
Chapitre 5

Séries de Laurent, Théorème des résidus

Sommaire

5.1	Séries de Laurent	75
5.1.1	Classification des singularités	78
5.2	Résidus	80
5.2.1	Calcul des résidus	81
5.3	Le théorème des résidus	83
5.4	Application du théorème des résidus	85
5.4.1	Théorèmes particuliers utilisés pour le calcul d'intégrales	85
5.4.2	Application aux transformées de Fourier	86
5.4.3	Calcul d'intégrales définies diverses	89

5.1 Séries de Laurent

Définition 87

Une série des puissances de la forme

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$
$$= \cdots + \frac{a_{-3}}{(z - z_0)^3} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + a_3 (z - z_0)^3 + \cdots$$

s'appelle **série de Laurent** centrée au point $z_0 \in \mathbb{C}$.

La série des puissances négatives

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-3}}{(z - z_0)^3} + \dots$$

s'appelle la **partie principale**.

La série des puissances positives

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + a_3 (z - z_0)^3 + \dots$$

s'appelle la **partie régulière ou analytique**.

Si la partie principale est nulle, la série de Laurent se réduit à une série de Taylor.

On dira que la série de Laurent converge si ses parties principale et analytique convergent.

Théorème 88 (de Laurent)

Soit C_1 et C_2 des cercles concentriques, de centre z_0 et de rayons respectifs R_1 et R_2 .

On suppose que f est uniforme et **holomorphe** sur C_1 et C_2 et également dans la couronne D [ou région annulaire D] limitée par C_1 et C_2 .

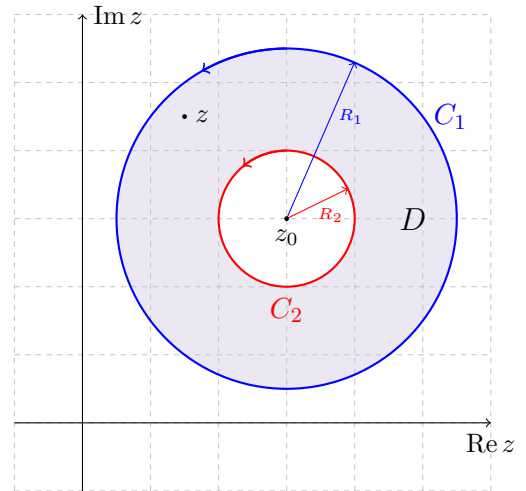
Les courbes C_1 et C_2 étant décrits dans le sens positif par rapport à leurs intérieurs.

Alors la fonction f se développe de manière unique en série de Laurent centrée au point z_0 i.e.

$$\text{pour tout } z \in D, \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

où

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{avec } C = C_1 \text{ ou } C_2.$$



Démonstration. D'après la formule intégrale de Cauchy, pour tout $z \in D$, nous avons

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Notons que pour tout $w \in C_1$ on a $|z - z_0| < |w - z_0| = R_1$, ce qui permet d'écrire

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{w - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} = \frac{1}{w - z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}}.$$

Cette dernière série étant uniformément convergente dans C_1 , ce qui nous permet d'intervertir les signes somme et intégrale :

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} f(w) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} dw = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw.$$

De la même façon que ci-dessus, en notant que pour tout $w \in C_2$ on a $R_2 = |w-z_0| < |z-z_0|$, on peut écrire alors

$$\frac{-1}{w-z} = \frac{1}{z-z_0-(w-z_0)} = \frac{1}{z-z_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{w-z_0}{z-z_0}} = \frac{1}{z-z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{w-z_0}{z-z_0} \right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(w-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n}.$$

Et donc

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} f(w) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(w-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n} dw = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^{-n}}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{-n+1}} dw.$$

On en déduit que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^{-n}}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{-n+1}} dw = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n,$$

qui est le résultat demandé.

Noter que l'expression des coefficients a_n de la série de Laurent trouvée implique que les a_n ne dépendent que de $f(z)$ et donc ils sont uniques. ■

Exemple 62

Déterminons le développement en série de Laurent de la fonction $z \mapsto f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+3} \right)$

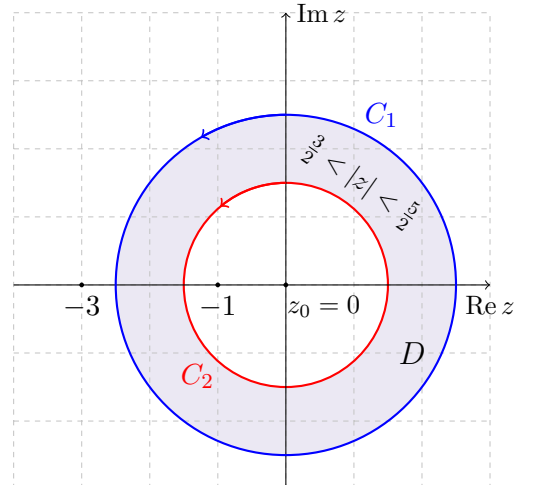
dans la couronne $D = \{z \in \mathbb{C}, \frac{3}{2} < |z| < \frac{5}{2}\}$.

La fonction f est holomorphe dans D et sur sa frontière, car les singularités -1 et -3 sont à l'extérieur D .

Donc f admet un développement en série de Laurent centré à l'origine $z_0 = 0$.

Si $|z| > \frac{3}{2} > 1$, on a

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{z}} \right) = \frac{1}{z} \sum_{n \geq 0} \left(-\frac{1}{z} \right)^n = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{z^n} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \dots$$



Si $|z| < \frac{5}{2} < 3$, on a

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{3} \frac{1}{1+\frac{z}{3}} = \frac{1}{3} \sum_{n \geq 0} \left(-\frac{z}{3}\right)^n = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} - \frac{z}{9} + \frac{z^2}{27} - \dots$$

Alors dans la couronne $D = \{z \in \mathbb{C}, \frac{3}{2} < |z| < \frac{5}{2}\}$ on a

$$f(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+3} \right) = \dots - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2z} - \frac{1}{6} + \frac{z}{18} - \frac{z^2}{54} + \dots \quad \blacksquare$$

Exemple 63

Développons en série de Laurent la fonction de l'exemple précédent

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$$

mais dans le disque pointé de $z_0 = -1$,

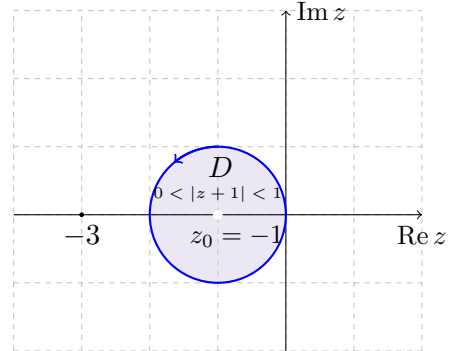
$$D = \{z \in \mathbb{C}, 0 < |z+1| < 1\}.$$

Notons que pour tout $0 < |z+1| < 1$ on peut écrire

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{z+1+2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1+\frac{z+1}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} \left(-\frac{z+1}{2}\right)^n = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z+1)^n.$$

D'où

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z+1)^{n-1} = \frac{1}{2(z+1)} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}(z+1) - \dots \quad \blacksquare$$



Exemple 64

Développons en série de Laurent la fonction $z \mapsto f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ dans $\mathbb{C}^*$.

