répulsif".
On considère une fonction $f : I \to I$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et la suite récurrente définie par:

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

où $u_0 \in I$ est donné.
On suppose que f est dérivable sur I, que f est strictement monotone sur I (croissante ou décroissante) et enfin que $l \in I$ est un point fixe de f (c'est à dire $f(l) = l$) tel que $\boldsymbol{|f'(l)| > 1}$. On dit, dans ce cas que l est un point fixe **répulsif** de f pour une raison qui va apparaître tout de suite.
On montre d'abord que si on suppose $u_0 \neq l$, alors pour tout n, on a aussi: $u_n \neq l$.
En effet, par récurrence sur n, si on suppose que: $u_n \neq l$, on a: $f(u_n) \neq f(l)$, car la fonction f qui est strictement croissante ou décroissante est injective (si, par exemple, $u_n < l$, alors, lorsque f est strictement décroissante:$f(u_n) > f(l)$).
On suppose encore que $u_0 \neq l$ et on va montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas converger vers l.
On raisonne par l'absurde et on considère la suite de terme général:

$$\frac{u_{n+1} - l}{u_n - l}.$$

Le quotient $\frac{u_{n+1}-l}{u_n-l}$ est bien défini car pour tout n, $u_n \neq l$. Supposons donc (par l'absurde) que la suite (u_n) converge vers l
Par définition de la suite récurrente (u_n) et du point fixe l, on a:

$$\frac{u_{n+1}-l}{u_n-l} = \frac{f(u_n)-f(l)}{u_n-l}.$$

Quand $n \to +\infty$, $u_n \to l$, $f(u_n) \to f(l)$ et par définition de la dérivée:

$$\frac{f(u_n)-f(l)}{u_n-l} \to f'(l)$$

C'est à dire:

$$\frac{u_{n+1}-l}{u_n-l} \to f'(l)$$

Par suite:

$$\left|\frac{u_{n+1}-l}{u_n-l}\right| \to \left|f'(l)\right|$$

$$\left|\frac{u_{n+1}-l}{u_n-l}\right| - 1 \to \left|f'(l)\right| - 1 > 0$$

Comme $\left|f'(l)\right| - 1 > 0$, la suite de terme général $\left|\frac{u_{n+1}-l}{u_n-l}\right| - 1$ est du signe de sa limite soit > 0 pour n assez grand. Il existe donc un entier N tel que $\forall n \geq N$, on ait:

$$\left|\frac{u_{n+1}-l}{u_n-l}\right| - 1 > 0.$$

Soit encore:

$$\left|\frac{u_{n+1}-l}{u_n-l}\right| > 1.$$

On a donc $\forall n \geq N$:

$$|u_{n+1}-l| > |u_n-l|.$$

et donc, par récurrence immédiate sur n:

$$|u_n-l| > |u_N-l| > 0.$$

Cette dernière inégalité contredit l'hypothèse que $u_n \to l$ (sinon on aurait $|u_N-l| = 0$ par les "gendarmes"). La suite (u_n) ne peut converger vers l.
En particulier si l'intervalle I est fermé et si f possède un **seul point fixe répulsif l** sur I, alors la suite **(u_n) ne peut converger** car sinon elle ne pourrait converger que vers l'unique point fixe l or c'est impossible d'après ce que nous venons de démontrer.