RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen

Faculté de Technologie

Département des Sciences et Techniques

Fonction d'une variable complexe. (Math 4)

Rappels de cours et exercices corrigés sur les nombres complexes, fonctions complexes, intégration complexe, séries de Laurent et application du calcul des résidus.

BENSID Sabri **ZAHAF Mohammed Brahim**

Fonction d'une variable complexe. Nombres complexes, fonctions complexes, intégration complexe, série de Laurent et résidus. Cours et exercices avec solutions.

BENSID Sabri ZAHAF Mohammed Brahim

22 mai 2015

Préface

Ce livre est un recueil d'exercices et de problèmes des mathématiques pour l'ingénieur. Il s'adresse aux étudiants de deuxième année de Licence des sciences et techniques, deuxième semestre (L2S2), ainsi qu'aux étudiants des autres filières et des écoles préparatoires qui y trouveront autant les théorèmes qu'ils doivent connaître que des exercices pour les illustrer. Il est le fruit d'un enseignement de mathématiques pour l'ingénieur dispensé au département sciences et techniques, faculté de technologie à l'université de Tlemcen.

Nous avons privilégier l'exposé des méthodes de calcul (théorèmes, propositions,..) sans démontrer quoi que ce soit pour aller directement vers le but et ceci en ajoutant des exercices avec des solutions détaillées et quelques exercices supplémentaires donnés sans solutions pour examiner les capacités des lecteurs. Nous les invitons cependant à chercher eux même les exercices avant de regarder les solutions. Nous mentionnons aussi que le cours de ce livre est un résumé fait à partir de la bibliographie insérer à la fin de ce livre.

Le premier chapitre rappelle les nombres complexes et les différentes régions du plan complexe telles que le cercle, disque et autres. Le second chapitre initie le lecteur aux fonctions à variable complexe, il découvre la notion d'une fonction multiforme et uniforme et la notion d'holomorphie (dérivabilité) de ces fonctions. Le troisième chapitre est consacré aux intgrales curvilignes et aux formules intgrales de Cauchy. Le chapitre quatre est reservé aux séries de Laurent, classification des sngularités et théorie des résidus et le dernier chapitre traite quelques applications sur les résidus sous forme des intégrales impropres et séries numériques.

Nous avons ajouté aussi les examens des années passées depuis 2008 avec leurs solutions sous forme d'un chapitre et une annexe historique résumant une brève biographie des mathématiciens cités dans ce livre.

Table des matières

Chapitre 1

Nombres complexes

Sommaire

1.1 Nombres complexes. Définitions

Définition 1.1. *On appelle nombre complexe, toute expression de la forme $z = x + iy$ (dite forme algébrique de z) où x et y sont des nombres réels et i définit par la relation $i^2 = -1$. Les nombres x et y s'appellent respectivement partie réelle et partie imaginaire de z.*

Notation : $x = Re(z)$ et $y = Im(z)$.

On désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes :

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy, \quad x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$$

Si $x = 0$, $z = iy$ est dit imaginaire pur.
Le nombre $\overline{z} = x - iy$ est appelé conjugué de z.
Deux nombres complexes $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ sont égaux si $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$.
Un nombre complexe $z = 0$ si et seulement $x = 0$ et $y = 0$.
Si $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$, alors

- $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.
- $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$.

- $z_1.z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$.
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} = \frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)} = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + \frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$.
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
- $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$.
- $\overline{z_1.z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$.
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.
- $\overline{\overline{z}} = z$.
- $Re(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$ et $Im(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.
- z est réel $\iff Im(z) = 0 \iff z = \overline{z}$.
- z est imaginaire pur $\iff Re(z) = 0 \iff z = -\overline{z}$.

On appelle module de $z = x + iy$, le nombre réel positif, noté $|z|$, définit par

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

et on a

- $|z| \geq 0$.
- $|z| = 0 \iff z = 0$.
- $|z_1z_2| = |z_1|.|z_2|$.
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (Inégalité triangulaire).
- $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$.
- $|Re(z)| \leq |z|$, $Im(z)| \leq |z|$.
- $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$, $|z|^2 = z\overline{z}$.

1.2 Plan complexe

Tout nombre complexe $z = x + iy$ est déterminé par le couple (x, y). Pour cela nous associons à tout nombre complexe z un point (x, y) dans le plan des coordonnées cartésiennes.

1.3 Forme trigonométrique

On peut décrire un vecteur dans le plan complexe en coordonnés polaires.
On désigne par (r, θ) les coordonées polaires du point A. On a les relations suivantes

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$$

et par conséquent tout nombre complexe s'écrit sous la forme

$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

cette expression est dite forme trigonométrique du nombre complexe z avec $r = |z|$ et θ est appelé argument de z, noté $\arg(z)$.

Si $z_1 = r(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1))$ et $z_2 = r(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2))$ alors

$$z_1 = z_2 \iff r_1 = r_2 \text{ et } \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Remarque 1.1. *L'argument d'un nombre complexe z n'est pas unique puisque $\arg(z) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ est aussi un argument de z.*

Propriétés 1.1.
- $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$.
- $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$.
- $\arg(\overline{z}) = 2\pi - \arg(z)$.

Définition 1.2. *Soit $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \in \mathbb{C}$, l'unique argument θ appartenant à $]-\pi, \pi]$ s'appelle l'argument principal de z, noté $Arg(z)$.*

On a

$$\arg(z) = Arg(z) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$, alors

$$Arg(z) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{si } x < 0 \text{ et } y \geq 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ et } y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{si } x < 0 \text{ et } y \leq 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ et } y \leq 0. \end{cases}$$

Exemple 1.1. *Donner la forme trigonométrique de $z = -\sqrt{3} - i$.*
On a $x = -\sqrt{3}$ et $y = -1$ donc $|z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$,
et $Arg(z) = \arctan\left(\frac{-1}{-\sqrt{3}}\right) - \pi = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5\pi}{6}$.
Ainsi la forme trigonomértique est $z = 2(\cos(-\frac{5\pi}{6}) + i\sin(-\frac{5\pi}{6}))$.

1.4 Formule de Moivre, formule d'Euler

La formule de Moivre

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

La formule d'Euler

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

Ainsi un nombre complexe peut s'écrire aussi sous la forme

$$z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = |z|e^{i\theta}.$$

Exemple 1.2.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^3 &= \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^3 = \cos\left(\frac{3\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{6}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i. \end{aligned}$$

1.5 Racines $n^{ième}$ d'un nombre complexe

Soit $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$. On appelle racine $n^{ième}$ de z tout nombre complexe $w = \rho(\cos(\psi) + i\sin(\psi))$ tel que $z = w^n$.
On obtient alors

$$\begin{aligned} w^n = z \quad &\iff \quad \rho^n(\cos(\psi) + i\sin(\psi))^n = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \\ &\iff \quad \rho^n(\cos(n\psi) + i\sin(n\psi)) = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \\ &\iff \quad \rho^n = r \quad \text{et} \quad n\psi = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\iff \quad \rho = \sqrt[n]{r} \quad \text{et} \quad \psi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \end{aligned}$$

En donnant à k les valeurs $0, 1, 2, \ldots, n-1$, nous trouvons n valeurs différentes de la racine $n^{ième}$ de z :

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Exemple 1.3. *Les racines cubiques de l'unité,* $z^3 = 1$,

$$\begin{aligned} z^3 &= 1 = 1(\cos(0) + i\sin(0)) \\ \Rightarrow z_k &= \sqrt[3]{1}\left(\cos\left(\frac{0}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{0}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right), \quad k = 0, 1, 2. \\ \Rightarrow z_k &= \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

Ainsi les racines cubiques de 1 sont

$$\begin{aligned} z_0 &= \cos(0) + i\sin(0) = 1, \\ z_1 &= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ z_2 &= \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

1.6 Ensemble de points

Soit M et M_0 deux points du plan complexe d'affixes $z = x + iy$ et $z_0 = x_0 + iy_0$ respectivement. La distance entre M et M_0 est donnée par

$$|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Définition 1.3. ***1. Cercle :*** *Un cercle de centre z_0 et de rayon $r > 0$ est l'ensemble de points donné par*

$$C(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C},\ |z - z_0| = r\}.$$

2. Disque ouvert : *Un disque ouvert de centre z_0 et de rayon $r > 0$ est l'ensemble de points donné par*

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C},\ |z - z_0| < r\}.$$

3. Disque fermé : *Un disque fermé de centre z_0 et de rayon $r > 0$ est l'ensemble de points donné par*

$$\overline{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C},\ |z - z_0| \leq r\}.$$

4. Couronne : *Une couronne est l'ensemble des points vérifiant*

$$r < |z - z_0| < R.$$

5. Ensembles bornés : *On dit qu'un ensemble $A \subset \mathbb{C}$ est borné s'il existe un nombre réel $r > 0$ tel que $|z| < r$, $\forall z \in A$.*
6. Voisinages : *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Une partie $V \subset \mathbb{C}$ est dit voisinage de z_0 s'il existe $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \subset V$.*
7. Ensembles ouverts et ensembles fermés : *Un ensemble $A \subset \mathbb{C}$ est dit ouvert (resp. fermé) si et seulement si*

$$\forall z \in A,\ \exists r > 0,\ \ D(z, r) \subset A$$

(resp. $\mathbb{C} \setminus A$ est un ensemble ouvert).
Autrement dit un ensemble A est un ouvert s'il est voisinage de tout ses points.

Exemple 1.4. *Tout disque ouvert est un ouvert de $\mathbb{C}$.*

8. Ensembles connexes : *Un ensemble $D \subset \mathbb{C}$ est dit connexe si deux points quelconques de D peuvent être joints par un chemin appartenant à D. (si z_1 et z_2 sont deux points de D, on appelle chemin d'origine z_1 et d'extrémité z_2 toute application continue $\gamma : [0, 1] \to D$ telle que $\gamma(0) = z_1$ et $\gamma(1) = z_2$.)*
9. Domaines : *On dit qu'un ensemble $D \subset \mathbb{C}$ est un domaine si D est un ouvert connexe dans $\mathbb{C}$.*

1.7 Exercices

Exercice 1.1. Trouver les parties réelles et imaginaires, arguments et modules des nombres complexes suivants

$$(1+i\sqrt{3})^6, \quad \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^5, \quad \frac{2+i}{1-i}+\frac{2i}{1+i}, \quad \frac{1+\cos(\theta)+i\sin(\theta)}{1+\cos(\theta)-i\sin(\theta)}.$$

Solution

1. $z=(1+i\sqrt{3})^6=64$, $Re(z)=64$, $Im(z)=0$, $|z|=64$ et $arg(z)=0+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
2. $z=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^5=-i^5=-i$, $Re(z)=0$, $Im(z)=-1$, $|z|=1$ et $arg(z)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
3. $z=\frac{2+i}{1-i}+\frac{2i}{1+i}=\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i$, $Re(z)=\frac{3}{2}$, $Im(z)=\frac{5}{2}$, $|z|=\frac{\sqrt{34}}{2}$ et $arg(z)=\arctan(\frac{5}{3})+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
4.

$$z=\frac{1+\cos(\theta)+i\sin(\theta)}{1+\cos(\theta)-i\sin(\theta)}, \quad \theta\neq(2k+1)\pi, \quad k\in\mathbb{Z}.$$

$$\begin{aligned}
z &= \frac{1+\cos(\theta)+i\sin(\theta)}{1+\cos(\theta)-i\sin(\theta)}\frac{1+\cos(\theta)+i\sin(\theta)}{1+\cos(\theta)+i\sin(\theta)}\\
&= \frac{(1+\cos(\theta))^2-\sin^2(\theta)+2i\sin(\theta)(1+\cos(\theta)}{(1+\cos(\theta))^2+\sin^2(\theta)}\\
&= \frac{1+2\cos(\theta)+\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)+2i\sin(\theta)(1+\cos(\theta))}{2(1+\cos(\theta))}\\
&= \frac{1+2\cos(\theta)+2\cos^2(\theta)-1+2i\sin(\theta)(1+\cos(\theta))}{2(1+\cos(\theta))}\\
&= \frac{2\cos(\theta)(1+\cos(\theta))+2i\sin(\theta)(1+\cos(\theta))}{2(1+\cos(\theta))}\\
&= \cos(\theta)+i\sin(\theta), \quad \text{puisque } \theta\neq(2k+1)\pi.
\end{aligned}$$

Ainsi $Re(z)=\cos(\theta)$, $Im(z)=\sin(\theta)$, $|z|=1$ et $arg(z)=\theta+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

Autre Méthode :

En utilisant la formule d'Euler

$$\begin{aligned}
e^{i\theta} &= \cos(\theta)+i\sin(\theta),\\
e^{-i\theta} &= \cos(\theta)-i\sin(\theta).
\end{aligned}$$

Alors

$$z=\frac{1+e^{i\theta}}{1+e^{-i\theta}}=e^{i\theta}\frac{e^{-i\theta}+1}{1+e^{-i\theta}}=e^{i\theta}, \quad \text{puisque } \theta\neq(2k+1)\pi.$$

Exercice 1.2. Trouver les points z du plan complexe vérifiant

$$|z| = |z - i|, \quad |\overline{z} - 4 + i| = 1, \quad Re(1 - z) < \frac{1}{2}$$

Solution

Trouver les points z du plan complexe vérifiant :

1. $|z| = |z-i|$. Ce sont tous les points du plan complexe d'affixe z équidistants des points d'affixes $z_0 = 0$ et $z_1 = i$, donc tous les points de la droite $y = \frac{1}{2}$:

Posons $z = x + iy$, alors

$$\begin{aligned} |z| = |z-i| \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y-1)^2} \\ &\Rightarrow \quad \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

2. $|\overline{z}-4+i| = 1$, on a $|\overline{z}-4+i| = |\overline{z-4-i}| = |z-4-i| = |z-(4+i)| = 1$.

L'ensemble de points est le cercle de centre $z_0 = 4+i$ et de rayon 1 : $C(4+i, 1)$.

Autre méthode :

Posons $z = x + iy$, donc $|\overline{z} - 4 + i| = 1$ implique $|x - iy - 4 + i| = 1$, i.e. $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 1$.

3. $Re(1-z) < \frac{1}{2}$. Posons $z = x + iy$, on obtient $1 - x < \frac{1}{2}$ i.e. $x > \frac{1}{2}$. L'ensemble de points est le demi-plan $x > \frac{1}{2}$.

Exercice 1.3. 1. Trouver les solutions de l'équation $z^4 = 1$.
2. Calculer les racines cubiques de i.

Solution

Trouver les solutions de l'équation $z^4 = 1$.

$$z^4 = 1 = 1(\cos(0) + i\sin(0))$$

Les racines de l'équation $z^4 = 1$ sont $z_k = \cos(\frac{2k\pi}{4}) + i\sin(\frac{2k\pi}{4})$, $k = 0, 1, 2, 3$.

$$\begin{aligned} z_0 &= 1, \\ z_1 &= \cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}) = i, \\ z_2 &= \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1, \\ z_3 &= \cos(\frac{3\pi}{2}) + i\sin(\frac{3\pi}{2}) = -i. \end{aligned}$$

2. Trouver les solutions de l'équation $z^3 = i$.

$$z^3 = i = 1(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}))$$

Les racines de l'équation $z^3 = i$ sont $z_k = \cos(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3})$, $k = 0, 1, 2$.

$$\begin{aligned}
z_0 &= \cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2},\\
z_1 &= \cos(\frac{5\pi}{6}) + i\sin(\frac{5\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2},\\
z_2 &= \cos(\frac{3\pi}{2}) + i\sin(\frac{3\pi}{2}) = -i.
\end{aligned}$$

Exercice 1.4. 1. Résoudre l'équation $z^3 = 1$ en utilisant la forme exponentielle.
2. On note j la solution complexe de partie imaginaire positive.
a) Vérifier que j^2 est aussi solution.
b) Montrer que $j^2 = \frac{1}{j} = \overline{j}$.
c) Calculer $1 + j + j^2$.

Solution

1.

$$z^3 = 1 = 1(\cos(0) + i\sin(0))$$

Les racines de l'équation $z^3 = 1$ sont $z_k = \cos(\frac{2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{2k\pi}{3})$, $k = 0, 1, 2$.

$$\begin{aligned}
z_0 &= 1,\\
z_1 &= \cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3}) = e^{\frac{2\pi}{3}i},\\
z_2 &= \cos(\frac{4\pi}{3}) + i\sin(\frac{4\pi}{3}) = e^{\frac{4\pi}{3}i}.
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\sin(\frac{2\pi}{3}) &= 2\cos(\frac{\pi}{3})\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2},\\
\cos(\frac{2\pi}{3}) &= \cos^2(\frac{\pi}{3}) - \sin^2(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2},\\
\sin(\frac{4\pi}{3}) &= 2\cos(\frac{2\pi}{3})\sin(\frac{2\pi}{3}) = 2(-\frac{1}{2})\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2},\\
\cos(\frac{4\pi}{3}) &= \cos^2(\frac{2\pi}{3}) - \sin^2(\frac{2\pi}{3}) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

On déduit que $j = e^{\frac{2\pi}{3}i} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

a. $j^2 = e^{\frac{4\pi}{3}i}$ c'est une solution.

b. On a $j^3 = 1 \Rightarrow j^2 j = 1 \Rightarrow j^2 = \frac{1}{j} = e^{-\frac{2\pi}{3}i} = \overline{j}$.

c. $1 + j + j^2 = 1 + j + \overline{j} = 1 + 2\cos(\frac{2\pi}{3}) = 1 + 2(-\frac{1}{2}) = 0$.

Exercice 1.5. Soit z un nombre complexe vérifiant $|z| = 1$. Montrer que

$$Arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & Im(z) > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & Im(z) < 0 \end{cases}$$

Solution

Soit $z = x + iy$.

$$\begin{aligned} \frac{z-1}{z+1} &= \frac{x+iy-1}{x+iy+1} = \frac{(x-1+iy)(x+1-iy)}{(x+1+iy)(x+1-iy)} \\ &= \frac{(x-1)(x+1)+y^2+iy(x+1)-iy(x-1)}{(x+1)^2+y^2} \\ &= \frac{x^2+y^2-1+2iy}{(x+1)^2+y^2} = \frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2} + i\frac{2y}{(x+1)^2+y^2}. \end{aligned}$$

$$Arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \arctan\left(\frac{2y}{x^2+y^2-1}\right),$$

puisque $|z| = 1 \Rightarrow x^2+y^2 = 1 \Rightarrow x^2+y^2-1 = 0$. Ainsi

$$Arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \arctan\left(\frac{2y}{0}\right) = \begin{cases} \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2} & y > 0 \\ \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2} & y < 0. \end{cases}$$

Exercice 1.6. 1. Démontrer que

$$1 + e^{\frac{i\pi}{5}} + e^{\frac{i2\pi}{5}} + e^{\frac{i3\pi}{5}} + e^{\frac{i4\pi}{5}} = \frac{2}{1-e^{\frac{i\pi}{5}}}.$$

11 **2. En déduire les valeurs des sommes**

$$S = \sum_{k=0}^{4} \cos(\frac{k\pi}{5}), \qquad S' = \sum_{k=0}^{4} \sin(\frac{k\pi}{5}).$$

Solution

1. Nous remarquons que

$$\sum_{k=0}^{4} e^{i\frac{k\pi}{5}} = \sum_{k=0}^{4} (e^{i\frac{\pi}{5}})^k = \frac{1-e^{i5\frac{\pi}{5}}}{1-e^{i\frac{\pi}{5}}} = \frac{1-e^{i\pi}}{1-e^{i\frac{\pi}{5}}} = \frac{2}{1-e^{i\frac{\pi}{5}}}.$$

2.

$$\sum_{k=0}^{4} e^{i\frac{k\pi}{5}} = \sum_{k=0}^{4} \left(\cos(\frac{k\pi}{5}) + i\sin(\frac{k\pi}{5})\right).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{4} e^{i\frac{k\pi}{5}} &= \frac{2}{1-e^{i\frac{\pi}{5}}} = \frac{2}{1-\cos(\frac{\pi}{5})-i\sin(\frac{\pi}{5})} = \frac{2(1-\cos(\frac{\pi}{5})+i\sin(\frac{\pi}{5}))}{(1-\cos(\frac{\pi}{5}))^2+\sin^2(\frac{\pi}{5})} \\ &= \frac{2(1-\cos(\frac{\pi}{5})+i\sin(\frac{\pi}{5}))}{2-2\cos(\frac{\pi}{5})}.\end{aligned}$$

Ainsi

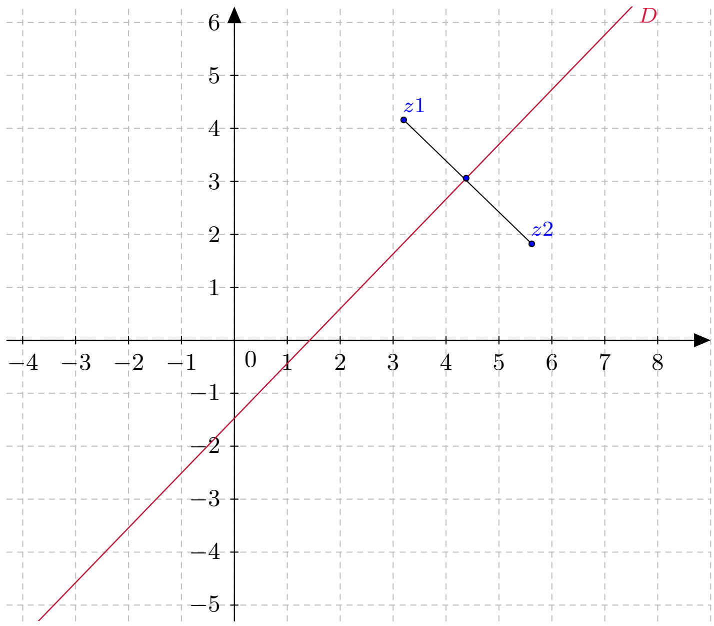
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{4}\cos(\frac{k\pi}{5}) &= 1, \\ \sum_{k=0}^{4}\sin(\frac{k\pi}{5}) &= \frac{\sin(\frac{\pi}{5})}{1-\cos(\frac{\pi}{5})}.\end{aligned}$$

<u>Exercice</u> 1.7. Trouver les lieux géométriques suivants

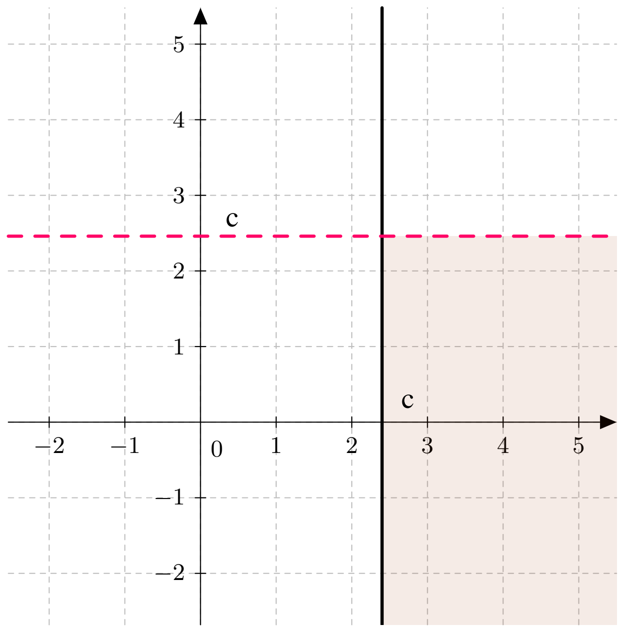
1. $|z-z_1| = |z-z_2|$, **2.** $Re(z) \geq c$ **et** $Im(z) < c$,
3. $0 < Re(iz) < 1$, **4.** $Re(z) + Im(z) < 1$,
5. $|z-2i| \leq 3$, **6.** $Re(\frac{1}{z}) = c$, $Im(\frac{1}{z}) = c$,
7. $z = t^2 + it^4, t \in \mathbb{R}$, **8.** $z = \frac{1}{1+it}, t \in \mathbb{R}$.