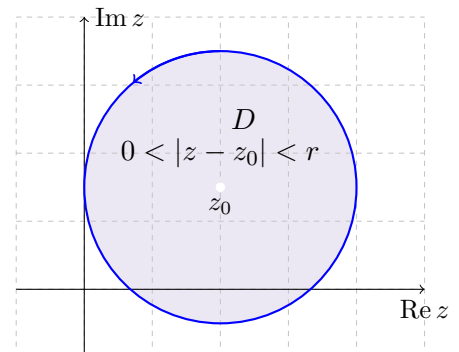
Rappelons que $e^w = \sum_{n \geq 0} \frac{w^n}{n!}$, $w \in \mathbb{C}$, alors pour $w = \frac{1}{z}$ on a

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n! z^n} = \dots + \frac{1}{6z^3} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{z} + 1. \quad \blacksquare$$

5.1.1 Classification des singularités

Le point z_0 est appelé **singularité isolée**, ou **point singulier isolé** de f , si la fonction f est holomorphe sur un disque pointé de z_0 , $D = \{z \in \mathbb{C}, 0 < |z - z_0| < r\}$, $r > 0$.

Il est possible de classer les singularités **isolées** d'une fonction f par l'examen de sa série de Laurent.



Pôles

Si f à la forme (??) dans laquelle la partie principale ne possède qu'un nombre fini de termes donnés par

$$\frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-3}}{(z - z_0)^3} + \cdots + \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n},$$

où $a_{-n} \neq 0$, alors $z = z_0$ est appelé un **pôle d'ordre n** .

Si $n = 1$ on a affaire à un **pôle simple**.

Si $z = z_0$ est un pôle de f alors $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$.

Exemple 65

La fonction $z \mapsto f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$ de l'exemple 63 présente un pôle simple au point $z_0 = -1$. ■

Singularités apparentes

Si une fonction uniforme f n'est pas définie en $z = z_0$ mais si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existe, alors $z = z_0$ est appelée une **singularité apparente**. Dans un pareil cas on définit $f(z)$ pour $z = z_0$ comme étant égal à $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$.

Exemple 66

Si $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ alors $z = 0$ est une singularité apparente car $f(0)$ n'est pas défini mais $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$. On définit $f(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$. On remarque que dans ce cas

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \left\{ z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots \right\} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \cdots . \quad \blacksquare$$

Singularités essentielles

Si f est uniforme alors toute singularité qui n'est ni un pôle ni une singularité apparente est appelée une **singularité essentielle**. Si $z = z_0$ est une singularité essentielle de $f(z)$, la partie principale du développement de Laurent possède une **infinité de terme**.

Exemple 67

Le développement de $e^{\frac{1}{z}}$ s'écrivant

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \cdots ,$$

on en déduit que $z = 0$ est une singularité essentielle. ■

Singularités à l'infini

En posant $z = \frac{1}{w}$ dans $f(z)$ on obtient la fonction $w \mapsto f\left(\frac{1}{w}\right) = F(w)$. Alors la nature de la singularité à $z = \infty$ [le point à l'infini] est définie comme étant la même que celle de $F(w)$ en $w = 0$.

Exemple 68

La fonction $z \mapsto f(z) = z^3$ a un pôle triple en $z = \infty$ car $F(w) = f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{w^3}$ possède un pôle triple en $z = 0$. ■

Exemple 69

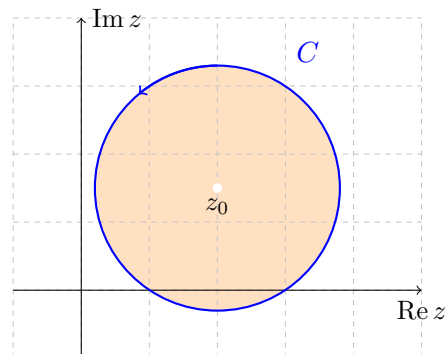
De la même façon $z \mapsto f(z) = e^z$ possède une singularité essentielle en $z = \infty$ car

$$F(w) = f\left(\frac{1}{w}\right) = e^{\frac{1}{w}}$$

a une singularité essentielle en $w = 0$. ■

5.2 Résidus

Soit f une fonction holomorphe et uniforme à l'intérieur d'un cercle C et sur C , **excepté** au point $z = z_0$ centre de C . Alors comme nous l'avons vu dans la section précédente, f possède un développement en série de Laurent dans le voisinage de $z = z_0$, donné par



$$\begin{aligned} f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = & a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \dots \\ & + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-3}}{(z - z_0)^3} + \dots \end{aligned} \quad (5.1)$$

où

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (5.2)$$

Dans le cas particulier $n = -1$ on a

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i a_{-1}. \quad (5.3)$$

Observons que l'intégrale $\oint_C f(z) dz$ s'exprime à l'aide du seul coefficient a_{-1} de (5.1).

On peut obtenir formellement (5.3) à partir de (5.1) par intégration terme à terme en utilisant

le résultat

$$\oint_C \frac{1}{(z - z_0)^p} dz = \begin{cases} 2\pi i & p = 1 \\ 0 & p \in \mathbb{Z}, p \neq 1. \end{cases} \quad (5.4)$$

Définition 89

Avec les notations ci-dessus, le coefficient a_{-1} du développement de Laurent de f au voisinage de z_0 s'appelle le **résidu** de f au point z_0 et se note

$$\text{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz.$$

5.2.1 Calcul des résidus

Pour obtenir le résidu d'une fonction f en $z = z_0$ on pourrait croire d'après (5.1) à la nécessité d'écrire le développement de f en série de Laurent dans le voisinage de $z = z_0$. Dans beaucoup de cas on peut déterminer le résidu sans passer par le développement de Laurent.