Solution

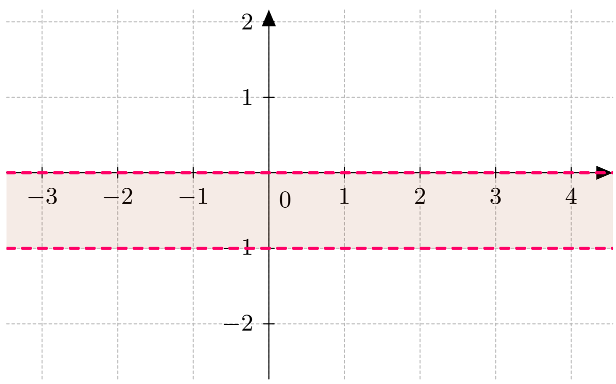
1. L'ensemble de points d'affixes z vérifiant $|z-z_1| = |z-z_2|$ sont tous les points du plan complexe équidistants des points d'affixes z_1 et z_2, c'est la médiatrice du segment $[z_1, z_2]$.



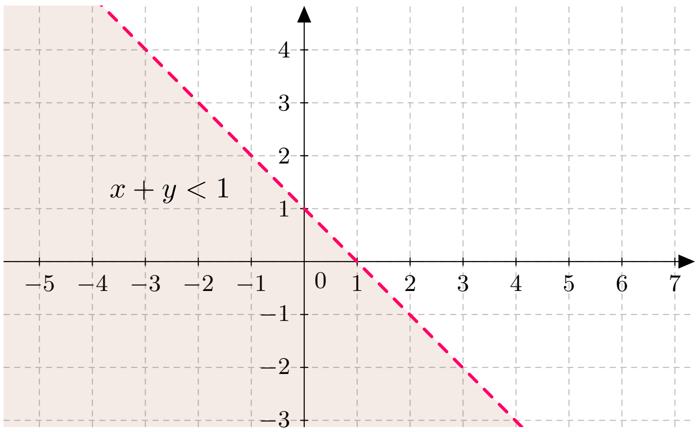
2. $Re(z) \geq c$ et $Im(z) < c$. L'ensemble de points est l'intersection des deux demi-plans $x \geq c$ et $y < c$.



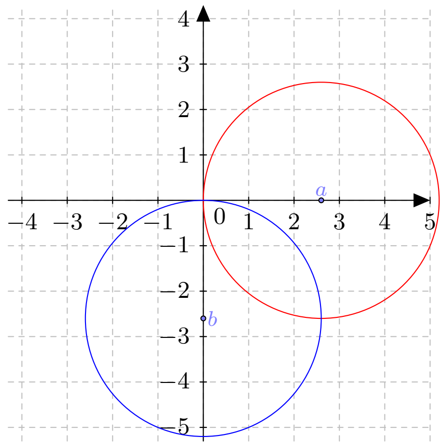
3. $0 < Re(iz) < 1$, on a $iz = i(x + iy) = ix - y$ donc $0 < -y < 1 \Rightarrow -1 < y < 0$. L'ensemble de points est l'intersection des deux demi-plans $y < 0$ et $y > -1$ (une bande).



4. $Re(z)+Im(z) < 1 \Rightarrow x+y < 1$, ainsi l'ensemble de points est le demi-plan $x + y < 1$.



5. $|z - 2i| \leq 3$ est le disque fermé de centre $2i$ et de rayon 3.



6. $Re(\frac{1}{z}) = c$, $Im(\frac{1}{z}) = c$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} &= \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2},\\ Re(\frac{1}{z}) &= \frac{x}{x^2+y^2} = c \Rightarrow x^2+y^2-\frac{x}{c} = 0\\ &\Rightarrow (x-\frac{1}{2c})^2+y^2 = \frac{1}{4c^2},\end{aligned}$$

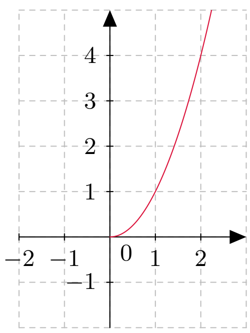
un cercle de centre $(\frac{1}{2c}, 0)$ et de rayon $\frac{1}{2c}$.

$$\begin{aligned}Im(\frac{1}{z}) &= \frac{-y}{x^2+y^2} = c \Rightarrow x^2+y^2+\frac{y}{c} = 0\\ &\Rightarrow x^2+(y+\frac{1}{2c})^2 = \frac{1}{4c^2},\end{aligned}$$

un cercle de centre $(0, -\frac{1}{2c})$ et de rayon $\frac{1}{2c}$.

7. $z = t^2 + it^4$,

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^4 \end{cases} \Rightarrow y = x^2.$$



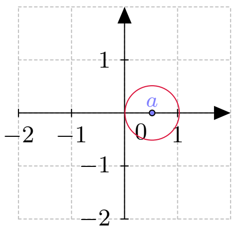
Ainsi l'ensemble de points est la partie de la parabole d'équation $y = x^2$ avec $x \geq 0$.

8.

$$z = \frac{1}{1+it} = \frac{1-it}{1+t^2} \Rightarrow x = \frac{1}{1+t^2}, \; y = \frac{-t}{1+t^2}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= \frac{1}{(1+t^2)^2}+\frac{t^2}{(1+t^2)^2}=\frac{1}{1+t^2}=x \\ &\Rightarrow\ x^2+y^2=x \\ &\Rightarrow\ (x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4} \end{aligned}$$



un cercle de centre $(\frac{1}{2},0)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

1.8 Exercices supplémentaires

Exercice 1.8. 1. Soient z_1, z_2, z_3 trois nombres complexes distincts ayant le même cube. Exprimer z_2 et z_3 en fonction de z_1.

2. Donner, sous forme exponentielle, les solutions dans $\mathbb{C}$ de :

$$z^6+(7-i)z^3-8-8i=0.$$

Indication : poser $Z=z^3$ et calculer $(9+i)^2$.

Exercice 1.9. En utilisant les nombres complexes, calculer $\cos(5\theta)$ et $\sin(5\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Exercice 1.10. 1. Déterminer les deux solutions complexes de $u^2=-2+2i\sqrt{3}$.

2. Résoudre

$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2=-2+2i\sqrt{3}.$$

On explicitera les solutions sous forme algébrique.

Exercice 1.11. 1. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que $\frac{1-z}{1-iz}$ soit réel.

2. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que $\frac{1-z}{1-iz}$ soit imaginaire pur.

Exercice 1.12. Déterminer l'ensemble des points du plan, d'affixe $z\in\mathbb{C}$, tels que :

$$1)\ \frac{2z-4}{z-i}\in\mathbb{R},\quad 2)\ |(1-i)z-3i|=3,\quad 3)\ \left|\frac{z-3}{z-5}\right|=1,$$

$$4)\ \left|\frac{z-3}{z-5}\right|\le\sqrt{2},\quad 5)\ \left|1-\frac{1}{z}\right|^2=2.$$

Exercice 1.13. Résoudre $(z-i)^n=(z+i)^n$, $n\in\mathbb{N}$. Quel est le nombre de solutions ?

Exercice 1.14. 1. montrer que $1 + e^{it} + \ldots + e^{int} = \frac{\sin\frac{(n+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} e^{\frac{nit}{2}}$.

2. En déduire la somme de $1 + \cos t + \cos(2t) + \ldots + \cos(nt)$.

Exercice 1.15. Pour $z \in \mathbb{C}$, démontrer les équivalences suivantes :

$$(a) \quad Re(z) > 0 \iff |z-1| < |z+1|$$
$$(b) \quad Im(z) > 0 \iff |z-i| < |z+i|.$$

Chapitre 2

Fonctions complexes

Sommaire

2.1 Variables et fonctions

Définition 2.1. *Soit $D \subset \mathbb{C}$. On appelle fonction d'une variable complexe une application*

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & D \to \mathbb{C} \\ & z \mapsto f(z) \end{aligned}$$

$z = x + iy \in D$, $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, *avec* $u(x,y)$ *et* $v(x,y)$ *sont respectivement partie réelle et imaginaire de* $f(z)$.

Exemple 2.1.

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & \mathbb{C}^* \to \mathbb{C} \\ & z \mapsto f(z) = \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2}.$$

On a $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ *et* $v(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$.

2.2 Limites et continuité

Définition 2.2. $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, |z-z_0| < \alpha \Rightarrow |f(z)-l)| < \varepsilon$.
On dit que f *est continue en* $z_0 \in D$ *si* $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.
f *est continue dans un domaine* D *si elle est continue en tout point de* D.

Remarque 2.1. *Soit* $l = a + ib$ *et* $z_0 = x_0 + iy_0$ *comme* $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ *donc*

- $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = l \iff \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = a$ *et* $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = b,$
- f *est continue en* $z_0 \iff \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u(x_0,y_0)$
  et $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v(x_0,y_0)$.

La limite n'existe pas si on peut trouver deux chemins (directions) où $z \to z_0$ *qui donnent deux valeurs différentes à la limite.*

Exemple 2.2. *1.* $\lim\limits_{z \to 0} \frac{z}{\overline{z}}$ *n'existe pas, car*
Si $z = x + i0$ *avec* $x \to 0$

$$\lim_{z \to 0} \frac{z}{\overline{z}} = \lim_{x \to 0} \frac{x+i0}{x-i0} = 1,$$

Si $z = 0 + iy$ *avec* $y \to 0$

$$\lim_{z \to 0} \frac{z}{\overline{z}} = \lim_{y \to 0} \frac{0+iy}{0-iy} = -1.$$

2. Les fonctions $z \mapsto z^2$, $z \mapsto \overline{z}$, $z \mapsto Re(z)$ *et* $z \mapsto Im(z)$ *sont des fonctions continues sur* $\mathbb{C}$.
3. Si f *est continue* $\iff Re(f), Im(f), \overline{f}$ *et* $|f|$ *sont continues.*
4. Les fonctions polynômes sont continues dans $\mathbb{C}$.
5. Les fonctions rationnelles sont continues dans leurs domaines de définition.

2.3 Fonctions usuelles

2.3.1 Fonction exponentielle

Définition 2.3. *On définit l'exponentielle d'un nombre complexe* $z = x + iy \in \mathbb{C}$ *par*

$$z \mapsto e^z = e^x(\cos(y) + i\sin(y)).$$

Propriétés 2.1. *1.* $|e^z| = e^x$ *et* $\arg(z) = y + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. $\forall z, z' \in \mathbb{C}$, $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.

3. $e^{z_1} = e^{z_2} \iff z_1 = z_2 + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. $\forall z \in \mathbb{C}$, $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$.

5. $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $e^{z+2k\pi i} = e^z$ *(La fonction* e^z *est périodique de période* $2\pi i$*).*

6. $\forall z \in \mathbb{C}$, $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Si $\alpha > 0$, par définition $\alpha^z = e^{z\ln\alpha}$ alors on a pour tout $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ et $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

- $(\alpha_1\alpha_2)^z = \alpha_1^z\alpha_2^z$.
- $\alpha^{z_1+z_2} = \alpha^{z_1}\alpha^{z_2}$.
- $\alpha^{z_1 z_2} = (\alpha^{z_1})^{z_2}$.

2.3.2 Fonctions trigonométriques et hyperboliques

A partir de l'exponentielle complexe, on définit les fonctions cosinus et sinus par

$$\begin{aligned} \cos(z) &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in \mathbb{C}, \\ \sin(z) &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

On déffinit aussi les fonctions hyperboliques

$$\begin{aligned} \cosh(z) &= \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in \mathbb{C}, \\ \sinh(z) &= \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Aussi on définit les fonctions

$$
\begin{aligned}
\tan(z) &= \frac{\sin(z)}{\cos(z)} = \frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}, \\
\cot(z) &= \frac{\cos(z)}{\sin(z)} = \frac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}, \\
\tanh(z) &= \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)} = \frac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{2k+1}{2}\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}, \\
\coth(z) &= \frac{\cosh(z)}{\sinh(z)} = \frac{e^{2z}+1}{e^{2z}-1}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \pi i\mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

Remarque 2.2. *1. On a les relations suivantes*

$$
\begin{aligned}
&\cos(z) = \cosh(iz), \qquad \sin(z) = -i\sinh(iz), \quad z \in \mathbb{C}, \\
&e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z), \quad z \in \mathbb{C}. \\
&\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1, \quad \cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1.
\end{aligned}
$$

2. Les fonctions $\cos(z)$ *et* $\sin(z)$ *sont* 2π*-périodiques.*

3. Les fonctions $\cosh(z)$ *et* $\sinh(z)$ *sont* $2\pi i$*-périodiques.*

2.4 Fonctions uniformes et multiformes

Une fonction f est appelée uniforme si à chaque valeurs de z ne correspond qu'une seule valeur de $f(z)$.

Une fonction f est appelée multiforme si à chaque valeurs de z correspond plusieurs valeurs de $f(z)$.

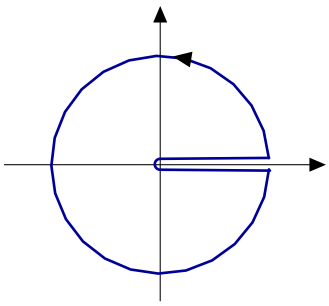
Une fonction multiforme peut être considérée comme un ensemble de fonctions uniformes, chaque élément de cet ensemble étant appelé une branche (ou une détermination) de la fonction.

Exemple 2.3. *1.* $z \mapsto z^2$ *est une fonction uniforme.*

2. La fonction $z \mapsto f(z) = \sqrt{z}$ *est une fonction multiforme, en effet ;*

$$
\begin{aligned}
&z = re^{i\theta} = re^{i(\theta+2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}, \\
&f(z) = \sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i(\frac{\theta+2k\pi}{2})} = \sqrt{r}e^{\frac{i\theta}{2}+k\pi i}, \quad k = 0, 1. \\
&f(z) = \pm\sqrt{r}e^{\frac{i\theta}{2}}.
\end{aligned}
$$

Si on fait un tour complet autour de l'origine on ne revient pas à la valeur initiale. On dit que 0 est un point de branchement de la fonction $z \mapsto f(z) = \sqrt{z}$. Pour obtenir les fonctions uniformes (les branches), on pratique "une coupure" dans le plan complexe allant de l'origine jusqu'à l'infini en suivant l'axe positif des x. Voir la figure suivante



2.4.1 Logarithme complexe

Définition 2.4. *Soient $z \in \mathbb{C}^*$ et $w \in \mathbb{C}$. Si $e^w = z$, on dira que le nombre complexe $w \in \mathbb{C}$ est un logarithme de $z \in \mathbb{C}^*$.*
Le logarithme complexe d'un nombre complexe z est donné par

$$\ln(z) = \ln|z| + i\arg(z) + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Le logarithme complexe est une fonction multiforme (infinité de branches).

Définition 2.5.

$$\ln(z) = \ln|z| + iArg(z), \quad -\pi < Arg(z) \leq \pi$$

est appelé logarithme principale de z ou détermination principale du logarithme.

Exemple 2.4.

$$\ln(1+i) = \ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}i + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2.4.2 Fonctions réciproques de cosinus, sinus et tangente

$$\begin{aligned}
\arcsin(z) &= -i\ln(iz + \sqrt{1-z^2}),\\
\arccos(z) &= -i\ln(z + i\sqrt{1-z^2}),\\
\arctan(z) &= \frac{i}{2}\ln\left(\frac{i+z}{i-z}\right).
\end{aligned}$$

2.4.3 Fonction puissance

$$f(z) = z^a$$

- Si $a \in \mathbb{Z}$, f est une fonction uniforme.
- Si $a \notin \mathbb{Z}$, f est une fonction multiforme.

$$f(z) = z^a = e^{a\ln(z)} = e^{a[\ln|z| + i\arg(z) + 2k\pi i]}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

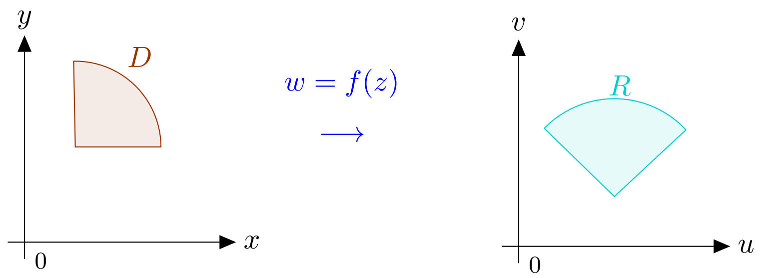
0 est un point de branchement.

2.5 Transformations complexes

Soient $z = x+iy$ et $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$. Soit D le domaine de définition des fonctions u et v. Le système des équations

$$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$$

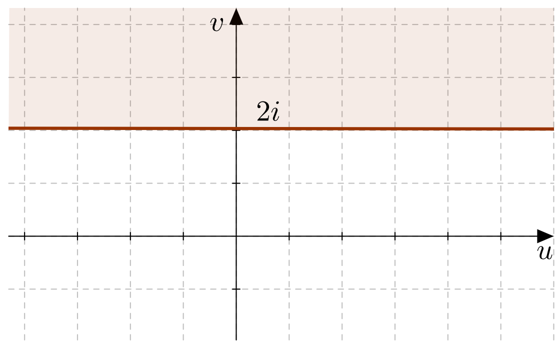
décrit une transformation ou une application de D dans le plan (x,y) vers le plan (u,v).



R est l'image de la région D par la fonction f.

Exemple 2.5. *1. Soit $f(z) = iz$. Trouver l'image du demi-plan $Re(z) \geq 2$ par f.*
Soit $z = x+iy \Rightarrow iz = -y+ix$
$Re(z) \geq 2 \Rightarrow x > 2$ et $y \in]-\infty, +\infty[$

$$\begin{cases} u = u(x,y) = -y \\ v = v(x,y) = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v \geq 2 \\ -\infty < u < +\infty \end{cases}$$

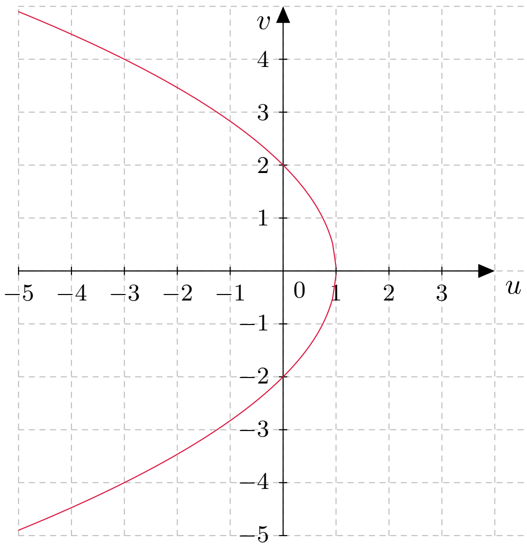


2. Trouver l'image de la droite $x = 1$ par la fonction $f(z) = z^2$.
$z = x+iy \rightarrow z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$

$$\begin{cases} u(x,y) = x^2 - y^2 \\ v(x,y) = 2xy \end{cases}$$

$$x = 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u(x,y) = 1 - y^2 \\ v(x,y) = 2y \end{array} \right. \quad -\infty < y < +\infty$$

$$y = \frac{v}{2} \Rightarrow u = 1 - \frac{v^2}{4} \Rightarrow v^2 = 4(1-u) \Rightarrow v = \pm 2\sqrt{1-u}$$



3. Fonction exponentielle
Trouver l'image de la région

$$\{z \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in]\alpha, \alpha + 2\pi[\}$$

Pour $f(z) = e^z$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} e^x \in]0, +\infty[\\ \arg e^z = y \in]\alpha, \alpha + 2\pi[. \end{array} \right.$$

4. Transformation homographique
Soit

$$w = \frac{az+b}{cz+d}$$

et $ad - cb \neq 0$, *on a*

$$\frac{az+b}{cz+d} = \left[\frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{ac^2}}{z + \frac{d}{c}} \right]$$

Posons $\alpha = \frac{bc-ad}{ac^2}$. *La transformation homographique se compose de*

i) Translation $z \mapsto z_2 = z + \frac{d}{c}$.
ii) Inversion $z_2 \mapsto z_3 = \frac{1}{z_2}$.
iii) Similitude $z_3 \mapsto z_4 = \alpha z_3$.
iv) Translation $z_4 \mapsto z_5 = z_4 + \frac{a}{c}$.