Pôle simple

Si $z = z_0$ est un pôle simple le calcul du résidu est particulièrement simple

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z). \quad (5.5)$$

Exemple 70

Trouver le résidu de $f(z) = \frac{z+1}{(z+2)(z-1)}$ en $z = 1$.

Le point $z = 1$ est un pôle simple et le résidu en $z = 1$ est

$$\text{Res}(f, 1) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \left\{ \frac{z+1}{(z+2)(z-1)} \right\} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z+1}{z+2} = \frac{2}{3}. \quad \blacksquare$$

Remarque 90

Si $z = z_0$ est un pôle simple et $f(z)$ se présente sous la forme

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad Q(z_0) = 0 \text{ et } Q'(z_0) \neq 0,$$

alors en utilisant la règle de L'Hôpital, nous avons

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}. \quad (5.6)$$

Exemple 71

Trouver le résidu de $f(z) = \frac{e^{z+1}}{z^3 + 1}$ en $z = -1$.

Le point $z = -1$ est un pôle simple et le résidu peut être calculé par la formule (5.6) :

$$\operatorname{Res}(f, -1) = \frac{e^{z+1} \Big|_{z=-1}}{(z^3 + 1)' \Big|_{z=-1}} = \frac{e^{z+1} \Big|_{z=-1}}{3z^2 \Big|_{z=-1}} = \frac{e^{1-1}}{3(-1)^2} = \frac{1}{3}. \quad \blacksquare$$

Pôle d'ordre $m \geq 2$

Dans le cas où $z = z_0$ est un **pôle d'ordre $m \geq 2$** , le résidu a_{-1} est donné par la formule

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \{(z - z_0)^m f(z)\}. \quad (5.7)$$

En effet, si z_0 est pôle d'ordre m de f , alors le développement en série de Laurent de f est

$$\begin{aligned} f(z) = \sum_{n=-m}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n &= a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \cdots + \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m}. \end{aligned}$$

En multipliant les deux membres de cette égalité par $(z - z_0)^m$, on a

$$(z - z_0)^m f(z) = a_{-m} + a_{-m+1} (z - z_0) + \cdots + a_{-1} (z - z_0)^{m-1} + a_0 (z - z_0)^m + \cdots,$$

qui représente la série de Taylor de la fonction analytique du premier membre.

Par dérivation des deux membres $m - 1$ fois par rapport à z , on obtient

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \{(z - z_0)^m f(z)\} = (m-1)! a_{-1} + \frac{m!}{1!} a_0 (z - z_0) + \frac{(m+1)!}{2!} a_1 (z - z_0)^2 + \cdots.$$

Soit en faisant tendre z vers z_0

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \{(z - z_0)^m f(z)\} = (m-1)! a_{-1},$$

d'où l'on déduit le résultat cherché.

Si $m = 2$ (**pôle double**) le résultat est

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d}{dz} \{(z - z_0)^2 f(z)\}. \quad (5.8)$$

Exemple 72

Trouver le résidu de $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+1)^2}$ en $z = -1$.

Le point $z = -1$ est un pôle double et on a d'après (5.8)

$$\operatorname{Res}(f, -1) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} \left\{ (z+1)^2 \left(\frac{z}{(z-1)(z+1)^2} \right) \right\} = -\frac{1}{4}. \quad \blacksquare$$

Point singulier essentiel

Si $z = z_0$ est un **point singulier essentiel**, le résidu peut parfois être trouvé en utilisant des développements en série connus.

Exemple 73

Si $f(z) = e^{-\frac{1}{z}}$, alors $z = 0$ est un point singulier essentiel et d'après le développement connu

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \cdots,$$

avec $u = -\frac{1}{z}$, on trouve

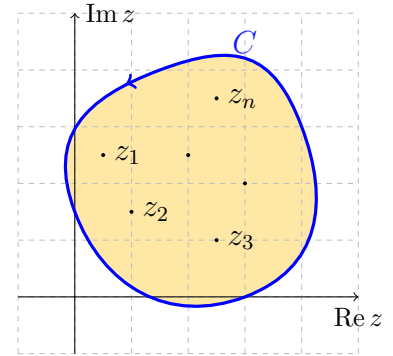
$$e^{-\frac{1}{z}} = 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} - \frac{1}{3!z^3} + \cdots,$$

où l'on voit que le résidu en $z = 0$ étant le coefficient de $\frac{1}{z}$ sa valeur est -1 . ■

5.3 Le théorème des résidus

Soit f une fonction uniforme et holomorphe à l'intérieur d'une courbe fermée simple C et sur C , sauf en un nombre fini de singularités $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ intérieures à C .

Alors le théorème des résidus établit que :



Théorème 91

L'intégrale de f le long de C est égale à $2\pi i$ fois la somme des résidus de f en les singularités contenues dans C , i.e.

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k).$$

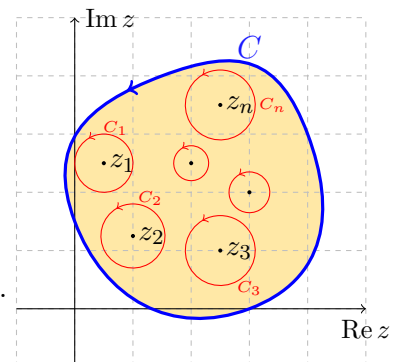
Notons que le théorème de Cauchy et les formules intégrales sont des cas particuliers de ce théorème.

Démonstration.

On construit les cercles $C_1, C_2, \dots, C_n$ centrés en $z_1, z_2, \dots, z_n$ et situés entièrement à l'intérieur de C .

D'après le théorème 52 page 43 on a

$$\oint_C f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{C_k} f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz + \oint_{C_2} f(z) dz + \cdots + \oint_{C_n} f(z) dz.$$



Mais d'après la formule (5.3), $\oint_{C_k} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$. Alors on déduit que

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f, z_k) = 2\pi i \cdot \text{la somme des résidus de } f \text{ dans } C,$$

qui est le résultat demandé. ■

La démonstration précédente établit le théorème des résidus pour des domaines simplement connexes contenant un nombre fini de singularités de f . On peut l'étendre à des domaines contenant une infinité de singularités isolées de f ou étant multiplement connexes.