Définition 2.6. *Une transformation homographique est dite conforme si elle conserve les angles et leurs grandeurs et leurs sens.*

2.6 Fonctions holomorphes

Définition 2.7. *Soient $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine, $(x_0, y_0) \in D$ et $g : D \to \mathbb{C}$ une fonction. La dérivée partielle première par rapport à x (resp. par rapport à y) de g en (x_0, y_0) si elle existe, est définie par*

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{g(x, y_0) - g(x_0, y_0)}{x - x_0}. \\ (\textit{ resp. } \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) &= \lim_{y \to y_0} \frac{g(x_0, y) - g(x_0, y_0)}{y - y_0}.) \end{aligned}$$

Soit $h = x - x_0$ et $k = y - y_0$ alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{g(x_0 + h, y_0) - g(x_0, y_0)}{h}, \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) &= \lim_{k \to 0} \frac{g(x_0, y_0 + k) - g(x_0, y_0)}{k}. \end{aligned}$$

Définition 2.8. *Une fonction g est dite de classe C^1 sur D si elle admet des dérivées partielles premières par rapport à x et y continues sur D.*

Définition 2.9. *Soit D un domaine de $\mathbb{C}$ et $f : D \to \mathbb{C}$. f est dite dérivable (au sens complexe) au point $z_0 \in D$ si et seulement si la limite suivante*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe et finie. On note $f'(z_0)$.

Posons $h = z - z_0$ alors f est dérivable en $z_0 \iff \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$ existe et finie.

Exemple 2.6. *1.*

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ & z \mapsto f(z) = z^2. \end{aligned}$$

est dérivable dans $\mathbb{C}$.

2.

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ & z \mapsto f(z) = \overline{z}. \end{aligned}$$

n'est pas dérivable dans $\mathbb{C}$, en effet ;
Posons $z = x + iy$ et $z_0 = x_0 + iy_0$

$$\begin{aligned} \lim_{z \to z_0} \frac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0} &= \lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} \frac{(x - iy) - (x_0 - iy_0)}{(x + iy) - (x_0 + iy_0)} \\ &= \lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} \frac{(x - x_0) - i(y - y_0)}{(x - x_0) + i(y - y_0)}. \end{aligned}$$

Fixons $y = y_0$,

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1.$$

Fixons $x = x_0$,

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{-i(y - y_0)}{i(y - y_0)} = -1.$$

Définition 2.10. *f est dite holomorphe dans un domaine D si elle est dérivable en tout points de D.*

Définition 2.11. *Une fonction f est dite entière si elle est holomorphe sur le plan complexe tout entier.*

Soit $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$

Proposition 2.1. *Si f est dérivable en $z_0 = x_0 + iy_0$, alors les fonctions u et v admettent en (x_0, y_0) des dérivées partielles premières par rapport à x et y et on a*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \end{cases} \quad \textit{(Conditions de Cauchy-Riemann)}$$

Preuve. La dérivée de f au point z est donnée par

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

En supposant que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ et $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, alors on a

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) - iv(x, y)}{\Delta x + i\Delta y}$$

La limite doit exister indépendamment de la manière dont Δz tend vers 0. Ainsi, nous avons deux cas.

1) $\Delta z \to 0$ avec $\Delta y = 0$ et $\Delta z = \Delta x$. On a alors

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y) + i\left[v(x + \Delta x, y) - v(x, y)\right]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

2)$\Delta z \to 0$ avec $\Delta x = 0$ et $\Delta z = i\Delta y$. On a

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{i\Delta y}$$
$$= -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

il vient

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

Proposition 2.2. *Si les fonctions u et v admettent des dérivées partielles premières continues sur un voisinage de $z_0 = x_0 + iy_0$ et si ces dérivées satisfont aux relations de Cauchy-Riemann en $z = z_0$ alors f est dérivable en z_0.*

Preuve. Soit $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Les dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$ étant supposées continues

$$\begin{aligned} \Delta u &= u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) \\ &= u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y + \Delta y) + u(x, y + \Delta y) - u(x, y) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon_1\right)\Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon_2\right)\Delta y \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y. \end{aligned}$$

De même

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \eta_1 \Delta x + \eta_2 \Delta y.$$

D'ou

$$\begin{aligned} \Delta w = \Delta u + i\Delta v &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta y \\ &+ (\varepsilon_1 + i\eta_1)\Delta x + (\varepsilon_2 + i\eta_2)\Delta y. \end{aligned}$$

où $\varepsilon_1 + i\eta_1 \to 0$ et $\varepsilon_2 + i\eta_2 \to 0$ quand $\Delta x \to 0$. d'après les équations de Cauchy-Riemann

$$\begin{aligned} \Delta w &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x + \left(-\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta y + \varepsilon \Delta x + \eta \Delta y \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\Delta x + i\Delta y) + \varepsilon \Delta x + \eta \Delta y. \end{aligned}$$

D'où, en divisant par $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ et faisant tendre Δz vers 0, on voit que

$$\frac{\partial w}{\partial z} = f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

Exemple 2.7.

$$\begin{aligned} & f(z) = \overline{z} = x - iy \\ & u(x,y) = x, \quad \text{et } v(x,y) = -y \\ & \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = 1 \neq \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) = -1. \\ \Rightarrow \quad & f(z) = \overline{z} \text{ n'est pas dérivable.} \end{aligned}$$

Remarque 2.3. *Soit $z = x + iy$ alors*

$$x = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right], \\ \frac{\partial}{\partial \overline{z}} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right]. \end{aligned}$$

Proposition 2.3. *Soit f une fonction de classe C^1 sur un domaine D (en tant que fonction des deux variables x et y), alors*
f est dérivable au point $z_0 \in D \iff \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0.$

Exemple 2.8.

$$\begin{aligned} & f(z) = \overline{z} \\ & \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 1 \neq 0, \end{aligned}$$

ainsi f n'est pas dérivable.

Proposition 2.4. *Si f est une fonction dérivable à valeurs réelles dans un domaine D : $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ alors f est constante.*

2.7 Opérateurs différentiels complexes

On définit les opérateur ∇ et $\overline{\nabla}$ par

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} = 2\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$$

$$\overline{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y} = 2\frac{\partial}{\partial z}$$

Soit $F(x,y)$ une fonction de classe C^1 et $h(x,y) = u(x,y)+iv(x,y)$ une fonction complexe différentiable de x et y.
En coordonnées conjugées, on

$$F(x,y) = F(\frac{z+\overline{z}}{2}, \frac{z-\overline{z}}{2i}) = G(z,\overline{z}), \quad h(x,y) = B(z,\overline{z}).$$

1. **Gradient.** Nous définirons le gradient d'une fonction réelle (scalaire) par

$$grad \quad F = \nabla F = \frac{\partial F}{\partial x} + i\frac{\partial F}{\partial y} = 2\frac{\partial G}{\partial \overline{z}}$$

De la même façon, on définit le gradient d'une fonction complexe $h = u + iv$,(vecteur) comme

$$grad \quad h = \nabla h = (\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})(u+iv)$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + i(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}).$$

En particulier, si la fonction B est dérivable de z, alors $\frac{\partial B}{\partial \overline{z}} = 0$ et le gradient est nul (car les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifiées).
2. **Divergence.** Nous définirons la divergence d'une fonction complexe (vecteur) par

$$div \quad h = Re(\overline{\nabla} h) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 2Re\{\frac{\partial B}{\partial z}\}$$

3. **Rotationnel.** Nous définirons le rotationnel d'une fonction complexe par

$$rot \quad h = Im(\overline{\nabla} h) = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2Im\{\frac{\partial B}{\partial z}\}$$

4. **Laplacien.** On définit l'opérateur de Laplace (ou Laplacien) par

$$\nabla^2 = Re(\nabla\overline{\nabla}) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Définition 2.12. *Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine et $u : D \to \mathbb{C}$. La fonction u est harmonique dans D si elle y admet des dérivées partielles d'ordre deux continues qui y satisfont l'équation de Laplace :*

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Exemple 2.9. *La fonction $u : (x,y) \mapsto x^2 - y^2 + 2xy$ est harmonique. En effet,*

$$\nabla^2 u(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 2 - 2 = 0$$

2.8 Analycité

Définition 2.13. *Une fonction f est dite analytique en un point si elle est dérivable dans un voisinage de ce point.*

Exemple 2.10. $f : z \mapsto |z|^2$ *est dérivable seulement en* 0, *et elle n'est analytique en aucun point.*

$$f(z) = |z|^2 = z\overline{z} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) = z = 0 \iff z = 0.$$

Critère de non analycité

Si les conditions de Cauchy-Riemann ne sont pas vérifiées en un point $z \in D$ alors elle ne peut pas être analytique.

Définition 2.14. *Une fonction f est $\mathbb{C}$-analytique sur un domaine D si et seulement si*

$$\forall z_0 \in D, \quad \exists R > 0, \quad \exists \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C} \quad \textit{telles que}$$
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \; \textit{avec} \; |z - z_0| \leq R.$$

Remarque 2.4. *Soit D un domaine de $\mathbb{C}$ et $f = u + iv : D \to \mathbb{C}$. Si u et v vérifient les conditions de Cauchy-Riemann en tout point de D (i.e. f est holomorphe sur D) $\iff$ f est analytique dans D.*

Exemple 2.11. *1. $z \mapsto e^z$ est analytique sur $\mathbb{C}$ et $\frac{d}{dz}(e^z) = e^z$.*

2. La branche principale du logarithme complexe

$$z \mapsto \ln(z) = \ln|z| + iArg(z), \quad -\pi \leq Arg(z) < \pi.$$

est analytique dans $\mathbb{C} \setminus (]-\infty, 0[)$, et on a $\frac{d}{dz}(\ln(z)) = \frac{1}{z}$.

Proposition 2.5. *Soit D un domaine de $\mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ et f une fonction analytique sur D, on a alors l'équivalence entre les propriétés suivantes :*
1. f est nulle sur D,
2. f est nulle sur un voisinage de z_0,
3. $f^{(n)}(z_0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Corollaire 2.1. *Si f et g sont analytiques sur le domaine D et si $f = g$ sur un ouvert alors $f = g$ sur D.*

2.9 Exercices

Exercice 2.1. Calculer les limites suivantes si elle existent :

$$\lim_{z\to 0} \frac{\overline{z}^2 - z^2}{z} = 0, \quad \lim_{z\to 0} \frac{|z|^2}{z}, \quad \lim_{z\to 0} \frac{z}{|z|}, \quad \lim_{z\to -2i} \frac{(2z+3)(z-1)}{z^2 - 2z + 4}.$$

Solution

Calculer les limites suivantes si elle existent :

1. $\lim_{z\to 0} \frac{\overline{z}^2 - z^2}{z} = 0$, car si on pose $z = x + iy$ alors $z \to 0 \iff (x, y) \to (0, 0)$, et

$$\left|\frac{\overline{z}^2 - z^2}{z}\right| = \left|\frac{-4ixy}{x+iy}\right| = \frac{4|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{4|xy|}{\sqrt{y^2}} \leq 4|x| \to 0, \text{ quand } (x, y) \to (0, 0).$$

<u>Autre méthode :</u>
Si on pose $z = re^{i\theta}$ alors $z \to 0 \iff r \to 0$ et

$$\frac{\overline{z}^2 - z^2}{z} = \frac{r^2 e^{-2i\theta} - r^2 e^{2i\theta}}{re^{i\theta}} = r(e^{-3i\theta} - e^{i\theta}) \to 0, \text{ quand } r \to 0.$$

2.
$$\lim_{z\to 0} \frac{|z|^2}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{z\overline{z}}{z} = \lim_{z\to 0} \overline{z} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x - iy) = 0$$
.

<u>Autre méthode :</u>
Posons $z = re^{i\theta}$

$$\lim_{z\to 0} \frac{|z|^2}{z} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2}{re^{i\theta}} = \lim_{r\to 0} re^{-i\theta} = 0$$

3. $\lim_{z\to 0} \frac{z}{|z|}$ n'existe pas, en effet ;

$$\lim_{z\to 0} \frac{z}{|z|} = \lim_{z\to 0} \frac{x+iy}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

fixons $y = 0$,

$$\lim_{z\to 0} \frac{z}{|z|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|} \quad \text{n'existe pas car}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|x|} = 1, \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{|x|} = -1.$$

<u>Autre méthode :</u>
Posons $z = re^{i\theta}$

$$\lim_{z\to 0} \frac{z}{|z|} = \lim_{r\to 0} \frac{re^{i\theta}}{r} = \lim_{r\to 0} e^{i\theta}$$

ainsi, la limite dépend de θ donc elle n'existe pas.

4.

$$\lim_{z\to -2i} \frac{(2z+3)(z-1)}{z^2-2z+4} = \frac{1}{2} + \frac{11}{4}i.$$

Exercice 2.2. 1. Montrer que la fonction $u(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$ n'a pas de limite quand $(x,y)\to(0,0)$.
2. Montrer les formules suivantes

$$\cos(iz)=\cosh(z), \qquad \sin(iz)=i\sinh(z).$$

3. Montrer que $\sin(z)$ et $\cos(z)$ ne sont pas bornées dans $\mathbb{C}$.

Solution

1. La limite de $u(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$ quand $(x,y)\to(0,0)$ n'existe pas, en effet ; si on pose $y=x$ on obtient

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+x^2}=\frac{1}{2},$$

et si on pose $y=-x$ on obtient

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{x^2+x^2}=-\frac{1}{2}.$$

2.

$$\cos(iz)=\frac{e^{iiz}+e^{-iiz}}{2}=\frac{e^{-z}+e^{z}}{2}=\mathrm{ch}(z),$$
$$\sin(iz)=\frac{e^{iiz}-e^{-iiz}}{2i}=\frac{e^{-z}-e^{z}}{2i}=i\mathrm{sh}(z).$$

3.

$$\begin{aligned}\sin(z) &= \sin(x+iy)=\sin(x)\cos(iy)+\cos(x)\sin(iy)\\ &= \sin(x)\mathrm{ch}(y)+i\cos(x)\mathrm{sh}(y),\\ \cos(z) &= \cos(x+iy)=\cos(x)\cos(iy)-\sin(x)\sin(iy)\\ &= \cos(x)\mathrm{ch}(y)-i\sin(x)\mathrm{sh}(y).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\sin(z)| &= \sqrt{\sin^2(x)\mathrm{ch}^2(y)+\cos^2(x)\mathrm{sh}^2(y)}\\ &= \sqrt{\sin^2(x)(1+\mathrm{sh}^2(y))+\cos^2(x)\mathrm{sh}^2(y)}\\ &= \sqrt{\sin^2(x)+\mathrm{sh}^2(y)}\to+\infty,\ \text{quand } y\to+\infty,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\cos(z)| &= \sqrt{\cos^2(x)\mathrm{ch}^2(y)+\sin^2(x)\mathrm{sh}^2(y)}\\ &= \sqrt{\cos^2(x)(1+\mathrm{sh}^2(y))+\sin^2(x)\mathrm{sh}^2(y)}\\ &= \sqrt{\cos^2(x)+\mathrm{sh}^2(y)}\to+\infty,\ \text{quand } y\to+\infty.\end{aligned}$$

Ainsi les fonctions $\sin(z)$ et $\cos(z)$ ne sont pas bornées sur $\mathbb{C}$.

Exercice 2.3. Calculer

$$\mathbf{1)}\quad \sin(1-i),\quad \mathbf{2)}\quad \ln(-1),\quad \mathbf{3)}\quad 2^i,\quad \mathbf{4)}\quad \ln(1+i),\quad \mathbf{5)}\quad i^i,$$
$$\mathbf{6)}\quad \arcsin(i),\quad \mathbf{7)}\quad (\cos(i))^i,\quad \mathbf{8)}\quad (-1)^{\sqrt{2}}.$$

Solution

1.

$$\sin(1-i) = \sin(1)\cos(i) - \cos(1)\sin(i) = \sin(1)\text{ch}(1) - i\cos(1)\text{sh}(1).$$

2. Le logarithme complexe d'un nombre complexe z est donné par

$$\ln(z) = \ln|z| + i\arg(z) + 2k\pi i,\quad k \in \mathbb{Z},$$

donc

$$\ln(-1) = \ln|-1| + i\arg(-1) + 2k\pi i = (2k+1)\pi i,\quad k \in \mathbb{Z}.$$

3.

$$2^i = e^{i\ln 2} = \cos(\ln 2) + i\sin(\ln 2).$$

4.

$$\ln(1+i) = \ln|1+i| + i\arg(1+i) + 2k\pi i = \ln(\sqrt{2}) + i\frac{\pi}{4} + 2k\pi i,\quad k \in \mathbb{Z}.$$

5.

$$i^i = e^{i\ln(i)} = e^{i(\ln(|i|+i\arg(i)+2k\pi i)} = e^{-\frac{\pi}{2}-2k\pi},\quad k \in \mathbb{Z}.$$

6. On a $\arcsin(z) = -i\ln(iz + \sqrt{1-z^2})$, donc

$$\arcsin(i) = -i\ln(ii + \sqrt{1-i^2}) = -i\ln(-1+\sqrt{2}).$$

7.

$$(\cos(i))^i = (\text{ch}(1))^i = e^{i\ln(\text{ch}(1))} = \cos(\ln(\text{ch}(1))) + i\sin(\ln(\text{ch}(1))).$$

8.

$$(-1)^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\ln(-1)} = e^{\sqrt{2}(2k+1)\pi i},\quad k \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 2.4. Résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes

$$e^{2z+4} = 3\sqrt{3} + 3i,$$
$$z^2 = 3 + 4i,$$
$$e^{iz} - (1+i)e^{-iz} = i.$$

Solution

Résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes

1.

$$\begin{aligned} e^{2z+4} &= 3\sqrt{3}+3i \\ \Rightarrow 2z+4 &= \ln(3\sqrt{3}+3i) = \ln(|3\sqrt{3}+3i|) + i\arg(3\sqrt{3}+3i) + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow 2z+4 &= \ln(6) + i\frac{\pi}{6} + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow z &= \frac{1}{2}\ln(6) - 2 + i\frac{\pi}{12} + k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

2. Soit l'équation $z^2 = 3+4i$.
Posons $z = x+iy$, alors

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

en résolvant ce système on trouve $z = \pm(2+i)$.
Autre méthode :

$$z^2 = 3+4i = 4-1+4i = 2^2 + i^2 + 2.2.i = (2+i)^2 \Rightarrow z = \pm(2+i).$$

3. Soit l'équation $e^{iz} - (1+i)e^{-iz} = i$.

$$e^{iz} - (1+i)e^{-iz} = i \iff e^{2iz} - ie^{iz} - (1+i) = 0,$$

posons $X = e^{iz}$, on obtient

$$\begin{aligned} & X^2 - iX - (1+i) = 0, \\ & \Delta = 3+4i, \\ & X_1 = 1+i, \ X_2 = -1 \\ \Rightarrow \quad & e^{iz} = 1+i \ \vee \ e^{iz} = -1, \\ \Rightarrow \quad & iz = \ln(1+i) \ \vee \ iz = \ln(-1), \\ \Rightarrow \quad & iz = \ln(\sqrt{2}) + i\frac{\pi}{4} + 2k\pi i \ \vee \ iz = (2k+1)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \Rightarrow \quad & z = -i\ln(\sqrt{2}) + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \ \vee \ z = (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Exercice 2.5. Montrer que

$$\arctan(z) = \frac{i}{2}[\ln(i+z) - \ln(i-z)].$$

Solution

Montrons que $\arctan(z) = \frac{i}{2}[\ln(i+z) - \ln(i-z)]$, on a

$$\begin{aligned}
z = \tan(w) &= \frac{\sin(w)}{\cos(w)} = \frac{\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}}{\frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}} = \frac{1}{i}\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{e^{iw}+e^{-iw}} \\
\Rightarrow &\quad iz(e^{iw}+e^{-iw}) = e^{iw} - e^{-iw} \\
\Rightarrow &\quad e^{iw}(iz-1) = e^{-iw}(-iz-1) \\
\Rightarrow &\quad e^{iw}(z+i) = e^{-iw}(-z+i) \\
\Rightarrow &\quad e^{2iw} = \frac{i-z}{i+z} \\
\Rightarrow &\quad 2iw = \ln\left(\frac{i-z}{i+z}\right) \\
\Rightarrow &\quad 2iw = \ln(i-z) - \ln(i+z) \\
\Rightarrow &\quad w = \frac{1}{2i}[\ln(i-z) - \ln(i+z)] \\
\Rightarrow &\quad w = \frac{i}{2}[\ln(i+z) - \ln(i-z)].
\end{aligned}$$

Exercice 2.6. Indiquer parmi les fonctions suivantes celles qui sont holomorphes

$$f(z) = Im(z), \qquad f(z) = e^{\overline{z}}, \qquad f(z) = z^2 + 5iz + 3 - i,$$
$$f(z) = (Re(z))^2.$$

Solution

1.

$$f(z) = Im(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$$
$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) = -\frac{1}{2i} \neq 0 \ \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Donc f n'est pas holomorphe sur $\mathbb{C}$.

2.

$$f(z) = e^{\overline{z}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) = e^{\overline{z}} \neq 0 \ \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Donc f n'est pas holomorphe sur $\mathbb{C}$.

3.

$$f(z) = z^2 + 5iz + 3 - i$$
$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) = 0 \ \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

De plus f est différentiable (de classe C^1) sur $\mathbb{C}$, ainsi f est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Autre méthode :
posons $z = x + iy$, donc

$$\begin{aligned} f(z) &= z^2 + 5iz + 3 - i \\ &= (x+iy)^2 + 5i(x+iy) + 3 - i \\ &= x^2 - y^2 + 2ixy + 5ix - 5y + 3 - i \\ \Rightarrow & \quad u(x,y) = x^2 - y^2 - 5y + 3, \text{ et } v(x,y) = 2xy + 5x - 1. \end{aligned}$$

Les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifiées car :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2x \text{ et } \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 2x, \\ &\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -2y - 5 \text{ et } \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 2y + 5, \end{aligned}$$

De plus u et v sont différentiables (de classe C^1) sur $\mathbb{R}^2$, ainsi f est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

4.

$$\begin{aligned} &f(z) = (Re(z))^2 = \left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right)^2 \\ &\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) = \frac{1}{2}(z+\overline{z}) = Re(z). \end{aligned}$$

Donc f n'est pas holomorphe sauf aux points z tels que $Re(z) = 0$.
Autre méthode :
Posons $z = x + iy$, donc

$$\begin{aligned} & f(z) = (Re(z))^2 = x^2 \\ \Rightarrow \quad & u(x,y) = x^2, \text{ et } v(x,y) = 0. \end{aligned}$$

Les conditions de Cauchy-Riemann :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2x \text{ et } \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 0, \\ &\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0 \text{ et } \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 0, \end{aligned}$$

Donc f n'est holomorphe qu' aux points z tels que $Re(z) = 0$.

Exercice 2.7. Indiquer parmi les fonctions suivantes celles qui sont analytiques

$$f(z) = ze^z, \qquad f(z) = \overline{z}z^2, \qquad f(z) = \sin(3z).$$

Solution

1. Soit la fonction $f(z) = ze^z$,

$$
\begin{aligned}
& f(z) = ze^z = (x+iy)e^{x+iy} = (x+iy)e^x(\cos y + i\sin y) \\
\Rightarrow \quad & u(x,y) = e^x(x\cos y - y\sin y), \text{ et } v(x,y) = e^x(y\cos y + x\sin y).
\end{aligned}
$$

Les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifiées $\forall z \in \mathbb{C}$ car :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= e^x((x+1)\cos y - y\sin y), \\
\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) &= e^x((x+1)\cos y - y\sin y), \\
\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= e^x(-(x+1)\sin y - y\cos y), \\
\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) &= e^x((x+1)\sin y + y\cos y).
\end{aligned}
$$

Donc f est analytique sur $\mathbb{C}$.

2. Soit la fonction $f(z) = \overline{z}z^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) = z^2.$$

f n'est dérivable qu'au point $z = 0$, donc f n'est pas analytique en aucun point.

3. Soit la fonction $f(z) = \sin(3z)$,

Posons $z = x + iy$, donc

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \sin(3z) = \sin(3x+3iy) = \sin(3x)\cos(3iy) + \cos(3x)\sin(3iy) \\
&= \sin(3x)\text{ch}(3y) + i\cos(3x)\text{sh}(3y) \\
\Rightarrow \quad & u(x,y) = \sin(3x)\text{ch}(3y), \text{ et } v(x,y) = \cos(3x)\text{sh}(3y).
\end{aligned}
$$

Les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifiées $\forall z \in \mathbb{C}$ car :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= 3\cos(3x)\text{ch}(3y), \\
\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) &= 3\cos(3x)\text{ch}(3y), \\
\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= 3\sin(3x)\text{sh}(3y), \\
\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) &= -3\sin(3x)\text{sh}(3y).
\end{aligned}
$$

Donc f est analytique sur $\mathbb{C}$.

Exercice 2.8. Déterminer les constantes réelles a, b et c telles que la fonction $f(z) = x + ay + i(bx + cy)$ soit holomorphe dans $\mathbb{C}$.

Solution

Posons $u(x,y) = x + ay$ et $v(x,y) = bx + cy$. Pour que f soit holomorphe il faut que les fonctions u et v vérifient les conditions de Cauchy-Riemann :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 1, & \frac{\partial v}{\partial y} &= c \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= a, & \frac{\partial v}{\partial x} &= b, \end{aligned}$$

ainsi

$$c = 1, \text{ et } a = -b.$$

Exercice 2.9. Soit la fonction $u : (x,y) \mapsto 2xy$, trouver une fonction v telle que la fonction $f = u + iv$ soit holomorphe sur $\mathbb{C}$. Exprimer $f(z)$ à l'aide de la variable z.

Solution

Posons $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$,
f est holomorphe donc les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifiées :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= 2y = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= 2x = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v}{\partial y} = 2y \Rightarrow v(x,y) = y^2 + C(x), \\ \Rightarrow \quad & \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = C'(x) \end{aligned}$$

D'autre part

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -2x.$$

Ce qui implique que

$$C(x) = -x^2 + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Ainsi

$$v(x,y) = y^2 - x^2 + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

De plus on a

$$f(z) = 2xy + i(y^2 - x^2) + c = -i(x+iy)^2 + c = -iz^2 + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2.10. 1. Montrer que la fonction

$$\boldsymbol{U(x,y) = x^2 - y^2 - 2xy - 2x + 3y}$$

est harmonique.
2. Trouver une fonction $V(x,y)$ telle que la fonction complexe $f(z) = U(x,y) + i\,V(x,y)$ soit holomorphe.

Solution

1. On a

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = 2x - 2y - 2, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,y) = 2 \\
& \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = -2y - 2x + 3, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(x,y) = -2 \\
\Rightarrow \quad & \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(x,y) = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi la fonction U est harmonique.
2. Les conditions de Cauchy-Riemann

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = 2x - 2y - 2 = \frac{\partial V}{\partial y}(x,y) \\
\Rightarrow \quad & V(x,y) = 2xy - y^2 - 2y + C(x) \\
\Rightarrow \quad & \frac{\partial V}{\partial x}(x,y) = 2y + C'(x)
\end{aligned}$$

d'autre part on a

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = -2y - 2x + 3 = -\frac{\partial V}{\partial x}(x,y) \\
\Rightarrow \quad & \frac{\partial V}{\partial x}(x,y) = 2y + 2x - 3
\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$C'(x) = 2x - 3$$

d'où

$$C(x) = x^2 - 3x + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

et par suite

$$V(x,y) = 2xy - y^2 - 2y + x^2 - 3x + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

2.10 Exercices supplémentaires

Exercice 2.11. **Montrer que si l'on passe des coordonnées cartésiennes (x, y) aux coordonnées polaires (r, θ), les conditions de Cauchy-Riemann prennent la forme $\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial Q}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}$.**

Exercice 2.12. **Montrer que le module et l'argument de la fonction analytique $f(z) = R(x, y)\exp i\Phi(x, y)$ sont liés par les relations $\frac{\partial R}{\partial x} = R\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ et $\frac{\partial R}{\partial y} = -R\frac{\partial \Phi}{\partial x}$.**

Exercice 2.13. **Trouver la fonction analytique $w = f(z)$ si l'on connait sa partie réelle $u = 2(\cosh x \sin y - xy)$ et compte tenu de la condition $f(0) = 0$.**

Exercice 2.14. **Quelles sont les conditions nécéssaires pour que le trinôme $u = ax^2 + 2bxy + cy^2$ soit une fonction harmonique ?**

Exercice 2.15. **Trouver toutes les fonctions harmoniques de la forme $u = f\left(x^2 + y^2\right)$ qui diffèrent d'une constante.**

Chapitre 3

Intégration complexe

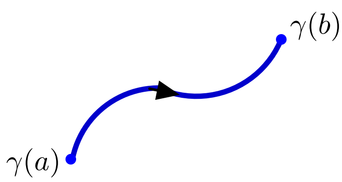
Sommaire

3.1 Intégrales curvilignes complexes

Définition 3.1. *Soit $D \subset \mathbb{C}$ un domaine. On appelle arc dans D une application dérivable*

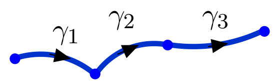
$$\begin{array}{rll} \gamma : & [a,b] & \to D \\ & t & \mapsto \gamma(t) \end{array}$$

$\gamma(a)$ et $\gamma(b)$ sont appelés l'origine et l'extrimité de l'arc γ respectivement.



Définition 3.2. *La réunion d'arcs est une application dérivable par morçeaux dite chemin :*

$$\gamma = \cup_{i=1}^{n} \gamma_i$$

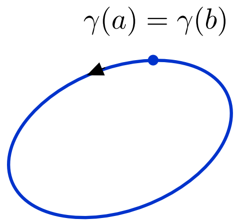


On décrit les points de l'arc au moyen de l'équation $\gamma(t) = z(t) = x(t)+iy(t)$ avec $a \leq t \leq b$.

Exemple 3.1. *les segments orirntés $[z_0, z_1]$ sont des arcs :*

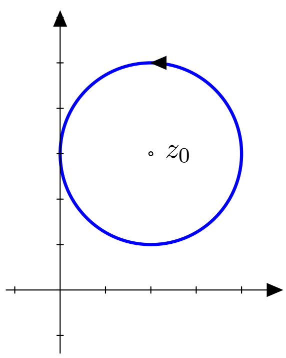
$$\gamma(t) = (1-t)z_0 + tz_1 = z_0 + t(z_1 - z_0), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Définition 3.3. *Un arc γ est dit fermé (Lacet ou contour) si son origine coïncide avec son extrimité. i.e. $\gamma(a) = \gamma(b)$.*



Exemple 3.2. *Le cercle de centre z_0 et de rayon r est un chemin fermé*

$$\gamma(t) = z_0 + re^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$



Définition 3.4. *Un arc est dit simple s'il ne coupe pas lui même.*

Définition 3.5. *Une courbe simple et fermé est dite une courbe de Jordan .*

Définition 3.6. *Soit $z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$, une paramétrisation qui décrit un arc γ. Si $x(t)$ et $y(t)$ sont de classe C^1 sur $[a, b]$ alors γ est appelée arc différentiable.*

La longueur de l'arc γ est

$$L(\gamma) = \int_a^b |z'(t)| dt$$

où $|z'(t)| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}$.
La longueur ne dépend pas de la paramétrisation.

Exemple 3.3. $z(t) = re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

$$\begin{aligned} z(t) &= re^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \\ x(t) &= r\cos(t) \Rightarrow x'(t) = -r\sin(t) \\ y(t) &= r\sin(t) \Rightarrow y'(t) = r\cos(t) \\ L(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r\sin(t))^2 + (r\cos(t))^2} dt = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r. \end{aligned}$$

Définition 3.7. *Soit $f(t) = u(t) + iv(t)$, $a \leq t \leq b$, avec u et v deux fonctions réelles continues. On définit l'intégrale de f de a à b par*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t) + i\int_a^b v(t)dt.$$

Exemple 3.4. $\int_0^1 (2t+i)^2 dt = \int_0^1 (4t^2 - 1)dt + i\int_0^1 4tdt = \frac{1}{3} + 2i.$

Propriétés 3.1. *1.* $\int_a^b kf(t)dt = k\int_a^b f(t)dt$, $k \in \mathbb{C}$.

2. $\int_a^b (f(t) + g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$.
3. $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$.
4. $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$.

Définition 3.8. *Soit $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et $\gamma : [a, b] \to D$ un chemin. L'intégrale curviligne de f sur le chemin γ est définie par*

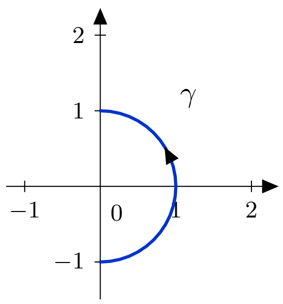
$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Exemple 3.5.

$$\int_\gamma \bar{z}dz,$$

$$\gamma(t) = e^{it}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \quad \gamma'(t) = ie^{it},$$

$$\int_\gamma \bar{z}dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-it}ie^{it} = i\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt = i\pi.$$



Remarque 3.1. *1. Si $\gamma = \cup_{i=1}^n \gamma_i$ alors*

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f(z)dz.$$

2. $\int_{\gamma^-} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz$ *où* γ^- *est le chemin opposé (inverse) de* γ *:*

$$\begin{aligned} \gamma^- : \quad [a,b] \quad &\to D \\ t \quad &\mapsto \gamma^-(t) = \gamma(a+b-t). \end{aligned}$$

On a $\gamma^-(a) = \gamma(b)$ *et* $\gamma^-(b) = \gamma(a)$.

3.
$$\left| \int_\gamma f(z)dz \right| \leq M.L(\gamma), \quad \text{où} \ \ M = \sup_{z\in\gamma} |f(z)|.$$

Théorème 3.1 (Primitives)**.** *Soit* $D \subset \mathbb{C}$ *domaine et* $f : D \Rightarrow \mathbb{C}$ *continue alors* f *admet une primitive dans* $D \iff \forall \gamma \subset D$ *chemin fermé* $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

Exemple 3.6. *1.* $\int_\gamma \frac{dz}{z}$ *où* γ *est le cercle de centre* 0 *et de rayon* r.

$\gamma(t) = re^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$

$\gamma'(t) = ire^{it},$

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_o^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}} dt = i \int_o^{2\pi} dt = 2\pi i \neq 0,$$

donc $f(z) = \frac{1}{z}$ *n'admet pas de primitive dans* $\mathbb{C}^*$.

2. $\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0}$ *où* γ *est le cercle de centre* z_0 *et de rayon* r.

$\gamma(t) = z_0 + re^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$

$\gamma'(t) = ire^{it},$

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0} = \int_o^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}} dt = i \int_o^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

3. $\int_\gamma \frac{dz}{(z-z_0)^n}, \quad n \neq 1$ *où* γ *est le cercle de centre* z_0 *et de rayon* r.

$\gamma(t) = z_0 + re^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

$\gamma'(t) = ire^{it}$

$$\begin{aligned} \int_\gamma \frac{dz}{(z-z_0)^n} &= \int_o^{2\pi} \frac{ire^{it}}{(re^{it})^n} dt = ir^{-n+1} \int_o^{2\pi} e^{i(1-n)t} dt = \frac{r^{-n+1}}{1-n} \left[e^{i(1-n)t} \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{r^{-n+1}}{1-n} \left[e^{i(1-n)2\pi} - 1 \right] = 0 \end{aligned}$$

3.2 Lien entre intégrales curvilignes et intégrales doubles

Théorème 3.2 (Théorème de Green)**.** *Soit* D *une partie de* $\mathbb{R}^2$ *bornée par un chemin simple et fermé* γ *orienté positivement par rapport à* D*. Soient* u *et* v *deux fonctions de classe* $\mathcal{C}^1$ *dans* D*. Alors on a*

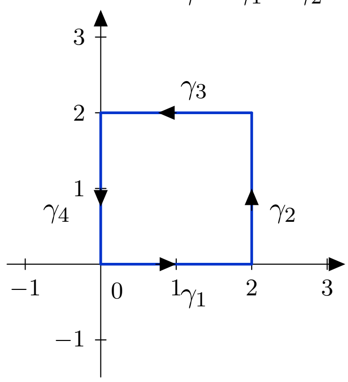
$$\iint_D \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy = \int_\gamma udx + vdy.$$

Exemple 3.7. *Vérifier la formule de Green pour l'intégrale*

$$\int_\gamma (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - x^2 y)dy,$$

où γ *est le carré de sommets* $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$ *et* $(0,2)$.

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$$



$$\int_\gamma = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4}.$$

Sur γ_1 $y = 0$, $dy = 0$, *et* $0 \leq x \leq 2$,

$$\int_{\gamma_1} (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - x^2 y)dy = \int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3},$$

Sur γ_2 $x = 2$, $dx = 0$, *et* $0 \leq y \leq 2$,

$$\int_{\gamma_2} (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - x^2 y)dy = \int_0^2 (y^2 - 4y)dy = \frac{8}{3} - 8,$$

Sur γ_3 $y = 2$, $dy = 0$, *et* $0 \leq x \leq 2$,

$$\int_{\gamma_3} (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - x^2 y)dy = \int_2^0 (x^2 - 4x)dx = -\frac{8}{3} + 8,$$

Sur γ_4 $x = 0$, $dx = 0$, *et* $0 \leq y \leq 2$,

$$\int_{\gamma_4} (y^2 - 2xy)dx + (y^2 - x^2 y)dy = \int_2^0 y^2 dy = -\frac{8}{3},$$

donc

$$\int_\gamma (y^2 - 2xy)dx + (y^2 - x^2 y)dy = \frac{8}{3} + \frac{8}{3} - 8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} = 0.$$

En utilisant la formule de Green on a

$$\int_\gamma (y^2 - 2xy)dx + (y^2 - x^2 y)dy = \int_0^2 \int_0^2 (-2xy + 2x)dxdy = 2\int_0^2 xdx \int_0^2 (-y+1)dy$$

$$= 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 \left[-\frac{y^2}{2} + y\right]_0^2 = 2.2(-2+2) = 0.$$

3.3 Intégration des fonctions analytiques

Définition 3.9. *Soit D un domaine de $\mathbb{C}$, le bord (la frontière) δD de D se répartira comme suit :*

- *Une courbe extérieure.*
- *$k-1$ courbes intérieures ($k \geq 1$).*

Lorsque $k=1$ on dit que le domaine D est simplement connexe.
Lorsque $k>1$ on dit que le domaine D est multiplement connexe.

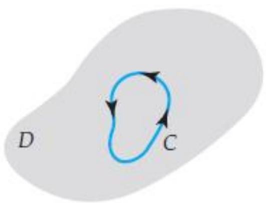


FIGURE 3.1 – Simplement connexe

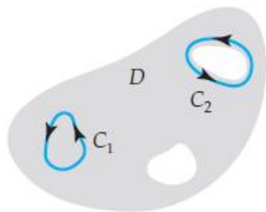


FIGURE 3.2 – Multiplement connexe

Remarque 3.2. *Un domaine simplement connexe ne comporte aucun trou.*

En 1825, le mathématicien Louis-Augustin Cauchy prouve l'un des théorèmes les plus importants de l'analyse complexe.

Théorème 3.3 (Théorème de Cauchy)**.** *Soit f une fonction holomorphe sur un domaine simplement connexe D avec f' soit continue dans D, alors*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0,$$

où γ est un chemin fermé (Lacet) quelconque inclus dans D.

La démonstration est une conséquence directe du théorème de Green (théorème 3.2) et des conditions de Cauchy-Rieman (proposition 2.1).

Preuve. Supposons que f' est continue dans le domaine D. Alors si $f = u + iv$, on sait que les dérivées partielles sont continues. D'autre part, on a

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma [u(x,y) + iv(x,y)]\, d(x+iy)$$

$$= \int_\gamma u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_\gamma v(x,y)dx + u(x,y)dy$$

$$= \int\int_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy + i\int\int_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy$$

Puisque la fonction f est analytique dans D, alors les fonctions u et v vérifient les conditions de Cauchy-Rieman dans tout point de D. Ceci implique que

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

En 1883, le mathématicien Edouard Goursat prouve que la condition que f' soit continue n'est pas nécessaire.

Exemple 3.8. *Soit où γ un chemin fermé dans $\mathbb{C}$ alors*

$$\int_{\gamma} e^z dz = 0$$

car la fonction $z \mapsto e^z$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$.

Proposition 3.1. *Soit f une fonction holomorphe sur un domaine simplement connexe D. soient γ_1 et γ_2 deux chemins dans D ayant les mêmes extrimités, alors*

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

L'intégrale dépend des extrimités.