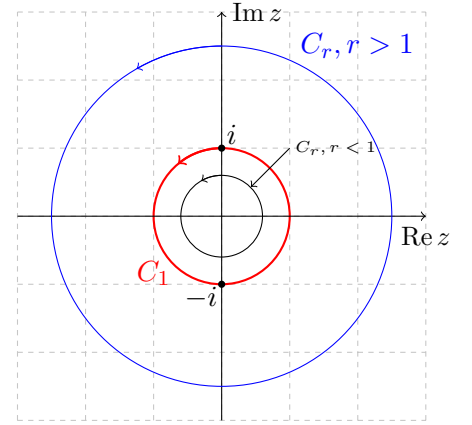
Exemple 74

Calculer $\oint_{C_r} f(z) dz$ où $f(z) = \frac{z^3 + 1}{z^2 + 1}$ et C_r le cercle centré à l'origine et de rayon r , $r \neq 1$.

La fonction

$$z \mapsto f(z) = \frac{z^3 + 1}{z^2 + 1}$$

possède deux pôles simples $z_1 = i$, $z_2 = -i$ et on a d'après la remarque 90 page 81,



$$\operatorname{Res}(f, i) = \frac{z^3 + 1}{(z^2 + 1)'} \Big|_{z=i} = \frac{z^3 + 1}{2z} \Big|_{z=i} = \frac{1 - i}{2i} = \frac{-1 - i}{2},$$

et

$$\operatorname{Res}(f, -i) = \frac{z^3 + 1}{(z^2 + 1)'} \Big|_{z=-i} = \frac{z^3 + 1}{2z} \Big|_{z=-i} = \frac{1 + i}{-2i} = \frac{-1 + i}{2}.$$

Notons que pour $0 < r < 1$ l'intégrale $\oint_{C_r} \frac{z^3 + 1}{z^2 + 1} dz = 0$ car la fonction f est holomorphe à l'intérieur de C_r et sur C_r . Mais, si $r > 1$ on aura

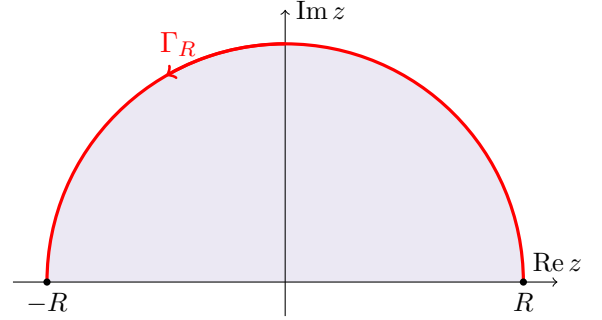
$$\oint_{C_r} \frac{z^3 + 1}{z^2 + 1} dz = 2\pi i (\operatorname{Res}(f, i) + \operatorname{Res}(f, -i)) = 2\pi i \left(\frac{-1 - i}{2} + \frac{-1 + i}{2} \right) = -2\pi i. \quad \blacksquare$$

5.4 Application du théorème des résidus

5.4.1 Théorèmes particuliers utilisés pour le calcul d'intégrales

Lorsque l'on calcule certaines types d'intégrales, il est souvent nécessaire de montrer que $\int_{\Gamma_R} F(z) dz$

et $\int_{\Gamma_R} F(z) e^{i\alpha z} dz, \alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tendent vers zéro quand $R \rightarrow +\infty$, où Γ_R est un demi-cercle centré à l'origine et de rayon R .



Les proposition suivantes sont fondamentales.

Proposition 92

Si $|F(z)| \leq \frac{M}{R^k}$ pour $z = Re^{it}$, où $k > 1$ et M sont des constantes, alors si Γ_R est le demi-cercle de la figure ci-dessus, $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} F(z) dz = 0$.

Démonstration. D'après le théorème d'estimation [voir l'inégalité (3.1) page 39], nous avons

$$\left| \int_{\Gamma_R} F(z) dz \right| \leq \frac{M}{R^k} \cdot \pi R = \frac{\pi M}{R^{k-1}},$$

car la longueur L de l'arc Γ_R est $L = \pi R$. Alors

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \left| \int_{\Gamma_R} F(z) dz \right| = 0 \text{ et donc } \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} F(z) dz = 0. \quad \blacksquare$$

Proposition 93

Si $|F(z)| \leq \frac{M}{R^k}$ pour $z = Re^{it}$, où $k > 0$ et M sont des constantes, alors si Γ_R est le demi-cercle de la figure ci-dessus, $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} e^{i\alpha z} F(z) dz = 0, \alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Démonstration. Si $z = Re^{it}$, on a

$$\int_{\Gamma_R} e^{i\alpha z} F(z) dz = \int_0^\pi e^{i\alpha R e^{it}} F(Re^{it}) R i e^{it} dt.$$

D'où

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\Gamma_R} e^{i\alpha z} F(z) dz \right| &= \left| \int_0^\pi e^{i\alpha R e^{it}} F(R e^{it}) R i e^{it} dt \right| \\
 &\leq \int_0^\pi \left| e^{i\alpha R e^{it}} F(R e^{it}) R i e^{it} \right| dt \\
 &= \int_0^\pi \left| e^{-\alpha R \sin t} e^{i\alpha R \cos t} F(R e^{it}) \right| R dt \\
 &= \int_0^\pi e^{-\alpha R \sin t} |F(R e^{it})| R dt \\
 &\leq \frac{M}{R^{k-1}} \int_0^\pi e^{-\alpha R \sin t} dt = \frac{2M}{R^{k-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R \sin t} dt.
 \end{aligned}$$

De plus, par l'étude de la fonction $t \mapsto \frac{2}{\pi}t - \sin t$ sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, on voit que $\sin t \geq \frac{2}{\pi}t$ si $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. La dernière intégrale est donc inférieure ou égale à

$$\frac{2M}{R^{k-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R \frac{2}{\pi}t} dt = \frac{2M}{R^{k-1}} \left[\frac{-\pi}{2\alpha R} e^{-\alpha R \frac{2}{\pi}t} \right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi M}{\alpha R^k} (1 - e^{-\alpha R}),$$

qui tend vers zéro quand $R \rightarrow +\infty$ car α et k sont strictement positifs ce qui démontre le résultat annoncé. ■

5.4.2 Application aux transformées de Fourier

Définition 94

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$.

Sa **transformée de Fourier** est la fonction $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx.$$

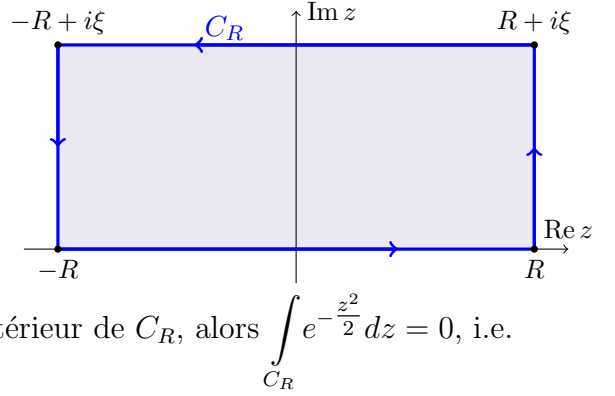
La transformée de Fourier est un outil essentiel des mathématiques appliquées. Elle peut souvent être obtenue via le calcul des résidus.

Exemple 75

Calculons la transformée de Fourier de la fonction f définie par $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Considérons $\int_{C_R} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ où C_R désigne le rectangle d'extrémités $-R, R, R+i\xi$ et $-R+i\xi$, $\xi > 0$.

La fonction $z \mapsto e^{-\frac{z^2}{2}}$ n'a aucune singularité à l'intérieur de C_R , alors $\int_{C_R} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0$, i.e.



$$\int_{-R}^R e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \int_0^\xi e^{-\frac{(R+iy)^2}{2}} i dy + \int_R^{-R} e^{-\frac{(x+i\xi)^2}{2}} dx + \int_\xi^0 e^{-\frac{(-R+iy)^2}{2}} i dy = 0.$$

On a $\left| \int_0^\xi e^{-\frac{(R+iy)^2}{2}} i dy \right| \leq \int_0^\xi \left| e^{-\frac{(R+iy)^2}{2}} \right| dy = \int_0^\xi e^{-\frac{R^2+y^2}{2}} dy \rightarrow 0$ quand $R \rightarrow +\infty$. De même $\int_\xi^0 e^{-\frac{(-R+iy)^2}{2}} i dy \rightarrow 0$ quand $R \rightarrow +\infty$. Donc, lorsque $R \rightarrow +\infty$, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x+i\xi)^2}{2}} dx = 0,$$

il vient alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x+i\xi)^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}.$$

On en déduit que

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-i\xi x} dx = e^{-\frac{\xi^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x+i\xi)^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\xi^2}{2}}. \blacksquare$$

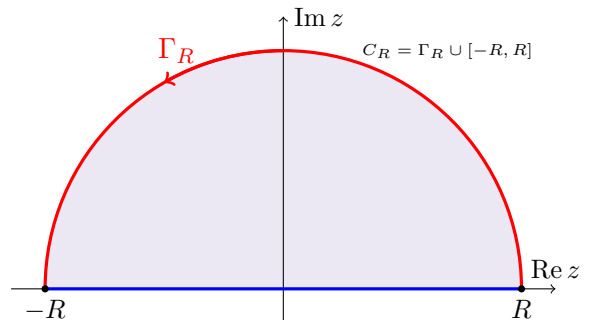
Cas d'une fonction rationnelle

Soit $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ une fonction rationnelle intégrable sur $\mathbb{R}$ et $z_k, \text{Im } z_k \neq 0, k = 1, \dots, n$ ses pôles.

Pour calculer la transformée de Fourier

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx$$

de la fonction f par la méthode des résidus, on considère $\int_{C_R} f(z) e^{-i\xi z} dz$, $\xi < 0$ où C_R désigne la



courbe fermée ou le **contour** fermé formé du segment $[-R, +R]$ et du demi cercle Γ_R décrit dans le sens direct.

Si le nombre R est suffisamment grand alors

$$\int_{C_R} f(z) e^{-i\xi z} dz = 2\pi i \sum_{\text{Im } z_k > 0} \text{Res}(f(z) e^{-i\xi z}, z_k),$$

i.e.

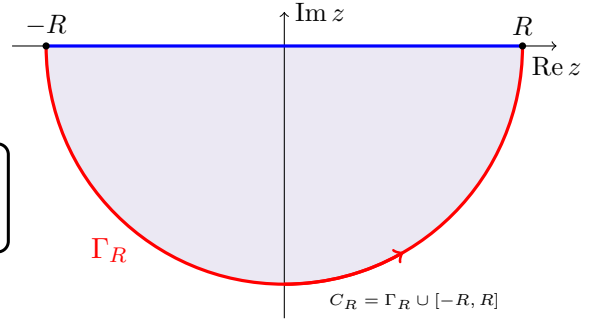
$$\int_{-R}^R f(x) e^{-i\xi x} dx + \int_{\Gamma_R} f(z) e^{-i\xi z} dz = 2\pi i \sum_{\text{Im } z_k > 0} \text{Res}(f(z) e^{-i\xi z}, z_k),$$

Si l'on prend la limite quand $R \rightarrow +\infty$ et si l'on utilise le fait que $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} f(z) e^{-i\xi z} dz = 0$, on obtient

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } z_k > 0} \text{Res}(f(z) e^{-i\xi z}, z_k), \text{ si } \xi < 0.$$

De même, en choisissant le demi cercle avec des parties imaginaires négatives on obtient

$$\hat{f}(\xi) = -2\pi i \sum_{\text{Im } z_k < 0} \text{Res}(f(z) e^{-i\xi z}, z_k), \text{ si } \xi > 0.$$



Exemple 76

Calculons la transformée de Fourier de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$.

On a $z^2 + 1 = 0$ pour $z = i$ et $z = -i$, ces valeurs de z sont les pôles simples de $\frac{1}{z^2 + 1}$ et

$$\begin{aligned} \text{Res}\left(\frac{e^{-i\xi z}}{z^2 + 1}, i\right) &= \frac{e^{-i\xi z}}{(z^2 + 1)'} \Big|_{z=i} = \frac{e^{-i\xi z}}{2z} \Big|_{z=i} = \frac{e^{\xi}}{2i}, \\ \text{Res}\left(\frac{e^{-i\xi z}}{z^2 + 1}, -i\right) &= \frac{e^{-i\xi z}}{(z^2 + 1)'} \Big|_{z=-i} = \frac{e^{-i\xi z}}{2z} \Big|_{z=-i} = \frac{e^{-\xi}}{-2i}. \end{aligned}$$

Alors

$$\hat{f}(\xi) = \begin{cases} 2\pi i \text{Res}\left(\frac{e^{-i\xi z}}{z^2 + 1}, i\right), & \text{si } \xi < 0, \\ -2\pi i \text{Res}\left(\frac{e^{-i\xi z}}{z^2 + 1}, -i\right), & \text{si } \xi > 0 \end{cases} = \begin{cases} 2\pi i \frac{e^{\xi}}{2i}, & \text{si } \xi < 0, \\ -2\pi i \frac{e^{-\xi}}{-2i}, & \text{si } \xi > 0 \end{cases} = \pi e^{-|\xi|}. \quad \blacksquare$$

5.4.3 Calcul d'intégrales définies diverses

Le calcul d'intégrales définies généralisées peut souvent être effectué en utilisant le **théorème des résidus** appliqué à une **fonction** et à un **contour** convenables dont le choix peut demander une grande **ingéniosité**.