Proposition 3.2. *Soit f une fonction holomorphe sur un domaine simplement connexe D, alors f admet une primitive F dans D, et pour tout chemin $\gamma : [a, b] \to D$ on a*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

En particulier, si γ est fermé ($\gamma(a) = \gamma(b)$) alors

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

Conséquence 3.1. *Soit $D \subset \mathbb{C}$ un domaine simplement connexe borné par un chemin orienté positivement par rapport à D.*

Si f est holomorphe dans D et continue sur $D \cup \delta D$ alors

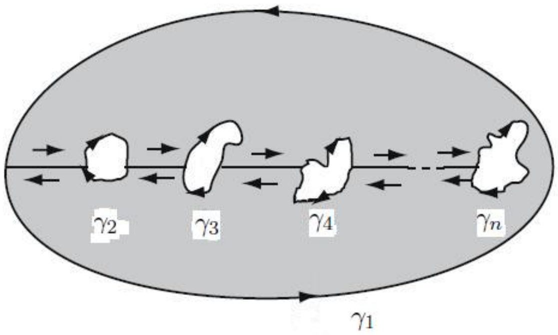
$$\int_{\delta D} f(z)dz = 0.$$

Théorème 3.4 (Généralisation du théorème de Cauchy)**.** *Soit $D \subset \mathbb{C}$ un domaine borné par un nombre fini de chemins orientés positivement par rapport à D : $\delta D = \gamma_1 \cup (\cup_{i=2}^{n} \gamma_i)$.*
Si f est holomorphe dans D et continue sur $D \cup \delta D$ alors

$$\int_{\delta D} f(z)dz = 0,$$

et on a

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \sum_{i=2}^{n} \int_{\gamma_i} f(z)dz.$$



3.4 Formule intégrale de Cauchy

Théorème 3.5 (Formule intégrale de Cauchy (F. I. C.))**.** *Soient f une fonction holomorphe sur un domaine simplement connexe D, et $z_0 \in D$. Alors on a pour tout chemin simple et fermé γ orienté positivement par rapport à D et entourant z_0*

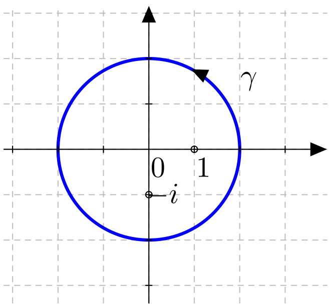
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Exemple 3.9. *1. $\int_{\gamma} \frac{e^z}{z-1} dz$ et γ : le cercle de centre 0 et de rayon 2.*

$$f(z) = e^z, \quad z_0 = 1, \quad f(1) = e,$$
$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z-1} dz = 2\pi i f(1) = 2\pi i e.$$

2. 1. $\int_{\gamma} \frac{z^2-4z+4}{z+i} dz$ et γ : le cercle de centre 0 et de rayon 2.

$$f(z) = z^2 - 4z + 4, \quad z_0 = -i, \quad f(-i) = 3 + 4i,$$
$$\int_{\gamma} \frac{z^2 - 4z + 4}{z + i} dz = 2\pi i f(-i) = 2\pi i(3 + 4i).$$



Théorème 3.6 (F. I. C. pour les dérivées d'ordre supérieur)**.** *Soient f une fonction holomorphe sur un domaine simplement connexe D, et $z_0 \in D$. Alors on a pour tout chemin simple et fermé γ orienté positivement par rapport à D et entourant z_0*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz.$$

Exemple 3.10. *1.* $\int_\gamma \frac{z+1}{z^4+2iz^3}dz$ *et* γ *: le cercle de centre* 0 *et de rayon* 1.

$$\frac{z+1}{z^4+2iz^3} = \frac{z+1}{z^3(z+2i)} = \frac{\frac{z+1}{z+2i}}{z^3}$$

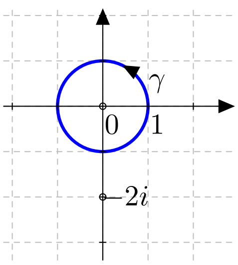
$-2i$ *est à l'extérieur du cercle* γ *donc on pose*

$$f(z) = \frac{z+1}{z+2i}, \quad z_0 = 0,$$

$$\int_\gamma \frac{\frac{z+1}{z+2i}}{z^3}dz = \frac{2\pi i}{2!}f''(0),$$

$$f''(z) = \frac{2-4i}{(z+2i)^3} \Rightarrow f''(0) = \frac{2+i}{4},$$

$$\int_\gamma \frac{z+1}{z^4+2iz^3}dz = \frac{2\pi i}{2!}\frac{2+i}{4} = -\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}i.$$



3.5 Conséquences et applications

Théorème 3.7 (Théorème de Moréra)**.** *Soit f une fonction continue dans un domaine simplement connexe D. Si pour tout chemin fermé γ dans D, $\int_\gamma f(z)dz = 0$ alors f est holomorphe dans D.*

Preuve. La condition $\forall\gamma \subset D$, $\int_\gamma f(z)dz = 0$ est équivalente à l'existence d'une primitive de f dans D, à savoir $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(s)ds$, z_0 est fixé arbitrairement dans D i.e. $\forall z \in D$, $F'(z) = f(z)$ donc F est holomorphe dans D, ainsi F est $\mathbb{C}$-analytique dans D ce qui implique que f est $\mathbb{C}$-analytique dans D.

Théorème 3.8 (Théorème de Liouville)**.** *Si f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et $|f| \leq M$ alors f est constante.*

Preuve. Soit $z \in \mathbb{C}$,

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(s)}{(s-z)^{n+1}}dz$$

$$\left|f^{(n)}(z)\right| = \frac{n!}{2\pi}\left|\int_\gamma \frac{f(s)}{(s-z)^{n+1}}dz\right| \leq \frac{n!}{2\pi}\frac{M}{r^{n+1}}2\pi r$$

γ est un cercle $|s-z| = r$, alors

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \leq \frac{n!}{r^n}M,$$

pour $n = 1$, on a

$$\left|f'(z)\right| \leq \frac{M}{r},$$

si $r \to +\infty$, alors $f'(z) = 0$. Donc f est constante.

Théorème 3.9 (Théorème de d'Alembert)**.** *Si $P(z)$ est un polynôme de degré n, alors l'équation $P(z) = 0$ admet n racines dans $\mathbb{C}$.*

Preuve. Posons $P(z) = a_n z^n + \ldots a_1 z + a_0$ où $n > 0$ et $a_n \neq 0$.

Supposons par l'absurde que $\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) \neq 0$ alors la fonction $h(z) = \frac{1}{P(z)}$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$, de plus

$$\begin{aligned} h(z) &= \frac{1}{a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0} \\ &= \frac{1}{z^n}\frac{1}{a_n + a_{n-1}z^{-1} + \ldots + +a_0 z^{-n}} \to 0, \text{ quand } z \to +\infty \end{aligned}$$

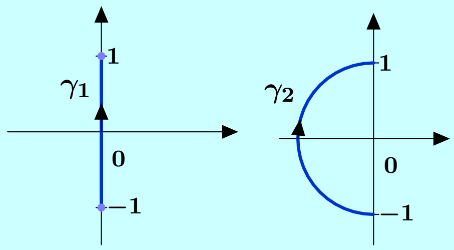
i.e. $\forall\varepsilon > 0$, $\exists R > 0$ tel que $|z| > R \Rightarrow |h(z)| < \varepsilon$, cela signifie que $h(z)$ est bornée dans $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, R)$, d'autre part h est continue dans $\overline{D}(0, R)$, elle est donc bornée dans $\overline{D}(0, R)$, et par suite h est bornée sur $\mathbb{C}$ donc d'après le théorème de Liouville $h(z)$ est constante donc $P(z)$ est constante(contradiction).
Donc $P(z)$ admet au moins une racine $z_1 \in \mathbb{C}$, d'où $P(z)$ peut s'écrire $P(z) = (z - z_1)Q(z)$, avec $degQ(z) = n - 1$, ainsi on peut montrer sans peine que $P(z)$ admet n racines dans $\mathbb{C}$.

Théorème 3.10 (Principe du maximum)**.** *Soit D un domaine de $\mathbb{C}$, toute fonction holomorphe dans D possédant un maximun local dans D est constante sur D.*

3.6 Exercices

Exercice 3.1. Calculer les intégrales suivantes

$$1)\ \int_{\gamma_i} \overline{z}dz, \quad \text{où}$$



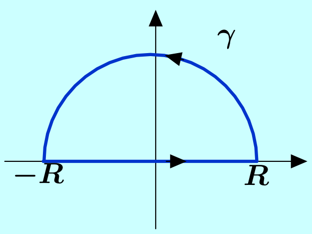
$$2)\ \int_{\gamma} \overline{z}dz, \qquad \gamma \text{ est le segment de droite } [0, 2+i]$$

$$3)\ \int_{\gamma} \frac{1}{z}dz, \qquad \gamma \text{ est le segment de droite } [1, 2+i].$$

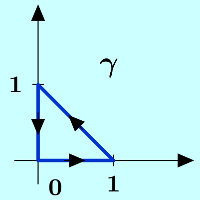
$$4)\ \int_{\gamma} \frac{z}{(1+i-z)^2}dz, \qquad \gamma \text{ est le cercle } |z-(1+i)| = 2.$$

$$5)\ \int_{\gamma} Re(z)dz, \qquad \gamma \text{ est le cercle } |z| = 1.$$

$$6)\ \int_{\gamma} z\overline{z}dz,$$



7) $\int_\gamma |z^2|dz$,



Solution

1.

$$
\begin{aligned}
a) \qquad & \gamma_1(t) = it, \qquad -1 \leq t \leq 1, \\
& \gamma_1'(t) = i, \\
& \int_{\gamma_1} \overline{z} dz = \int_{-1}^{1} \overline{\gamma_1(t)} \gamma_1'(t) dt = \int_{-1}^{1} (-it)(i) dt = \int_{-1}^{1} t dt = [\frac{t^2}{2}]_{-1}^{1} = 0, \\
b) \qquad & \gamma_2(t) = e^{it}, \qquad -\frac{3\pi}{2} \leq t \leq -\frac{\pi}{2}, \\
& \gamma_2'(t) = ie^{it}, \\
& \int_{\gamma_2} \overline{z} dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{3\pi}{2}} \overline{\gamma_2(t)} \gamma_2'(t) dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{3\pi}{2}} e^{-it} i e^{it} dt = i \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{3\pi}{2}} dt = -i\pi.
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
& \gamma(t) = z_0(1-t) + z_1 t, \qquad 0 \leq t \leq 1, \\
& z_0 = 0, \;\; z_1 = 2+i, \;\; \text{ainsi} \;\; \gamma(t) = (2+i)t, \\
& \gamma'(t) = 2+i, \\
& \int_{\gamma} \overline{z} dz = \int_0^1 \overline{\gamma(t)} \gamma'(t) dt = \int_0^1 (2-i)t(2+i) dt = 5 \int_0^1 t dt = 5[\frac{t^2}{2}]_0^1 = \frac{5}{2}.
\end{aligned}
$$

3.

$$
\begin{aligned}
& \gamma(t) = z_0(1-t) + z_1 t, \qquad 0 \leq t \leq 1, \\
& z_0 = 1, \;\; z_1 = 2+i, \;\; \text{ainsi} \;\; \gamma(t) = 1 - t + (2+i)t = 1 + t + it, \\
& \gamma'(t) = 1+i, \\
\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz \quad = \quad & \int_0^1 \frac{1}{\gamma(t)} \gamma'(t) dt = \int_0^1 \frac{i+i}{1+(1+i)t} dt \\
& = [\ln(1+(1+i)t)]_0^1 = \ln(2+i) - \ln(1) = \ln(2+i).
\end{aligned}
$$

Remarque : Ici $\ln$ désigne la détermination (branche) principale du logarithme.

4.

$$\begin{aligned}
&\gamma(t) = z_0 + re^{it}, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi, \\
&z_0 = 1+i,\ r = 2,\ \text{ ainsi } \gamma(t) = 1+i+2e^{it}, \\
&\gamma'(t) = 2ie^{it}, \\
&\int_\gamma \frac{z}{(1+i-z)^2}dz = \int_0^{2\pi} \frac{\gamma(t)}{(1+i-\gamma(t))^2}\gamma'(t)dt = \int_0^{2\pi} \frac{(1+i+2e^{it})2ie^{it}dt}{(1+i-(1+i+2e^{it}))^2} \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{(1+i+2e^{it})2ie^{it}dt}{4e^{2it}} = \frac{i}{2}\int_0^{2\pi}(1+i+2e^{it})e^{-it}dt \\
&= \frac{i}{2}\int_0^{2\pi}((1+i)e^{-it}+2)dt = \frac{i}{2}\left(\left[(1+i)\frac{e^{-it}}{-i}\right]_0^{2\pi} + [2t]_0^{2\pi}\right) = 2\pi i.
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
&\gamma(t) = z_0 + re^{it}, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi, \\
&z_0 = 0,\ r = 1,\ \text{ ainsi } \gamma(t) = e^{it}, \\
&\gamma'(t) = ie^{it}, \\
&\int_\gamma Re(z)dz = \int_0^{2\pi} Re(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_0^{2\pi} \frac{\gamma(t)+\overline{\gamma(t)}}{2}\gamma'(t)dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}ie^{it}dt = \frac{i}{2}\int_0^{2\pi}(e^{2it}+1)dt = \frac{i}{2}\left[\frac{e^{2it}}{2i}+t\right]_0^{2\pi} = i\pi.
\end{aligned}$$

6.

$$\int_\gamma z\overline{z}dz = \int_{\gamma_1} z\overline{z}dz + \int_{\gamma_2} z\overline{z}dz,$$

$$\begin{aligned}
&& \gamma_1(t) = Re^{it} \Rightarrow \gamma_1'(t) = iRe^{it}, \\
&& \gamma_2(t) = t \Rightarrow \gamma_2'(t) = 1 \\
\int_{\gamma_1} z\overline{z}dz &=& \int_0^\pi (Re^{it})(Re^{-it})iRe^{it}dt = iR^3\int_0^\pi e^{it}dt \\
&=& iR^3\left[\frac{e^{it}}{i}\right]_0^\pi = R^3(e^{i\pi}-e^0) = -2R^3. \\
\int_{\gamma_2} z\overline{z}dz &=& \int_{-R}^R t^2dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-R}^R = \frac{2}{3}R^3.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_\gamma z\overline{z}dz = -2R^3 + \frac{2}{3}R^3 = -\frac{4}{3}R^3.$$

7.

$$\int_{\gamma}|z|^2dz=\int_{\gamma_1}|z|^2dz+\int_{\gamma_2}|z|^2dz+\int_{\gamma_3}|z|^2dz,$$

$$\begin{aligned}
&\gamma_1(t)=(1-t)+it, \qquad 0\le t\le 1,\\
&\gamma_2(t)=it, \qquad t \text{ varie de } 1 \text{ à } 0,\\
&\gamma_3(t)=t, \qquad 0\le t\le 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1}|z|^2dz &= (i-1)\int_0^1((1-t)^2+t^2)dt=(i-1)\int_0^1(1-2t+2t^2)dt\\
&= (i-1)\left[t-t^2+\frac{2}{3}t^3\right]_0^1=\frac{2}{3}(i-1).\\
\int_{\gamma_2}|z|^2dz &= i\int_1^0 t^2dt=i\left[\frac{1}{3}t^3\right]_1^0=-\frac{i}{3},\\
\int_{\gamma_3}|z|^2dz &= \int_0^1 t^2dt=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1=\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_{\gamma}z\overline{z}dz=\frac{2}{3}(i-1)-\frac{i}{3}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}(i-1).$$

Exercice 3.2. Calculer les intégrales suivantes

$$\int_{|z|=4}\frac{dz}{z^2+1},\qquad \int_{|z|=2a}\frac{e^zdz}{z^2+a^2},\qquad \int_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{e^z}{z(z-1)}dz,$$

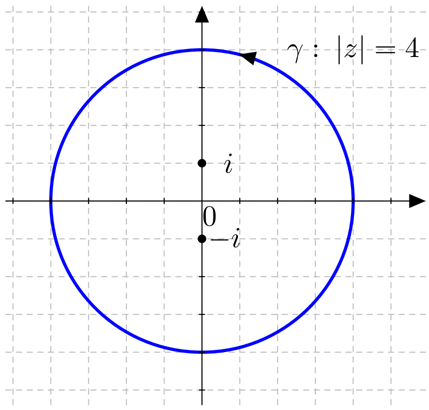
$$\int_{|z|=2}\frac{\cos(\pi z)}{(z+1)(z-3)}dz,\qquad \int_{|z-1|=2}\frac{ze^z}{(z-1)^3}dz,$$

$$\int_{|z|=1}\frac{1}{z^3(z-4)}dz,\qquad \int_{|z|=\frac{1}{2}}(e^z-\frac{4}{3}\pi z^4)dz,$$

$$\int_{|z+i|=1}\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}dz.$$

Solution

1.



$$\int_{|z|=4}\frac{dz}{z^2+1}=\frac{1}{2i}\int_{|z|=4}\frac{dz}{z-i}-\frac{1}{2i}\int_{|z|=4}\frac{dz}{z+i}.$$

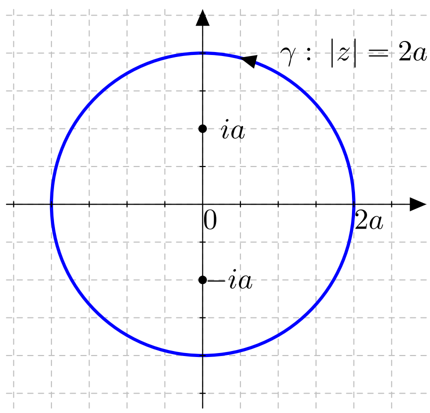
On sait que la fonction $f(z)=1$ est holomorphe à l'intérieur du cercle $|z|=4$, alors l'application de la formule intégrale de Cauchy (F.I.C.) à la fonction $f(z)=1$ en $z_0=i$ et en $z_0=-i$ donne

$$\int_{|z|=4}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=\int_{|z|=4}\frac{dz}{z-i}=2\pi i f(i)=2\pi i,$$
$$\int_{|z|=4}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=\int_{|z|=4}\frac{dz}{z+i}=2\pi i f(-i)=2\pi i.$$

Ainsi

$$\int_{|z|=4}\frac{dz}{z^2+1}=\frac{1}{2i}\int_{|z|=4}\frac{dz}{z-i}-\frac{1}{2i}\int_{|z|=4}\frac{dz}{z+i}=\frac{1}{2i}(2\pi i)-\frac{1}{2i}(2\pi i)=0$$

2.



$$\int_{|z|=2a} \frac{e^z dz}{z^2+a^2} = \frac{1}{2ia}\int_{|z|=2a} \frac{e^z dz}{z-ia} - \frac{1}{2ia}\int_{|z|=2a} \frac{e^z dz}{z+ia}.$$

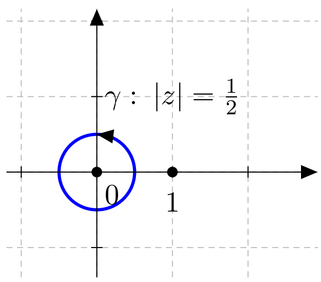
On sait que la fonction $f(z) = e^z$ est holomorphe à l'intérieur du cercle $|z| = 2a$, alors l'application de la formule intégrale de Cauchy (F.I.C.) à la fonction $f(z) = e^z$ en $z_0 = ia$ et en $z_0 = -ia$ donne

$$\int_{|z|=2a} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \int_{|z|=2a} \frac{e^z dz}{z-ia} = 2\pi i f(ia) = 2\pi i e^{ia},$$
$$\int_{|z|=2a} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \int_{|z|=2a} \frac{e^z dz}{z+ia} = 2\pi i f(-ia) = 2\pi i e^{-ia}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\int_{|z|=2a} \frac{e^z dz}{z^2+a^2} &= \frac{1}{2ia}\int_{|z|=2a} \frac{e^z dz}{z-ia} - \frac{1}{2ia}\int_{|z|=2a} \frac{e^z dz}{z+ia} \\ &= \frac{1}{2ia}(2\pi i e^{ia}) - \frac{1}{2ia}(2\pi i e^{-ia}) = \frac{2\pi i}{a}\sin(a).\end{aligned}$$

3.



Posons $f(z) = \frac{e^z}{z-1}$ alors f est holomorphe à l'intérieur du cercle $|z| = \frac{1}{2}$ (1 n'appartient pas) alors d'après F.I.C.

$$\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{z(z-1)}dz = \int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{e^z}{z-1}}{z}dz = 2\pi i f(0) = 2\pi i(-e^0) = -2\pi i.$$

<u>Autre méthode :</u>

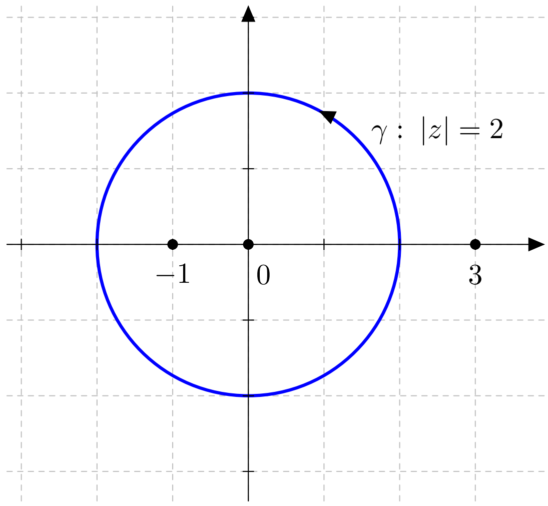
$$\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{z(z-1)}dz = \int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{z-1}dz - \int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{z}dz$$

$\frac{e^z}{z-1}$ est holomorphe à l'intérieur du cercle $|z| = \frac{1}{2}$ donc d'après le théorème de Cauchy $\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{z-1}dz = 0$,

e^z est holomorphe à l'intérieur du cercle $|z| = \frac{1}{2}$ donc d'après F.I. de Cauchy $\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{z} dz = 2\pi i e^0$, ainsi

$$\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{z(z-1)} dz = 0 - 2\pi i e^0 = -2\pi i.$$

4.



Posons $f(z) = \frac{\cos(\pi z)}{z-3}$ alors f est holomorphe à l'intérieur du cercle $|z| = 2$ (3 n'appartient pas) alors d'après F.I.C.

$$\begin{aligned}
\int_{|z|=2} \frac{\cos(\pi z)}{(z+1)(z-3)} dz &= \int_{|z|=2} \frac{\frac{\cos(\pi z)}{z-3}}{z+1} dz = 2\pi i f(-1) \\
&= 2\pi i \frac{\cos(-\pi)}{-1-3} = 2\pi i \frac{-1}{-4} = \frac{\pi i}{2}.
\end{aligned}$$

<u>Autre méthode :</u> On sait que

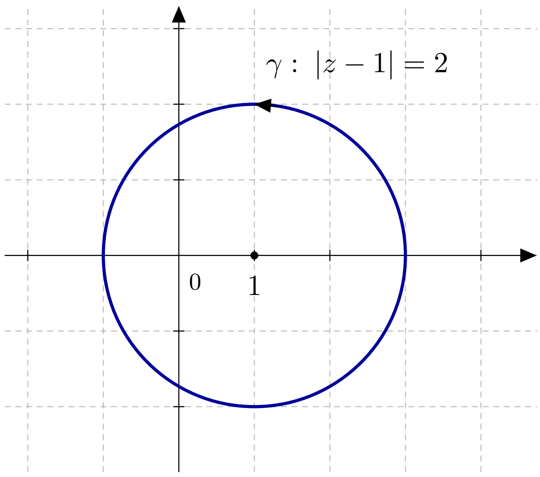
$$\frac{1}{(z+1)(z-3)} = -\frac{1}{4}\frac{1}{z+1} + \frac{1}{4}\frac{1}{z-3},$$

alors

$$\begin{aligned}
\int_{|z|=2} \frac{\cos(\pi z)}{(z+1)(z-3)} dz &= -\frac{1}{4}\int_{|z|=2} \frac{\cos(\pi z)}{z+1} dz + \frac{1}{4}\int_{|z|=2} \frac{\cos(\pi z)}{z-3} dz \\
&= -\frac{1}{4} 2\pi \cos(-\pi) + 0 = \frac{\pi i}{2}.
\end{aligned}$$

dont on a utiliser la F.I.C pour la première intégrale et le théorème de Cauchy pour la deuxième.

5.



La formule intégrale de Cauchy pour les dérivées succéssives d'une fonction holomorphe f sur un domaine simplement connexe D est :

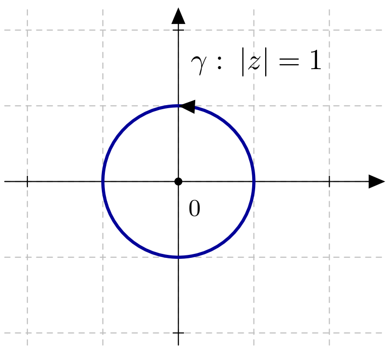
Pour tout chemin fermé γ dans D entourant z_0 on a

$$\frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0) = \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \quad n \in \mathbb{N}.$$

On sait que la fonction $f(z) = ze^z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ alors

$$\begin{aligned} &\int_{|z-1|=2} \frac{ze^z}{(z-1)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(1), \\ &f'(z) = (z+1)e^z, \quad f''(z) = (z+2)e^z \Rightarrow f''(1) = 3e, \\ \Rightarrow \quad &\int_{|z-1|=2} \frac{ze^z}{(z-1)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} 3e = 3e\pi i. \end{aligned}$$

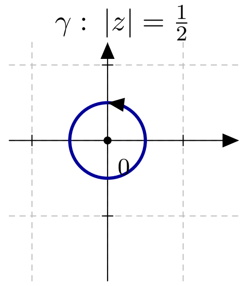
6.



On sait que la fonction $f(z) = \frac{1}{z-4}$ est holomorphe à l'intérieur du cercle $|z| = 1$ alors

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z^3(z-4)}dz = \int_{|z|=1} \frac{\frac{1}{z-4}}{z^3}dz = \frac{2\pi i}{2!}f''(0),$$
$$f'(z) = -\frac{1}{(z-4)^2}, \quad f''(z) = \frac{2}{(z-4)^3} \Rightarrow f''(0) = -\frac{1}{32},$$
$$\Rightarrow \quad \int_{|z|=1} \frac{1}{z^3(z-4)}dz = \frac{2\pi i}{2!}\left(-\frac{1}{32}\right) = -\frac{\pi i}{32}.$$

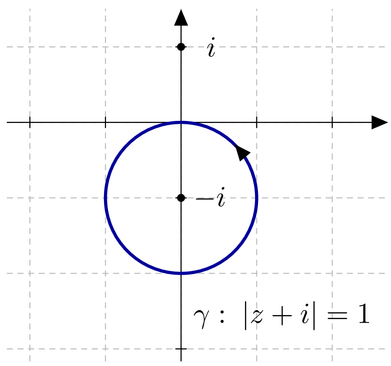
7.



La fonction $e^z - \frac{4}{3}\pi z^4$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ donc d'après le théorème de Cauchy on a

$$\int_{|z|=\frac{1}{2}} (e^z - \frac{4}{3}\pi z^4)dz = 0,$$

8.



$$\int_{|z+i|=1} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}dz = \int_{|z+i|=1} \frac{e^{iz}}{(z-i)^2(z+i)^2}dz = \int_{|z+i|=1} \frac{\frac{e^{iz}}{(z-i)^2}}{(z+i)^2}dz$$

Posons $f(z) = \frac{e^{iz}}{(z-i)^2}$ donc f est holomorphe à l'intérieur du cercle $|z+i| = 1$ (i est à l'extérieur du cercle $|z+i| = 1$),

$$f'(z) = \frac{e^{iz}(iz-1)}{(z-i)^3} \Rightarrow f'(-i) = 0,$$

$$\Rightarrow \quad \int_{|z+i|=1} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2} dz = \int_{|z+i|=1} \frac{\frac{e^{iz}}{(z-i)^2}}{(z+i)^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} f'(-i) = 0.$$

Exercice 3.3. Calculer les intégrales

1. $\displaystyle\int_\gamma (x^2 - y^2) ds,$ **où γ est donné par** $\left\{ \begin{array}{l} x = 5\cos(t) \\ y = 5\sin(t) \end{array} \right. , 0 \le t \le 2\pi.$
2. $\displaystyle\int_\gamma 4x dx + 2y dy,$ **où γ est donné par $x = y^3 + 1$ de $(0,-1)$ à $(9,2)$.**
3. *a)* $\displaystyle\int_{\gamma_1} (x^2 + y^2) dx - 2xy dy,$ **où γ_1 : $y = x^2$ de $(0,0)$ à $(1,1)$.**

   b) $\displaystyle\int_{\gamma_2} (x^2 + y^2) dx - 2xy dy,$ **où γ_2 : $x = y^2$ de $(1,1)$ à $(0,0)$.**

Solution

1.
$$\int_\gamma (x^2 - y^2) ds, \quad \text{où } \gamma \text{ est donné par } \left\{ \begin{array}{l} x = 5\cos(t) \\ y = 5\sin(t) \end{array} \right. , 0 \le t \le 2\pi.$$

$$x(t) = 5\cos(t), \; y(t) = 5\sin(t), \; ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = 5,$$

$$\begin{aligned} \int_\gamma (x^2 - y^2) ds &= \int_0^{2\pi} (25\cos^2(t) - 25\sin^2(t)) 5 dt = 125 \int_0^{2\pi} \cos(2t) dt \\ &= 125 \left[\frac{-\sin(2t)}{2} \right]_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

2.
$$\int_\gamma 4x dx + 2y dy, \quad \text{où } \gamma \text{ est donné par } x = y^3 + 1 \text{ de } (0,-1) \text{ à } (9,2).$$

$$\begin{aligned} & x = y^3 + 1 \Rightarrow dx = 3y^2 dy, \quad -1 \le y \le 2, \\ & \int_\gamma 4x dx + 2y dy = \int_{-1}^2 4((y^3+1)(3y^2 dy) + 2y dy) \\ & = \int_{-1}^2 (12y^5 + 12y^2 + 2y) dy = [2y^6 + 4y^3 + y^2]_{-1}^2 \\ & = 128 + 32 + 4 - 2 + 4 - 1 = 165. \end{aligned}$$

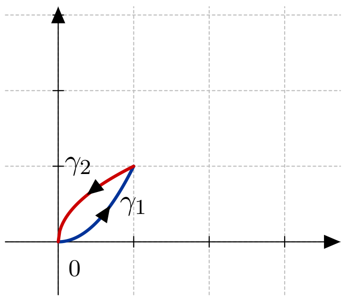
3.

$a)$ $\displaystyle\int_{\gamma_1}(x^2+y^2)dx-2xydy,$ où γ_1 est donné par $y=x^2$ de $(0,0)$ à $(1,1)$.

$$y=x^2 \Rightarrow dy=2xdx, \quad 0\le x\le 1,$$
$$\int_{\gamma_1}(x^2+y^2)dx-2xydy=\int_0^1(x^2+x^4)dx-4x^4dx=\int_0^1(x^2-3x^4)dx$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3x^5}{5}\right]_0^1=\frac{1}{3}-\frac{3}{5}=-\frac{4}{15}.$$

$b)$ $\displaystyle\int_{\gamma_2}(x^2+y^2)dx-2xydy,$ où γ_1 est donné par $x=y^2$ de $(1,1)$ à $(0,0)$.

$$x=y^2 \Rightarrow dx=2ydy, \quad 0\le y\le 1,$$
$$\int_{\gamma_2}(x^2+y^2)dx-2xydy=\int_1^0(y^4+y^2)(2ydy)-2y^3dy=2\int_1^0 y^5dy$$
$$=2\left[\frac{y^6}{6}\right]_1^0=2(-\frac{1}{6})=-\frac{1}{3}.$$



3.7 Exercices supplémentaires

<u>Exercice</u> 3.4. En utilisant la formule intégrale de Cauchy, calculer l'intégrale

$$\int_C \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz$$

si :

a) $|z-2|=1,$ **b)** $|z-2|=3,$ **c)** $|z-2|=5.$

<u>Exercice</u> 3.5. En utilisant les formule intégrales de Cauchy, calculer l'intégrale

$$\int_{|z|=2}\frac{\cosh zdz}{(z+1)^3(z-1)}.$$

Exercice 3.6. **1. En considérant $I = \oint \frac{dz}{z}$ sur l'ellipse $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$, $a, b > 0$, démontrer que**

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} = \frac{2\pi}{ab}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta\cos\theta d\theta}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} = 0.$$

2. Calculer l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta d\theta = 2\pi\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

Chapitre 4

Séries de Laurent

Sommaire

4.1 Série de Laurent

Définition 4.1. *La série* $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ *est appelée série de Laurent de centre* z_0 *et de coefficients* $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n = \ldots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \ldots$$

La série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ *est appelée partie régulière de la série de Laurent. Si elle converge pour* $|z-z_0| < R$ *vers une fonction* $f_1(z)$ *alors* f_1 *est holomorphe pour* $|z-z_0| < R$.

La série $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$ *est appelée partie singulière de la série de Laurent. Si elle converge pour* $\frac{1}{|z-z_0|} < r'$ *où bien* $|z-z_0| > \frac{1}{r'} = r$ *vers une fonction* $f_2(z)$ *alors* f_2 *est holomorphe pour* $|z-z_0| > r$. *Ainsi, La série de Laurent converge dans la couronne :* $r < |z-z_0| < R$.

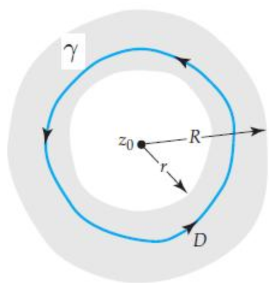
Théorème 4.1 (Théorème de Laurent). *Si* f *est holomorphe (analytique) dans la couronne* $D = \{z \in \mathbb{C},\ r < |z-z_0| < R\}$ *alors* $\forall z \in D$,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

Les coefficients $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *sont donnés par*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}}ds,$$

où γ *est un contour simple et fermé quelconque inclus dans* D.



Preuve. Fixons $z \in D = \{z \in \mathbb{C},\ r < |z - z_0| < R\}$, et soit r', R' tel que

$$r < r' < |z - z_0| < R' < R.$$

alors d'après la formule intégrale de Cauchy, on a

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(s)}{s - z} ds \\ &= \frac{-1}{2\pi i} \int_{|s-z_0|=r'} \frac{f(s)}{s - z} ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{|s-z_0|=R'} \frac{f(s)}{s - z} ds \end{aligned}$$

Si $s \in C(z_0, r')$ on a $|s - z_0| < |z - z_0|$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{s - z} &= \frac{1}{s - z_0 + z_0 - z} = \frac{-1}{(z - z_0)\left(1 - \frac{s-z_0}{z-z_0}\right)} \\ &= -\sum_{n \geq 0} \frac{(s - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \int_{|s-z_0|=r'} \frac{f(s)}{s - z} ds &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} \frac{1}{2\pi i} \int_{|s-z_0|=r'} f(s)(s - z_0)^n ds \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(z - z_0)^n} \frac{1}{2\pi i} \int_{|s-z_0|=r'} f(s)(s - z_0)^{n-1} ds \end{aligned}$$

Si $s \in C(z_0, R')$ on a $|s - z_0| > |z - z_0|$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{s - z} &= \frac{1}{s - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{(s - z_0)\left(1 - \frac{z-z_0}{s-z_0}\right)} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{(z - z_0)^n}{(s - z_0)^{n+1}} \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|s-z_0|=R'} \frac{f(s)}{s - z} ds = \sum_{n \geq 0} (z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{|s-z_0|=R'} \frac{f(s)}{(s - z_0)^{n+1}} ds$$

i.e. $\forall z \in D, \exists r', R'$ tels que $r < r' < R' < R$ et $r' < |z - z_0| < R'$

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(z - z_0)^n} \frac{1}{2\pi i} \int_{|s-z_0|=r'} \frac{f(s)}{(s - z_0)^{-n+1}} \\ &+ \sum_{n \geq 0} (z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{|s-z_0|=R'} \frac{f(s)}{(s - z_0)^{n+1}} ds \end{aligned}$$

Soit γ un chemin fermé inclus dans D donc d'après le théorème de Cauchy généralisé on a pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\int_\gamma \frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}}ds = \int_{|s-z_0|=r'} \frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}}ds = \int_{|s-z_0|=R'} \frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}}ds$$

puisque la fonction $\frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}}$ est holomorphe dans la couronne $r' < |s-z_0| < R'$.
Ainsi $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$, avec $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}}ds, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$.

Exemple 4.1. *Donner le développement en série de Laurent de* $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ *valable dans les domaines suivants*

1. $0 < |z| < 1$.

$$\frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty} z^n.$$

2. $1 < |z| < +\infty$.

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z^2}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n.$$

3. $0 < |z-1| < 1$.

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1}\frac{1}{1+z-1} = \frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(z-1)^n.$$

4. $1 < |z-1| < +\infty$.

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1}\frac{1}{1+z-1} = \frac{1}{(z-1)^2}\frac{1}{1+\frac{1}{z-1}} = \frac{1}{(z-1)^2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{(z-1)^n}.$$

4.2 Classification des singularités

Soit la série

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

La partie singulière de la série de Laurent

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}.$$

Le point z_0 est dit un point de singularité.
Les types de singularité sont :

z_0	Série de Laurent $0 < \|z - z_0\| < R$
Singularité apparente	$a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots$
Pôle simple	$\frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots$
Pôle d'ordre n	$\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z-z_0)^{n-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots$
Singularité essentielle	$\dots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^{-2}} + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots$

Exemple 4.2. *1.* $f(z) = \frac{\sin z}{z}$
0 *est une singularité apparente car*

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots$$

2. $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$
0 *est un pôle simple car*

$$\frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} + \dots$$

3. $f(z) = \frac{\sin z}{z^4}$
0 *est un pôle d'ordre 3 car*

$$\frac{\sin z}{z^4} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!z} + \frac{z}{5!} - \frac{z^3}{7!} + \dots$$

4. $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$
0 *est une singularité essentielle car*

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots \Rightarrow e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots$$

Propriétés 4.1. *1. Une fonction analytique* f *dans* $0 < |z - z_0| < R$ *possède un pôle d'ordre* n *en* z_0 *ssi* f *peut être écrite sous la forme*

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-z_0)^n},$$

où ϕ *est analytique et* $\phi(z_0) \neq 0$.

2. z_0 *est un pôle d'ordre* $n \iff \lim_{z \to z_0} f(z) = +\infty$.

3. z_0 *est une singularité apparente* $\iff \lim_{z \to z_0} f(z)$ *est finie.*

4. z_0 *est une singularité essentielle* $\iff \lim_{z \to z_0} f(z)$ *n'existe pas.*

4.3 Résidus

Le coefficient a_{-1} dans la série de Laurent est dit résidus de la fonction f au point z_0, noté

$$a_{-1} = Res(f, z_0).$$

Exemple 4.3. *1.* $f(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{i}{z}$, 0 *est un pôle d'ordre* 2.

$$Res(f, 0) = i.$$

2. $f(z) = e^{\frac{3}{z}}$

$$f(z) = e^{\frac{3}{z}} = 1 + \frac{3}{z} + \frac{3^2}{2z^2} + \dots$$

0 *est une singularité essentielle.*

$$Res(f, 0) = 3.$$

4.3.1 Quelques méthode pour le calcul des résidus

1. Si f possède un pôle simple au point z_0 alors

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

2. Si f possède un pôle d'ordre n au point z_0 alors

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(n-1)!} \left[(z - z_0)^n f(z)\right]^{(n-1)}.$$

3. Si $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ et la fonction h possède un zéro d'ordre 1, alors

$$Res(f, z_0) = Res(\frac{g}{h}, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Exemple 4.4. $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}$

f admet 3 *comme pôle simple et* 1 *comme pôle double.*

$$Res(f, 3) = \lim_{z \to 3} (z - 3) f(z) = \lim_{z \to 3} \frac{1}{(z-1)^2} = \frac{1}{8}.$$

$$Res(f, 1) = \frac{1}{1!} \lim_{z \to 1} \left[(z-1)^2 f(z)\right]' = \lim_{z \to 1} \left(\frac{1}{z-3}\right)' = \lim_{z \to 1} \frac{-1}{(z-3)^2} = -\frac{1}{4}.$$

2. $f(z) = \frac{z^2}{z^4+1}$.

$z^4 + 1 = 0 \Rightarrow z^4 = -1 \Rightarrow z_k = e^{\frac{i\pi}{4} + \frac{k\pi i}{2}}$, $k \in \mathbb{Z}$

$g(z) = z^2$, $h(z) = z^4 + 1$,

$$Res(f, z_0) = \frac{z_0^2}{4z_0^3} = \frac{1}{4z_0} = \frac{1}{4e^{\frac{\pi i}{4}}} = \frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{4} = \frac{1-i}{4\sqrt{2}}.$$

On sait que

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}}ds$$

$$\Rightarrow a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(s)ds$$

$$\Rightarrow \int_\gamma f(s)ds = 2\pi i a_{-1}$$

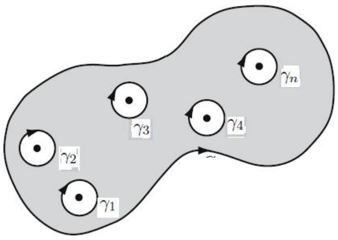
$$\Rightarrow \int_\gamma f(s)ds = 2\pi i Res(f, z_0),$$

avec γ est une courbe simple et fermé entourant z_0.

4.3.2 Application des résidus

Théorème 4.2 (Théorème des résidus)**.** *Soit D un domaine simplement connexe et γ la frontière de D. Si f est analytique dans D sauf en un nombre fini de points $z_1, z_2, \ldots, z_n$ alors*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k).$$

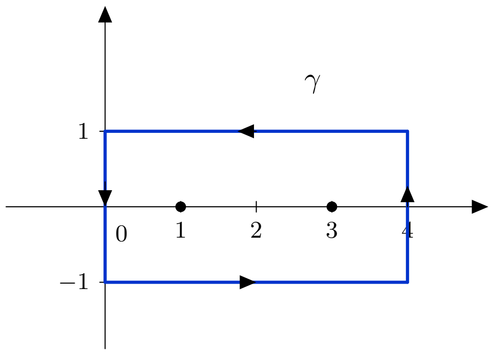


Preuve. D'après la généralisation du théorème de cauchy on a

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^{n}\int_{\gamma_k} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k).$$

Exemple 4.5. *1.* $\int_\gamma \frac{dz}{(z-1)^2(z-3)}$

γ est le rectangle de sommets : $(0,-1)$, $(4,-1)$, $(4,1)$ *et* $(0,1)$.



$$\int_\gamma \frac{dz}{(z-1)^2(z-3)} = 2\pi i\,(Res(f,1)+Res(f,3)) = 2\pi i\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right) = 0$$

2. $\int_{|z-i|=2} \frac{2z+6}{z^2+4}dz$,
$z^2+4=(z+2i)(z-2i)$,

$$\int_{|z-i|=2} \frac{2z+6}{z^2+4}dz = 2\pi i Res(f,2i),$$

$$Res(f,2i) = \lim_{z\to 2i}(z-2i)\frac{2z+6}{(z+2i)(z-2i)} = \frac{6+4i}{4i}.$$

Ainsi

$$\int_{|z-i|=2} \frac{2z+6}{z^2+4}dz = 2\pi i\frac{6+4i}{4i} = \pi(3+2i).$$

4.4 Singularités à l'infini

Définition 4.2. *$f(z)$ est holomorphe à l'infini $\iff$ $f(\frac{1}{z})$ est holomorphe au voisinage de 0.*

Exemple 4.6. *$e^{\frac{1}{z}}$ est holomorphe à l'infini car e^z est holomorphe au voisinage de* 0.

Définition 4.3. *L'∞ est une singularité apparente de $f(z)$ $\iff$ 0 est une singularité apparente de $f(\frac{1}{z})$.*

Exemple 4.7. $f(z) = z\sin(\frac{1}{z})$
∞ *est une singularité apparente car*

$$\begin{aligned} f(\frac{1}{z}) &= \frac{\sin z}{z} = \frac{z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\dots}{z} \\ &= 1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\dots \end{aligned}$$

0 *est une singularité apparente.*

Définition 4.4. *L'∞ est un pôle d'ordre n de $f(z)$ $\iff$ 0 est un pôle d'ordre n de $f(\frac{1}{z})$.*

Exemple 4.8. $f(z) = z^2 + 1$
L'∞ est un pôle d'ordre 2 car $f(\frac{1}{z}) = \frac{1}{z^2} + 1$ possède 0 comme un pôle d'ordre 2.

Définition 4.5. *L'∞ est une singularité essentielle de $f(z)$ $\iff$ 0 est une singularité essentielle de $f(\frac{1}{z})$.*

Exemple 4.9. $f(z) = e^z$, $f(\frac{1}{z}) = e^{\frac{1}{z}}$.

Définition 4.6 (Résidu à l'infini)**.**

$$Res(f, \infty) = -Res\left(\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right).$$

Exemple 4.10. $f(z) = 1 - \frac{1}{z} \Rightarrow Res(f, 0) = -1$.
$f(\frac{1}{z}) = 1 - z \Rightarrow \infty$ *est une singularité apparente.*
$\frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z}) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} \Rightarrow Res(f, \infty) = 1$.