Les types d'intégrales qui suivent sont souvent rencontrées dans la pratique.

Intégrale du type $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$

Soit f une fonction complexe holomorphe dans le demi plan $\text{Im } z \geq 0$ sauf en un nombre fini de points singuliers isolés $z_1, z_2, \dots, z_n$ de demi plan $\text{Im } z > 0$. On suppose de plus que $|f(z)| \leq \frac{M}{R^k}$ pour $z = R e^{it}$, $k > 1$ et $M > 0$.

On considère $\int_{C_R} f(z) dz$, où C_R désigne le contour fermé formé du segment $[-R, +R]$ et du demi cercle Γ_R décrit dans le sens direct.

Si le nombre R est pris suffisamment grand alors le théorème des résidus permet d'écrire

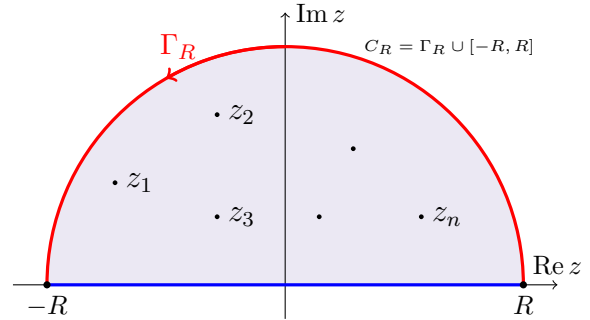
$$\int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f(z), z_k),$$

i.e.

$$\int_{-R}^R f(x) dx + \int_{\Gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f(z), z_k).$$

D'après la proposition 92, $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} f(z) dz = 0$. Alors lorsque $R \rightarrow +\infty$, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f(z), z_k).$$



Remarque 95

Si $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ où P et Q sont des polynômes avec $\deg Q \geq 2 + \deg P$, et aucun des zéros de Q n'étant réel, alors la formule précédente est valable, les z_k étant les zéros de Q tels que $\text{Im } z_k > 0$.

Exemple 77

Calculons l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$.

Les pôles de $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}$ situés à l'intérieur du contour C_R sont les pôles simples $z = i$ et $z = 2i$ et on a

$$\text{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} \left\{ (z - i) \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} \right\} = \frac{i}{6},$$

$$\text{Res}(f, 2i) = \lim_{z \rightarrow 2i} \left\{ (z - 2i) \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} \right\} = \frac{-i}{3}.$$

Si R est suffisamment grand alors d'après le théorème des résidus

$$\int_{C_R} \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} dz = 2\pi i \{ \text{Res}(f, i) + \text{Res}(f, 2i) \} = 2\pi i \left\{ \frac{i}{6} - \frac{i}{3} \right\} = \frac{\pi}{3}.$$

i.e.

$$\int_{-R}^R \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} dz = \frac{\pi}{3}.$$

Comme $\lim_{R \rightarrow +\infty} R^2 |f(R e^{it})| = 1$, alors $|f(z)| \leq \frac{M}{R^2}$ pour $z = R e^{it}$, $M > 0$. Donc d'après la proposition 92,

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} dz = 0.$$

Par conséquent, lorsque $R \rightarrow +\infty$, on obtient

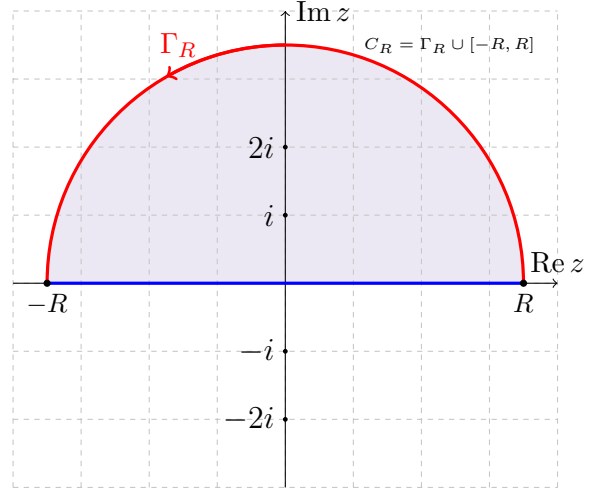
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx = \frac{\pi}{3}. \quad \blacksquare$$

Intégrale du type $\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt$

Soit $R(x, y)$ une fonction rationnelle en x et en y qui n'a pas de pôles sur le cercle $x^2 + y^2 = 1$. Si on pose $z = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, alors $\sin t = \frac{z - z^{-1}}{2i}$, $\cos t = \frac{z + z^{-1}}{2}$ et $dz = ie^{it} dt$ ou $dt = \frac{1}{iz} dz$.

Par conséquent

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = \int_{|z|=1} \frac{1}{iz} R\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) dz.$$



Posons $f(z) = \frac{1}{iz} R\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)$, on a alors d'après le théorème des résidus

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f(z), z_k),$$

où les z_k sont les pôles de la fraction rationnelle f qui appartiennent à l'intérieur du cercle $|z| = 1$.

Exemple 78

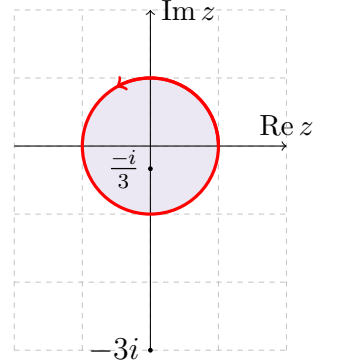
Calculons l'intégrale $\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\sin t} dt$.

Pour calculer cette intégrale on va appliquer la méthode ci-dessus qui consiste à poser $z = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Alors

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\sin t} dt &= \int_{|z|=1} \frac{1}{iz \left(5+3\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)} dz = \int_{|z|=1} \frac{2}{3z^2+10iz-3} dz \\ &= \int_{|z|=1} \frac{2}{(3z+i)(z+3i)} dz. \end{aligned}$$

Puisque le nombre $\frac{-i}{3}$ est le seul pôle de $\frac{2}{(3z+i)(z+3i)}$ qui appartient à l'intérieur du cercle $|z| = 1$, alors par le théorème des résidus

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\sin t} dt = 2\pi i \text{Res}\left(\frac{2}{(3z+i)(z+3i)}, \frac{-i}{3}\right) = 2\pi i \frac{2}{3\left(\frac{-i}{3}+3i\right)} = \frac{\pi}{2}. \quad \blacksquare$$



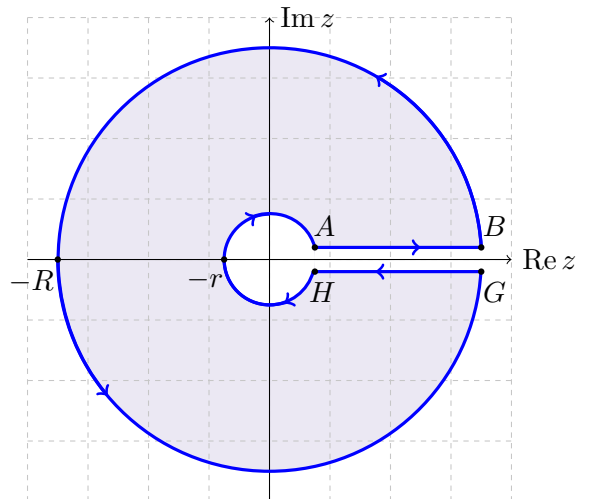
Intégrale du type $\int_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} x^{\alpha-1} dx$

Soit α un réel strictement positif. Soient P et Q deux polynômes avec $\deg Q > \alpha + \deg P$, tels que $P(0) \neq 0$ et aucun des zéros de Q n'étant réel positif ou nul. Si z_k , $k = 1, \dots, n$ sont des points singuliers de $\frac{P(x)}{Q(x)} x^{\alpha-1}$, alors $\text{Re } z_k \notin [0, +\infty[$.

On va considérer cette fois la fonction

$$z \mapsto f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} (-z)^{\alpha-1}, \quad \text{Arg}(\text{Log } z) \in]-\pi, \pi[,$$

et le contour $C_{R,r}$ de la figure ci-contre où l'axe réel positif est la coupure et où AB et GH coïncident avec l'axe des x mais sont montrés séparés pour une meilleure compréhension. Le contour $C_{R,r} = [r, R] \cup \Gamma_R \cup [R, r] \cup \Gamma_r$ où Γ_R et Γ_r sont des cercles centrés à l'origine de rayons R et r .



Si R est assez grand et r est assez petit, alors le théorème des résidus permet d'écrire

$$\int_{C_{R,r}} \frac{P(z)}{Q(z)} (-z)^{\alpha-1} dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} (-z)^{\alpha-1}, z_k \right).$$

On a

$$\begin{aligned} \int_{C_{R,r}} \frac{P(z)}{Q(z)} (-z)^{\alpha-1} dz &= \int_r^R \frac{P(x)}{Q(x)} e^{(\alpha-1)i\pi} x^{\alpha-1} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} (-z)^{\alpha-1} dz \\ &\quad + \int_R^r \frac{P(x)}{Q(x)} e^{-(\alpha-1)i\pi} x^{\alpha-1} dx - \int_{\Gamma_r} \frac{P(z)}{Q(z)} (-z)^{\alpha-1} dz. \end{aligned}$$

Lorsque $r \rightarrow 0$, on obtient

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left| \int_{\Gamma_r} \frac{P(z)}{Q(z)} (-z)^{\alpha-1} dz \right| = \lim_{r \rightarrow 0} \left| \int_0^{2\pi} \frac{P(re^{it})}{Q(re^{it})} (-re^{it})^{\alpha-1} r e^{it} dt \right| \leq \lim_{r \rightarrow 0} K r^\alpha = 0.$$

Quand $R \rightarrow +\infty$

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \left| \int_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} (-z)^{\alpha-1} dz \right| = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left| \int_0^{2\pi} \frac{P(Re^{it})}{Q(Re^{it})} (-Re^{it})^{\alpha-1} R e^{it} dt \right| \leq \lim_{R \rightarrow +\infty} K R^\beta = 0,$$

où $\beta = \alpha + \deg P - \deg Q < 0$. On en déduit que

$$e^{-(\alpha-1)i\pi} \int_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} x^{\alpha-1} dx + e^{(\alpha-1)i\pi} \int_{+\infty}^0 \frac{P(x)}{Q(x)} x^{\alpha-1} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} (-z)^{\alpha-1}, z_k \right).$$

Par conséquent

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} x^{\alpha-1} dx = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} \sum_{k=1}^n \text{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} (-z)^{\alpha-1}, z_k \right)}.$$

Exemple 79

Par application de la formule précédente on a

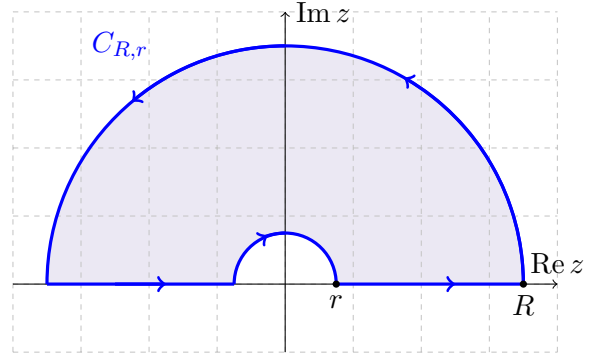
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{x+1} dx = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} \text{Res} \left(\frac{(-z)^{\alpha-1}}{z+1}, -1 \right) = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}, 0 < \alpha < 1. \quad \blacksquare$$

Intégrale du type $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx, \alpha > 0$

Soit $\frac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle dont le dénominateur $Q(x)$ ne possède pas des racines réelles et $\deg Q \geq \deg P$.