Nous remarquons que

$$Res(f, \infty) + Res(f, 0) = 0.$$

Ainsi on a le théorème suivant

Théorème 4.3. *Supposons que f est une fonction analytique dans $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sauf des singulaités $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n, \infty$, alors*

$$Res(f, \infty) + \sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k) = 0.$$

Exemple 4.11. *Calculer*

$$\begin{aligned} & \int_{|z|=2} \frac{dz}{(z-3)(z^n - 1)}, \quad n \geq 1. \\ = \quad & 2\pi \sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k), \quad z_k : \text{ les racines } n^{ieme} \text{ de } 1. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k) + Res(f, 3) + Res(f, \infty) = 0, \\ \Rightarrow \quad & \sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k) = -Res(f, 3) - Res(f, \infty) \end{aligned}$$

$$Res(f,3) = \lim_{z\to 3}(z-3)\frac{1}{(z-3)(z^n-1)} = \frac{1}{3^n-1}.$$

$$\begin{aligned} Res(f,\infty) &= -Res\left(\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right),0\right) = -Res\left(\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{(\frac{1}{z}-3)(\frac{1}{z^n}-1)}\right),0\right) \\ &= Res\left(\frac{z^{n-1}}{(1-3z)(1-z^n)},0\right) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_{|z|=2}\frac{dz}{(z-3)(z^n-1)} = -\frac{2\pi i}{3^n-1}.$$

Théorème 4.4. *Soit D un domaine borné par un nombre fini de chemins et f une fonction analytique dans D, $\forall z \in \delta D$, $f(z) \neq 0$, alors*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta D}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = Z_f,$$

où Z_f : nombre de zéros de f dans D comptés avec leurs multiplicités.

Exemple 4.12. *1.* $\int_{|z|=1}\frac{dz}{z} = 2\pi i$

2.

$$\int_{\delta D}\frac{2z-3}{z^2-3z+2}dz = \begin{cases} 4\pi & \text{si } D \text{ contient les deux zéros de } z^2-3z+2 \\ 2\pi & \text{si } D \text{ contient un seul zéro de } z^2-3z+2 \\ 0 & \text{si } D \text{ ne contient aucun zéro de } z^2-3z+2. \end{cases}$$

Théorème 4.5 (Théorème de Rouché)**.** *Soit D un domaine borné et δD sa frontière. Supposons que $f(z)$ et $g(z)$ sont des fonctions analytiques à l'intérieur de D avec*

$$\forall z \in \delta D,\ |f(z)| < |g(z)|$$

alors $Z_f = Z_{f+g}$.
Z : nombre de zéros avec leurs multiplicité.

Exemple 4.13. *Soit $P(z) = z^{10} - 6z^9 - 3z + 1$. Nous voulons déterminer le nombre des zéros à l'intérieur du cercle $|z| = 1$.*

Posons $P(z) = f(z) + g(z)$ avec $f(z) = -6z^9 + 1$ et $g(z) = z^{10} - 3z$ alors

$$|f(z)| = |-6z^9+1| \geq |6z^9| - 1 = 6 - 1 = 5$$

et

$$|g(z)| = |z^{10} - 3z| < |z|^{10} + 3|z| = 4 < |f(z)|.$$

Ainsi par le théorème de Rouché $f(z)$ et $P(z)$ possèdent le même nombre de zéros à l'intérieur du cercle $|z| = 1$, et puisque $f(z)$ possède 9 zéros on peut conclure que $P(z)$ possède aussi 9 zéros à l'intérieur du cercle $|z| = 1$.

4.5 Exercices

Exercice 4.1. Donner le développement en série de Laurent des fonctions suivantes en précisant dans quelles parties de $\mathbb{C}$ elles sont valables.

$$1)\ \frac{1}{(z+2)(z-1)} \quad \text{autour de } 0,\ \text{de } 1,\ \text{de } -2.$$

$$2)\ \frac{z}{z^2-1} \quad \text{autour de } 0,\ \text{de } 2,\ \text{de } 1.$$

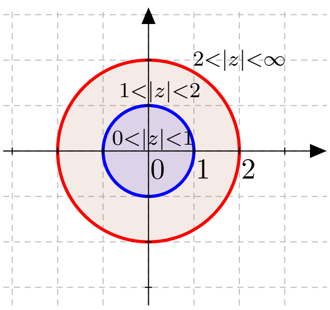
Solution

1. La fonction $f(z) = \frac{1}{(z+2)(z-1)} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+2}\right]$

Autour de 0

• Si $|z| < 1$ alors

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{z}{2}+1}\right] \\ &= \frac{1}{3}\left[-\sum_{n\geq 0} z^n - \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n\right] \\ &= -\frac{1}{3}\sum_{n\geq 0} z^n - \frac{1}{6}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n. \end{aligned}$$



• Si $1 < |z| < 2$ alors

$$f(z) = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{z}{2}+1}\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}(\frac{1}{z})^n - \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n\right].$$

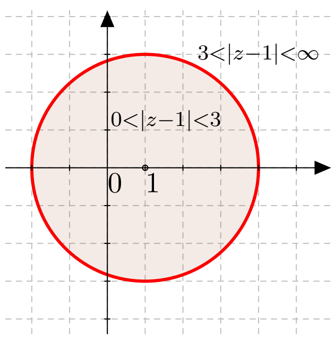
• Si $2 < |z| < \infty$ alors

$$f(z) = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{2}{z}}\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}(\frac{1}{z})^n - \frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{2}{z}\right)^n\right].$$

Autour de 1

• Si $|z-1| < 3$ alors

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+2}\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-1+3}\right] \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{z-1}{3}}\right] \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{3}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{z-1}{3}\right)^n\right] \end{aligned}$$



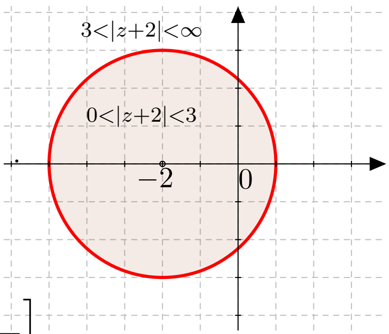
• Si $3 < |z-1| < +\infty$ alors

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+2}\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-1+3}\right] \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-1}\frac{1}{1+\frac{3}{z-1}}\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-1}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{3}{z-1}\right)^n\right] \end{aligned}$$

<u>Autour de -2</u>

• Si $0 < |z+2| < 3$ alors

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+2}\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z+2-3} - \frac{1}{z+2}\right] \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\frac{1}{\frac{z+2}{3}-1} - \frac{1}{z+2}\right] \\ &= \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{3}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z+2}{3}\right)^n - \frac{1}{z+2}\right]. \end{aligned}$$



• Si $3 < |z+2| < +\infty$ alors

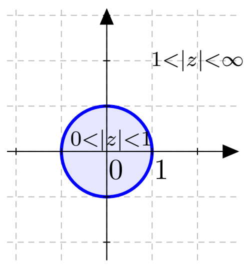
$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+2}\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z+2-3} - \frac{1}{z+2}\right] \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z+2}\frac{1}{\frac{3}{z+2}-1} - \frac{1}{z+2}\right] = \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{z+2}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{3}{z+2}\right)^n - \frac{1}{z+2}\right]. \end{aligned}$$

2. La fonction $f(z) = \frac{z}{z^2-1} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1}\right]$

<u>Autour de 0</u>

• Si $|z| < 1$ alors

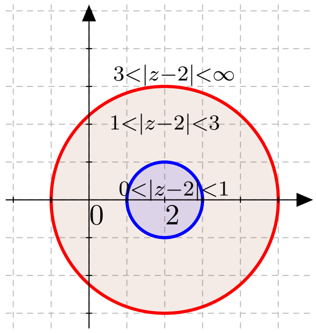
$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[-\sum_{n\geq 0} z^n + \sum_{n\geq 0}(-1)^n z^n\right]. \end{aligned}$$



• Si $1 < |z| < +\infty$ alors

$$f(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{1}{z}}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{z}\right)^n + \frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{1}{z}\right)^n\right].$$

<u>Autour de 2</u>



• Si $0 < |z-2| < 1$ alors

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z-1}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{z-2+3}+\frac{1}{z-2+1}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\frac{1}{\frac{z-2}{3}+1}+\frac{1}{z-2+1}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{z-2}{3}\right)^n+\sum_{n\geq 0}(-1)^n(z-2)^n\right].
\end{aligned}$$

• Si $1 < |z-2| < 3$ alors

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z-1}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{z-2+3}+\frac{1}{z-2+1}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\frac{1}{\frac{z-2}{3}+1}+\frac{1}{z-2}\frac{1}{1+\frac{1}{z-2}}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{z-2}{3}\right)^n+\frac{1}{z-2}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{1}{z-2}\right)^n\right].
\end{aligned}$$

• Si $3 < |z-2| < +\infty$ alors

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z-1}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{z-2+3}+\frac{1}{z-2+1}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{z-2}\frac{1}{1+\frac{3}{z-2}}+\frac{1}{z-2}\frac{1}{1+\frac{1}{z-2}}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{z-2}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{3}{z-2}\right)^n+\frac{1}{z-2}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{1}{z-2}\right)^n\right].
\end{aligned}$$

Exercice 4.2. Donner le développement en série de Laurent de la fonction

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}.$$

dans les régions

1) $0 < |z-1| < 2,$ **2)** $0 < |z-3| < 2.$

Solution

Soit la fonction $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}$.
1. Si $0 < |z-1| < 2$ alors

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-1)^2(z-3)} = \frac{1}{(z-1)^2}\frac{1}{z-3} = \frac{1}{(z-1)^2}\frac{1}{z-1-2} \\ &= = \frac{1}{(z-1)^2}\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z-1}{2}}\right] = \frac{1}{2(z-1)^2}\frac{1}{1-\frac{z-1}{2}} \\ &= \frac{1}{2(z-1)^2}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z-1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

2. Si $0 < |z-3| < 2$ alors

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-3}\frac{1}{(z-1)^2} = \frac{1}{z-3}\frac{1}{(z-3+2)^2} = \frac{1}{4(z-3)}\frac{1}{(\frac{z-3}{2}+1)^2} \\ &= \frac{1}{4(z-3)}\left[1+\sum_{n\geq 1}\frac{(-2)(-3)\dots(-2-n+1)}{n!}\left(\frac{z-3}{2}\right)^n\right] \\ &= \frac{1}{4(z-3)}\left[1+\sum_{n\geq 1}(-1)^n(n+1)\left(\frac{z-3}{2}\right)^n\right]. \end{aligned}$$

Exercice 4.3. Quels sont les points singuliers des fonctions suivantes ; préciser leurs types.

$$\mathbf{1.}\ \frac{e^z}{z^2(z-1)(z-2)},\quad \mathbf{2.}\ \frac{e^z}{z},\quad \mathbf{3.}\ \frac{1-\cos z}{z},$$

$$\mathbf{4.}\ \frac{1}{z^3-z^5},\quad \mathbf{5.}\ \frac{e^{iz}}{z^2+1},\quad \mathbf{6.}\ \frac{ze^z}{z^2-1}.$$

Calculer les résidus de ces fonctions.

Solution

1. $f(z) = \frac{e^z}{z^2(z-1)(z-2)}$, les points singuliers sont $0, 1$ et 2
   0 est un pôle double, 1 et 2 sont des pôles simples.

$$\begin{aligned} Res(f,0) &= \frac{1}{1}\lim_{z\to 0}\left[z^2\frac{e^z}{z^2(z-1)(z-2)}\right]' = \frac{5}{4}. \\ Res(f,1) &= \lim_{z\to 1}\left[(z-1)\frac{e^z}{z^2(z-1)(z-2)}\right] = -e. \\ Res(f,2) &= \lim_{z\to 2}\left[(z-2)\frac{e^z}{z^2(z-1)(z-2)}\right] = \frac{e^2}{4}. \end{aligned}$$

2. $f(z)=\frac{e^z}{z}$, 0 est un pôle simple et

$$Res(f,0)=\lim_{z\to 0} z\frac{e^z}{z}=1$$

3.

$$f(z)=\frac{1-\cos z}{z}=\frac{1-(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\dots)}{z}=\frac{z}{2!}-\frac{z^3}{4!}+\dots$$

Ainsi 0 est une singularité apparente donc $Res(f,0)=0$.

4. $f(z)=\frac{1}{z^3-z^5}=\frac{1}{z^3}\frac{1}{1-z^2}$.
0 est un pôle d'ordre 3, -1 et 1 sont des pôles simples.

$$\begin{aligned}
Res(f,0) &= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left[z^3\frac{1}{z^3}\frac{1}{1-z^2}\right]''=1.\\
Res(f,1) &= \lim_{z\to 1}\left[(z-1)\frac{1}{z^3}\frac{1}{1-z^2}\right]=-\frac{1}{2}.\\
Res(f,-1) &= \lim_{z\to -1}\left[(z+1)\frac{1}{z^3}\frac{1}{1-z^2}\right]=-\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

5. $f(z)=\frac{e^{iz}}{z^2+1}$, i et $-i$ sont des pôles simples.

$$\begin{aligned}
Res(f,i) &= \lim_{z\to i}\left[(z-i)\frac{e^{iz}}{(z+i)(z-i)}\right]=\frac{e^{-1}}{2i}.\\
Res(f,-i) &= \lim_{z\to -i}\left[(z+i)\frac{e^{iz}}{(z+i)(z-i)}\right]=\frac{e}{-2i}.
\end{aligned}$$

6. $f(z)=\frac{ze^z}{z^2-1}$, -1 et 1 sont des pôles simples.

$$\begin{aligned}
Res(f,1) &= \lim_{z\to 1}\left[(z-1)\frac{ze^z}{z^2-1}\right]=-\frac{e}{2}.\\
Res(f,-1) &= \lim_{z\to -1}\left[(z+1)\frac{ze^z}{z^2-1}\right]=-\frac{e^{-1}}{2}.
\end{aligned}$$

Exercice 4.4. Calculer les intégrales suivantes

$$\textbf{1.}\ \int_{|z|=2}\tan(z)dz,\qquad \textbf{2.}\ \int_{|z|=2}\frac{e^z}{z^4+5z^3}dz,$$
$$\textbf{3.}\ \int_{|z|=1}\sin(\frac{1}{z})dz,\qquad \textbf{4.}\ \int_{|z-i|=\frac{1}{2}}\frac{dz}{z^4-1}.$$

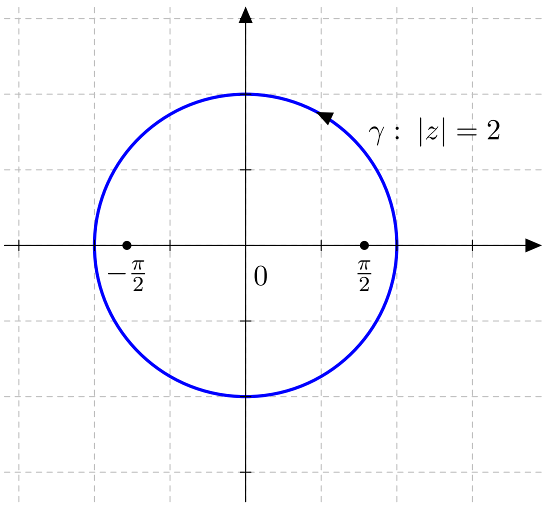
Solution

1.

$$\int_{|z|=2} \tan(z)dz = \int_{|z|=2} \frac{\sin z}{\cos z} dz$$
$$\cos z = 0 \iff z_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}; \quad k \in \mathbb{Z}.$$

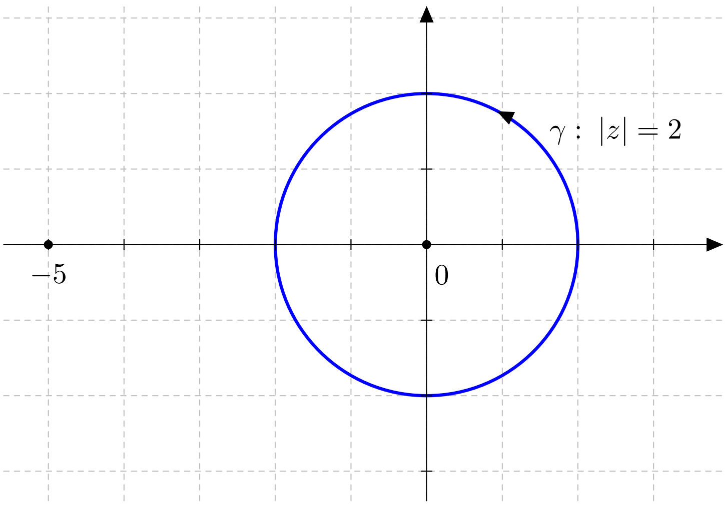
Dans notre cas ($|z| = 2$), les singularités sont $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. Ainsi

$$\begin{aligned}\int_{|z|=2} \tan(z)dz &= 2\pi i \left(Res(f, \frac{\pi}{2}) + Res(f, -\frac{\pi}{2}) \right) \\ &= 2\pi i \left(\frac{\sin(\frac{\pi}{2})}{-\sin(\frac{\pi}{2})} + \frac{\sin(-\frac{\pi}{2})}{-\sin(-\frac{\pi}{2})} \right) = -4\pi i\end{aligned}$$



2.

$$\begin{aligned}\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^4 + 5z^3} dz &= \int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^3(z+5)} dz = 2\pi i Res(f, 0) \\ &= 2\pi i \left(\frac{1}{2} \lim_{z \to 0} \left[z^3 \frac{e^z}{z^3(z+5)} \right]'' \right) = \frac{17\pi i}{125}.\end{aligned}$$



3.

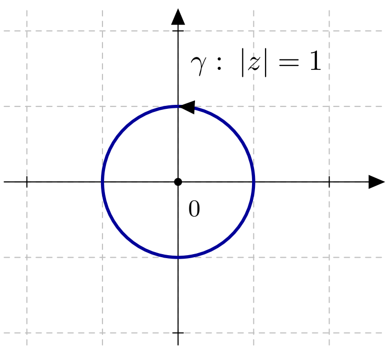
$$\int_{|z|=1} \sin(\frac{1}{z})dz$$

On sait que

$$\sin(\frac{1}{z}) = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \dots$$
$$\Rightarrow Res(f, 0) = 1,$$

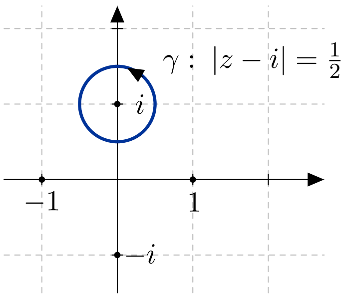
ainsi

$$\int_{|z|=1} \sin(\frac{1}{z})dz = 2\pi i.$$



4.

$$\int_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{z^4 - 1} = 2\pi i Res(f, i) = 2\pi i \lim_{z\to 0}(z - i)\frac{1}{z^4 - 1} = 2\pi i(\frac{1}{4i^3}) = -\frac{\pi}{2}$$



Exercice 4.5. Calculer les résidus des fonctions suivantes

$$\mathbf{1.}\quad f(z) = z^{2n}(1+z)^{-n}, \quad \mathbf{2.}\quad f(z) = \frac{1-e^z}{1+e^z}, \quad \mathbf{3.}\quad f(z) = e^{2z+1}.$$

2. Calculer les résidus à l'infini des fonctions suivantes

$$\mathbf{1.}\quad f(z) = \frac{z^3}{z^4-1}, \quad \mathbf{2.}\quad f(z) = (z+\frac{2}{z})^4, \quad \mathbf{3.}\quad f(z) = \frac{e^z}{z}.$$

3. Calculer l'intégrale suivante

$$\int_{|z|=2} \frac{z^{99}e^{\frac{1}{z}}}{z^{100}+1}dz.$$

Solution

I)

1. $f(z) = z^{2n}(1+z)^{-n}$
-1 est un pôle d'ordre n.

$$Res(z^{2n}(1+z)^{-n}, -1) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to -1}\left[(z+1)^n \frac{z^{2n}}{(z+1)^n}\right]^{(n-1)}.$$

On a

$$\begin{aligned}\left(z^{2n}\right)^{(n-1)} &= 2n(2n-1)\dots(2n-n+2)z^{2n-n+1} \\ &= \frac{(2n)!}{(n+1)!}z^{n+1}\end{aligned}$$

$$Res(z^{2n}(1+z)^{-n}, -1) = \frac{1}{(n-1)!}\frac{(2n)!}{(n+1)!}(-1)^{n+1}.$$

2. $f(z) = \frac{1-e^z}{1+e^z}$.

$$e^z = -1 \Rightarrow z_k = (2k+1)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$Res\left(\frac{1-e^z}{1+e^z}, z_k\right) = \frac{1-e^{(2k+1)\pi i}}{e^{(2k+1)\pi i}} = -2.$$

3. $f(z) = e^{2z+1}$. La fonction f ne possède aucune singularité, ainsi le résidu est nul.

II.

1. $Res(\frac{z^3}{z^4-1}, \infty) =?$

$$f(z) = \frac{z^3}{z^4-1} \Rightarrow f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\frac{1}{z^3}}{\frac{1}{z^4}-1} = \frac{1}{z^3}\frac{z^4}{1-z^4} = \frac{z}{1-z^4}.$$

$$Res(f,\infty) = Res\left(-\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right) = Res\left(-\frac{1}{z^2}\frac{z}{1-z^4}, 0\right)$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{-z}{z(1-z^4)} = -1.$$

2. $Res\left((z+\frac{2}{z})^4, \infty\right) =?$

$$f(z) = \left(z+\frac{2}{z}\right)^4 = \frac{16}{z^4} + \frac{32}{z^2} + 24 + 8z^2 + z^4.$$

$$Res\left(\left(z+\frac{2}{z}\right)^4, \infty\right) = 0.$$

3. $Res\left(\frac{e^z}{z}, \infty\right) =?$

$$Res\left(\frac{e^z}{z}, \infty\right) + Res\left(\frac{e^z}{z}, 0\right) = 0$$

$$Res\left(\frac{e^z}{z}, 0\right) = \lim_{z\to 0} z\frac{e^z}{z} = 1$$

$$\Rightarrow \quad Res\left(\frac{e^z}{z}, \infty\right) = -1.$$

III)

$$\int_{|z|=2} \frac{z^{99}e^{\frac{1}{z}}}{z^{100}+1}dz.$$

$$z^{100}+1 = 0 \Rightarrow z_k = e^{\frac{(2k+1)\pi i}{100}}$$

0 est aussi une singularité. Ainsi

$$\int_{|z|=2} \frac{z^{99}e^{\frac{1}{z}}}{z^{100}+1}dz = 2\pi i\left[\sum_{k=0}^{99} Res(f,z_k) + Res(f,0)\right] = -2\pi i Res(f,\infty).$$

$$
\begin{aligned}
& f(z)=\frac{z^{99}e^{\frac{1}{z}}}{z^{100}+1} \Rightarrow f\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{z^{-99}e^{z}}{z^{-100}+1}=\frac{ze^{z}}{1+z^{100}}. \\
& \frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{e^{z}}{z(1+z^{100})} \\
& Res\left(-\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right),0\right)=\lim_{z\to 0}\frac{-e^{z}}{1+z^{100}}=-1.
\end{aligned}
$$

Ainsi

$$
\int_{|z|=2}\frac{z^{99}e^{\frac{1}{z}}}{z^{100}+1}dz=2\pi i.
$$

4.6 Exercices supplémentaires

Exercice 4.6. 1. Developper en série de Laurent la fonction dans les couronnes indiquées : $f(z)=\frac{1}{(z-2)(z-3)}$,

a) $2<|z|<3$, b) $3<|z|<+\infty$.