Considérons la fonction $z \mapsto f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\alpha z}}{z}$ et le contour $C_{R,r}$ de la figure ci-contre,

$C_{R,r} = [r, R] \cup \Gamma_R \cup [-R, -r] \cup \Gamma_r$ où Γ_R et Γ_r sont des demi cercles centrés à l'origine de rayons R et r . Donc, d'après le théorème des résidus on obtient



$$\begin{aligned} \int_{C_{R,r}} \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\alpha z}}{z} dz &= \int_r^R \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\alpha z}}{z} dz + \int_{-R}^{-r} \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx - \int_{\Gamma_r} \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\alpha z}}{z} dz \\ &= 2\pi i \sum_{\text{Im } z_k > 0} \text{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\alpha z}}{z}, z_k \right). \end{aligned}$$

Notons que si on procède comme ci-dessus on vérifie que l'intégrale $\int_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\alpha z}}{z} dz$ tend vers zéro quand R tend vers $+\infty$.

Pour l'intégrale sur Γ_r on a

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma_r} \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\alpha z}}{z} dz = \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^\pi \frac{P(re^{it})}{Q(re^{it})} \frac{e^{i\alpha re^{it}}}{re^{it}} i r e^{it} dt = i\pi \frac{P(0)}{Q(0)}.$$

Donc si on fait tendre r vers zéro et R vers $+\infty$ on obtient

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx = i\pi \frac{P(0)}{Q(0)} + 2\pi i \sum_{\text{Im } z_k > 0} \text{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{i\alpha z}}{z}, z_k \right)}.$$

Exemple 80

Calculons $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2 + 1)x} dx$.

Puisque le nombre i est le seul pôle de $\frac{e^{iz}}{(z^2 + 1)z}$ avec partie imaginaire strictement positive, alors par application de la formule précédente on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2 + 1)x} dx = i\pi + 2\pi i \text{Res} \left(\frac{e^{iz}}{(z^2 + 1)z}, i \right) = i\pi (1 - e^{-1}).$$

Notons que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2 + 1)x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)x} dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2 + 1)x} dx = 2i \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2 + 1)x} dx.$$

On en déduit que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2 + 1)x} dx = (1 - e^{-1}) \frac{\pi}{2}. \quad \blacksquare$$

Intégrale du type $\int_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \operatorname{Log} x dx$

Soit $\frac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle dont le dénominateur $Q(x)$ ne possède pas de racines réelles positives ou nulles,

$$P(0) \neq 0 \text{ et } \deg Q \geq 2 + \deg P.$$

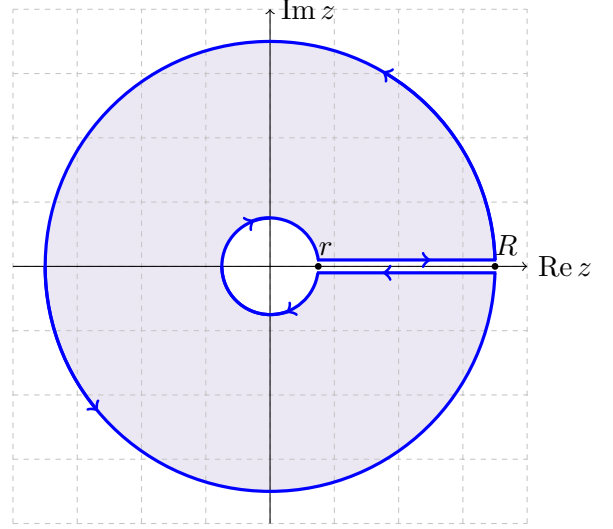
On considère la fonction

$$z \mapsto f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} (\operatorname{Log} z)^2,$$

et le contour $C_{R,r} = [r, R] \cup \Gamma_R \cup [R, r] \cup \Gamma_r$ de la

figure ci-contre où Γ_R et Γ_r sont des cercles centrés à l'origine de rayons R et r .

Si R est assez grand et r est assez petit, alors par le théorème des résidus



$$\begin{aligned} \int_{C_{R,r}} \frac{P(z)}{Q(z)} (\operatorname{Log} z)^2 dz &= \int_r^R \frac{P(x)}{Q(x)} (\operatorname{Log} x)^2 dx + \int_{\Gamma_R} f(z) dz \\ &\quad + \int_R^r \frac{P(x)}{Q(x)} (\operatorname{Log} x + 2\pi i)^2 dx - \int_{\Gamma_r} f(z) dz \\ &= 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} (\operatorname{Log} z)^2, z_k \right). \end{aligned}$$

Comme précédemment les intégrales sur Γ_r et Γ_R tendent vers zéro lorsque $r \rightarrow 0$ et $R \rightarrow +\infty$.

On obtient alors la relation

$$\int_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} (\operatorname{Log} x)^2 dx - \int_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} (\operatorname{Log} x + 2\pi i)^2 dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} (\operatorname{Log} z)^2, z_k \right).$$

D'où

$$-2 \int_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \operatorname{Log} x dx - 2\pi i \int_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} (\operatorname{Log} z)^2, z_k \right).$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \operatorname{Log} x dx &= -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^n \operatorname{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} (\operatorname{Log} z)^2, z_k \right) \right), \\ \int_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx &= \frac{-1}{2\pi} \operatorname{Im} \left(\sum_{k=1}^n \operatorname{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} (\operatorname{Log} z)^2, z_k \right) \right). \end{aligned}$$

Exemple 81

Calculons l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Log} x}{(x+1)^3} dx$.

Ici $P(x) = 1$ et $Q(x) = (x+1)^3$, toutes les conditions sont vérifiées, d'où

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^3} \operatorname{Log} x dx &= \frac{-1}{2} \operatorname{Re} \left(\operatorname{Res} \left(\frac{1}{(z+1)^3} (\operatorname{Log} z)^2, -1 \right) \right), \\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^3} dx &= \frac{-1}{2\pi} \operatorname{Im} \left(\operatorname{Res} \left(\frac{1}{(z+1)^3} (\operatorname{Log} z)^2, -1 \right) \right). \end{aligned}$$

Comme -1 est un pôle triple, pour le résidu on a donc

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left(\frac{1}{(z+1)^3} (\operatorname{Log} z)^2, -1 \right) &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow -1} \left((z+1)^3 \frac{(\operatorname{Log} z)^2}{(z+1)^3} \right)'' \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow -1} ((\operatorname{Log} z)^2)'' = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{1 - \operatorname{Log} z}{z^2} \\ &= \frac{1 - \operatorname{Log}(-1)}{(-1)^2} = 1 - (0 + i\pi) = 1 - i\pi. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Log} x}{(x+1)^3} dx &= \frac{-1}{2}, \\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^3} dx &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

■