2. Examiner les différents développement en série de laurent de la fonction $f(z)=\frac{z^2-z+3}{z^2-3z+2}$ en posant $z_0=0$.

Exercice 4.7. 1. Trouver les résidus de la fonction

$$
f(z)=\frac{1}{z^4+1}
$$

en ses points singuliers.

2. Trouver le résidu de la fonction $f(z)=z^3\sin\frac{1}{z}$ en son point singulier.

Exercice 4.8. 1. En utilisant la formule des résidus, calculer l'intégrale

$$
\int_{|z-i|=\frac{3}{2}}\frac{\exp\left(\frac{1}{z^2}\right)}{z^2+1}dz.
$$

2. En utilisant la formule des résidus, calculer l'intégrale

$$
\int_{|z|=2}\frac{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}{z-1}dz.
$$

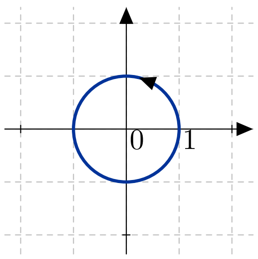
Chapitre 5

Application du calcul des résidus

Sommaire

5.1 Intégrales de la forme $\int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$

L'idée principale est de convertir l'intégrale trigonométrique de la forme $\int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$ en une intégrale complexe sur un contour γ qui est le cercle unité $|z| = 1$



La paramétrisation du cercle unité est : $z = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, donc

$$dz = ie^{i\theta}d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz},$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{z+z^{-1}}{2},$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z-z^{-1}}{2i}.$$

L'intégrale devienne

$$\int_{|z|=1} F\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)\frac{dz}{iz}.$$

Exemple 5.1.

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(2+\cos\theta)^2} &= \int_{|z|=1}\frac{1}{\left(2+\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^2}\frac{dz}{iz} = \frac{4}{i}\int_{|z|=1}\frac{z}{(z^2+4z+1)^2}dz \\
&= \frac{4}{i}\int_{|z|=1}\frac{z}{(z+2+\sqrt{3})^2(z+2-\sqrt{3})^2}dz \\
&= \frac{4}{i}2\pi i Res(f,-2+\sqrt{3}).
\end{aligned}$$

$-2+\sqrt{3}$ *est un pôle double de* f.

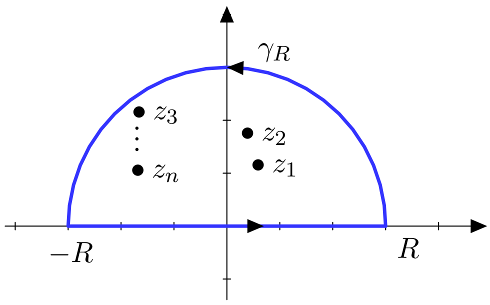
$$\begin{aligned}
Res(f,-2+\sqrt{3}) &= \lim_{z\to-2+\sqrt{3}}\left[(z+2-\sqrt{3})^2\frac{z}{(z+2+\sqrt{3})^2(z+2-\sqrt{3})^2}\right]' \\
&= \lim_{z\to-2+\sqrt{3}}\left[\frac{z}{(z+2+\sqrt{3})^2}\right]' = \lim_{z\to-2+\sqrt{3}}\frac{-z+2+\sqrt{3}}{(z+2+\sqrt{3})^3} \\
&= \frac{1}{6\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(2+\cos^2\theta)^2} = \frac{4}{i}\int_{|z|=1}\frac{z}{(z^2+4z+1)^2}dz = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

5.2 Intégrales de la forme $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

Soit $y=f(x)$ une fonction réelle définie et continue dans $]-\infty,+\infty[$.
Soit l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$:
1. Nous remplaçons la variable x par la variable complexe z.
2. On intègre la fonction $f(z)$ sur le contour γ suivant



γ est la réunion du segment $[-R, R]$ et le demi-cercle γ_R.

3.

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= \int_{\gamma_R} f(z)dz + \int_{-R}^{R} f(x)dx \\ &= 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k),\end{aligned}$$

avec z_k, $k = 1, 2, \ldots n$, les pôles de f inclus dans l'intérieur de γ

4. Si on montre que $\int_{\gamma_R} f(z)dz \to 0$ quand $R \to +\infty$, alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k).$$

Théorème 5.1 (Lemme 1 de Jordan)**.** *Soit f une fonction complexe continue sur un secteur $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$ et γ_R le chemin tel que $\gamma_R(\theta) = Re^{i\theta}, \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$.*
Si $\lim\limits_{|z|\to+\infty} zf(z) = 0$ (resp. $\lim\limits_{|z|\to 0} zf(z) = 0$) alors

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz \to 0, \quad quand\ R \to +\infty. \ (resp. \ \int_{\gamma_R} f(z)dz \to 0, \quad quand\ R \to 0.)$$

Preuve. On a :
$\left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right| \leqslant \sup_{z\in\gamma_R} \left|f(z)\right|R\left|\theta_2 - \theta_1\right| = \sup_{z\in\gamma_R} \left|zf(z)\right|\left|\theta_2 - \theta_1\right|$ Donc
Si $\lim\limits_{|z|\to+\infty} zf(z) = 0$, alors $\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0$.

Si $\lim\limits_{|z|\to 0} zf(z) = 0$, alors $\lim\limits_{R\to 0} \displaystyle\int_{\gamma_R} f(z)dz = 0$.

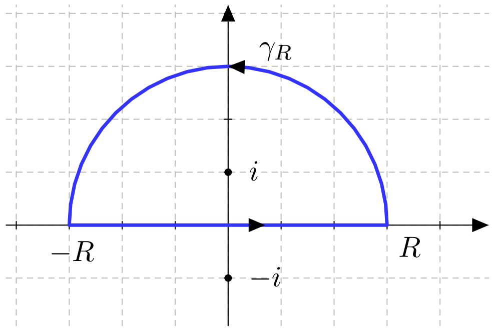
Remarque 5.1. *Soit $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ où P et Q sont des polynômes de degrés n et m respectivement avec $m \geq n + 2$. Si γ_R est un demi-cecle de rayon R, alors*

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz \to 0, \quad quand\ R \to +\infty.$$

Exemple 5.2. *Soit*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$$

1. Posons $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$, elle possède i et $-i$ comme pôles simples.



2. $Res(f,i) = \lim_{z\to i}(z-i)\dfrac{1}{z^2+1} = \dfrac{1}{2i}$

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2+1} = 2\pi i Res(f,i) = \pi$$

d'autre part

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2+1} = \int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^2+1} + \int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^2+1} = \pi$$

Par le théorème précédent z^2+1 est degré $2 \geq 2+0$ alors

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0.$$

d'ou

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \pi.$$

5.3 Intǵrales de la forme $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\{\cos(\alpha x), \sin(\alpha x)\}dx$

On sait que $e^{i\alpha x} = \cos(\alpha x) + i\sin(\alpha x)$, $\alpha > 0$, alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(\alpha x)dx + i\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin(\alpha x)dx.$$

Supposons que la fonction $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$.

Nous utilisons la méthode précédente. Il reste le terme $\int_{\gamma_R} f(z)e^{i\alpha z}dz$, on a le théorème suivant

Théorème 5.2 (Lemme 2 de Jordan). *Soit $f : \{Im(z) > 0\} \to \mathbb{C}$ continue telle que $\lim\limits_{|z|\to+\infty} f(z) = 0$ et soit $\alpha > 0$, alors*

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)e^{i\alpha z}dz = 0.$$

où γ_R est le demi-cercle : $\gamma_R(\theta) = Re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi$.

Preuve.

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_R} f(z)e^{i\alpha z}dz\right| &= \left|\int_0^\pi f(Re^{i\theta})e^{i\alpha R(\cos\theta + i\sin\theta)}iRe^{i\theta}d\theta\right| \\
&\leq R\sup_{z\in\gamma_R}|f(z)|\int_0^\pi \left|e^{i\alpha R(\cos\theta+i\sin\theta)}\right| d\theta \\
&\leq R\sup_{z\in\gamma_R}|f(z)|\int_0^\pi e^{-\alpha R\sin\theta}d\theta
\end{aligned}$$

Or $\int_0^\pi e^{-\alpha R\sin\theta}d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R\sin\theta}d\theta$ et sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$, on a $\sin\theta \geq \frac{2\theta}{2}$ d'où la majoration $\int_0^\pi e^{-\alpha R\sin\theta}d\theta \leq \frac{\pi}{R}$, ainsi

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)e^{i\alpha z}dz\right| \leq R\sup_{z\in\gamma_R}|f(z)|\int_0^\pi e^{-\alpha R\sin\theta}d\theta \leq \pi\sup_{z\in\gamma_R}|f(z)|$$

Comme $\lim\limits_{R\to+\infty} f(z) = 0$ on obtient $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)e^{i\alpha z}dz = 0$.

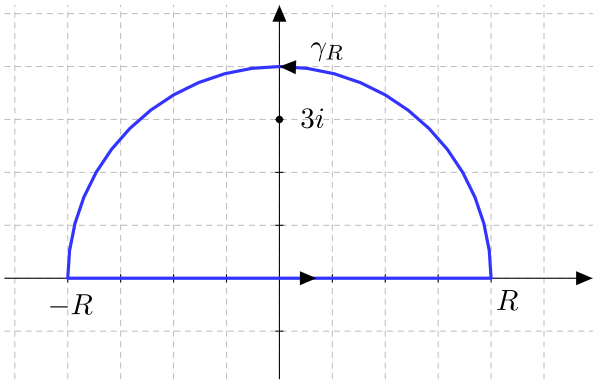
Remarque 5.2. *Supposons que $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ avec P de degré n et Q de degré $m \geq n+1$. Si γ_R est un demi-cercle de rayon R, alors*

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)e^{i\alpha z}dz = 0.$$

Exemple 5.3.

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+9}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+9}dx$$

$$\int_\gamma \frac{ze^{iz}}{z^2+9}dz = 2\pi Res(f, 3i).$$



$$Res(f,3i) = \lim_{z\to 3i} \frac{ze^{iz}}{z+3i} = \frac{e^{-3}}{2}.$$

D'autre part

$$\int_\gamma \frac{ze^{iz}}{z^2+9}dz = \int_{\gamma_R} \frac{ze^{iz}}{z^2+9}dz + \int_{-R}^{R} \frac{xe^{ix}}{x^2+9}dx = \frac{\pi i}{e^3}.$$

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} \frac{ze^{iz}}{z^2+9}dz = 0 \quad car\ 2 \geq 1+1.$$

donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2+9}dx = \frac{\pi i}{e^3}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2+9}dx + i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+9}dx = \frac{\pi i}{e^3},$$

et par suite

$$\int_{\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2+9}dx = 0$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+9}dx = \frac{\pi}{e^3}.$$

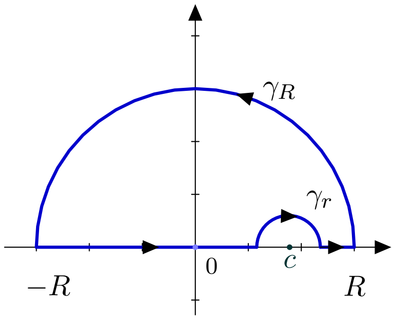
Finalement

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+9}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+9}dx = \frac{\pi}{2e^3}.$$

5.4 Intégrales définies possédant un point singulier sur le contour d'intégration

Les intégrales impropres de la forme $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ avec $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

Supposons que $f(z)$ admet des pôles sur l'axe des réels. Supposons que $z = c$ est un pôle de la fonction $f(z)$ sur l'axe des réels



Théorème 5.3. *Supposons que f possède un pôle simple $z = c$ sur l'axe des réels. Si γ_r est le contour défini par $z = c + re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, alors*

$$\lim_{r \to 0} \int_{\gamma_r} f(z)dz = \pi i Res(f, c).$$

Preuve. f peut s'écrire $f(z) = \frac{a_{-1}}{z-c} + g(z)$ où g est holomorphe au voisinage de l'origine et $a_{-1} = Res(f, c)$. Donc

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_r} f(z)dz &= \int_{\gamma_r} \frac{a_{-1}}{z-c}dz + \int_{\gamma_r} g(z)dz \\ &= \int_0^{\pi} \frac{a_{-1}}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta + \int_{\gamma_r} g(z)dz \\ &= i\pi a_{-1} + \int_{\gamma_r} g(z)dz \end{aligned}$$

on a

$$\left| \int_{\gamma_r} g(z)dz \right| \leq \pi r \sup_{z \in \gamma_r} |g(z)|$$

comme g est holomorphe, elle est bornée au voisinage de c, donc

$$\lim_{r \to 0} \int_{\gamma_r} g(z)dz = 0$$

ainsi

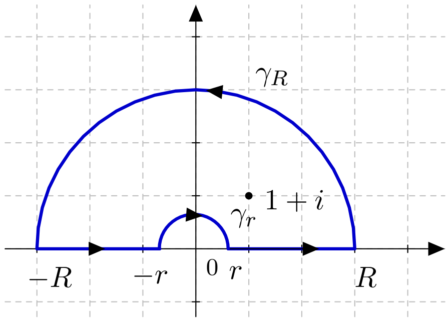
$$\lim_{r \to 0} \int_{\gamma_r} f(z)dz = i\pi Res(f, c)$$

Exemple 5.4. *Calculer*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2 - 2x + 2)} dx.$$

Posons

$$f(z) = \frac{1}{z(z^2 - 2z + 2)} = \frac{1}{z(z - 1 - i)(z - 1 + i)},$$



$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z(z^2-2z+2)}dz &= \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z(z^2-2z+2)}dz + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x(x^2-2x+2)}dx \\ &+ \int_{\gamma_r^-} \frac{e^{iz}}{z(z^2-2z+2)}dz + \int_{r}^{R} \frac{e^{ix}}{x(x^2-2x+2)}dx \\ &= 2\pi i Res(e^{iz}f(z), 1+i).\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}Res(e^{iz}f(z), 1+i) = \lim_{z\to 1+i}(z-1-i)e^{iz}f(z) &= -\frac{1+i}{4}e^{i-1}. \\ &= -\frac{e^{-1}}{4}(\cos 1+\sin 1) - i\frac{e^{-1}}{4}(\sin 1-\cos 1).\end{aligned}$$
- $$\int_{\gamma_r^-} \frac{e^{iz}}{z(z^2-2z+2)}dz = -\int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z(z^2-2z+2)}dz.$$
$$\longrightarrow -\pi i Res(\frac{e^{iz}}{z(z^2-2z+2)}, 0) = -\frac{\pi i}{2}, \quad quand \ \ r\to 0.$$
- $$\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z(z^2-2z+2)}dz \longrightarrow 0 \ \ quand \ \ R\to +\infty, \ car \ \lim_{|z|\to+\infty} f(z) = 0.$$

Si $r \to 0$ et $R \to +\infty$ on obtient

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2-2x+2)}dx - \frac{\pi i}{2} = 2\pi i\left(-\frac{1+i}{4}e^{i-1}\right) \\ \Rightarrow &\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2-2x+2)}dx = \frac{\pi i}{2}(-(1+i)e^{i-1}+1).\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2-2x+2)}dx = \frac{\pi}{2}(1-e^{-1}(\cos 1+\sin 1)).$$

5.5 Intǵrales de la forme $\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}Q(x)dx$

Si la fonction est de la forme $f(z) = z^{\alpha-1}Q(z)$ avec f ayant un point critique en $z = 0$, alors il faut faire une coupure depuis $z = 0$. Si la fonction Q n'a pas de pôles en $z = 0$ et si les conditions du théorème 5.1 sont vérifiées, alors

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}Q(x)dx = -\frac{\pi e^{-\pi\alpha i}}{sin(\pi\alpha)}\sum_{j=1}^{n} Res(z^{\alpha-1}Q(z), z_j).$$

5.6 Somme de quelques séries numériques

Nous mentionnons ici quelques formules pour déterminer la somme de quelques séries particulières.

Théorème 5.4. *Soit $f : D \to \mathbb{C}$, une fonction analytique dans le domaine $D = \mathbb{C} \setminus \{z_1, ..., z_n\}$ où z_j n'appartient pas à $\mathbb{Z}$.*
S'il existe des constantes $R, c > 0$ et $a > 1$ telles que

$$|f(z)| \leq \frac{c}{|z|^a}, \qquad pour \quad |z| \geq R.$$

Alors, la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)$ est convergente avec

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = -\pi \sum_{j=1}^{n} Res(\cot(\pi z), z_j)$$

5.7 Exercices

Exercice 5.1. Calculer les intégrales suivantes

$$\textbf{1.} \quad \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2}+\cos(\theta)}, \qquad \textbf{2.} \quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\theta)d\theta}{5+\cos(\theta)}.$$

Solution

1.
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2}+\cos(\theta)} = \int_{|z|=1} \frac{1}{\sqrt{2}+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\frac{dz}{iz}$$
$$= \frac{2}{i}\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+2\sqrt{2}z+1} = \frac{2}{i}\int_{|z|=1}\frac{dz}{(z-1+\sqrt{2})(z+1+\sqrt{2})}$$
$$= \frac{2}{i}2\pi i Res\left(\frac{1}{(z-1+\sqrt{2})(z+1+\sqrt{2})}, 1-\sqrt{2}\right)$$
$$= 4\pi \lim_{z\to 1-\sqrt{2}}(z-1+\sqrt{2})\frac{1}{(z-1+\sqrt{2})(z+1+\sqrt{2})} = 2\pi.$$

2. $$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(\theta)d\theta}{5+\cos(\theta)} = Re\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}d\theta}{5+\cos(\theta)}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}d\theta}{5+\cos(\theta)} &= \int_{|z|=1} \frac{z}{5+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\frac{dz}{iz} = \frac{2}{i}\int_{|z|=1}\frac{zdz}{z^2+10z+1}\\
&= \frac{2}{i}\int_{|z|=1}\frac{zdz}{(z+5-2\sqrt{6})(z+5+2\sqrt{6})}\\
&= \frac{2}{i}2\pi i Res\left(\frac{z}{(z+5-2\sqrt{6})(z+5+2\sqrt{6})}, -5+2\sqrt{6}\right)\\
&= 4\pi \lim_{z\to -5+2\sqrt{6}} (z+5-2\sqrt{6})\frac{z}{(z+5-2\sqrt{6})(z+5+2\sqrt{6})}\\
&= \pi\frac{-5+2\sqrt{6}}{\sqrt{6}}.
\end{aligned}$$

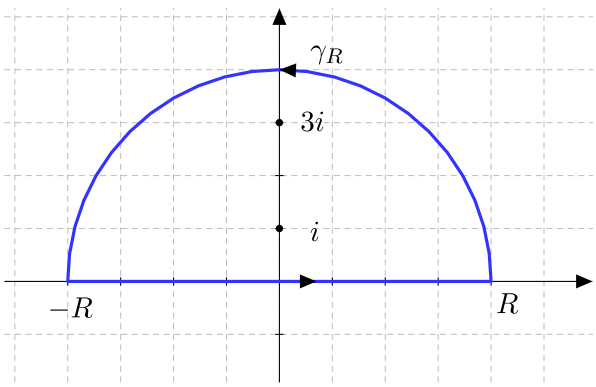
Exercice 5.2. Calculer les intégrales suivantes

1. $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)},$$ **2.** $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3},$$

3. $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}.$$

Solution

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$.



$$\int_\gamma \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+9)} = 2\pi i\left[Res(f,i)+Res(f,3i)\right]$$

$$Res(f,i) = \frac{1}{16i}, \quad Res(f,3i) = -\frac{1}{48i}$$

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+9)} = 2\pi i\left(\frac{1}{16i}-\frac{1}{48i}\right) = \frac{\pi}{12}.$$

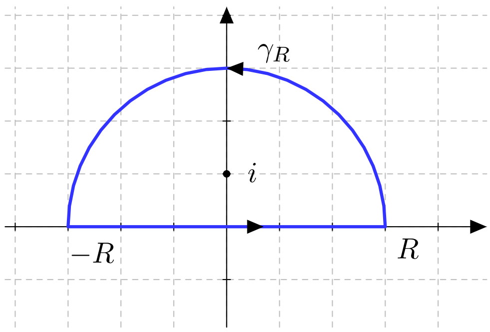
D'autre part,

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+9)} = \int_{\gamma_R} \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+9)} + \int_{-R}^{R} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)}.$$

Quand $R \to +\infty$ on a $\int_{\gamma_R} \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+9)} \to 0$ car le degré de $(z^2+1)(z^2+9)$ est $4 \geq 0+2$. D'après le théorème 5.1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)} = \frac{\pi}{12}.$$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$.



$$\int_\gamma \frac{dz}{(z^2+1)^3} = 2\pi i Res(f,i)$$

$$Res(f,i) = \frac{1}{2}\lim_{z\to i}\left[(z-i)^3\frac{1}{(z^2+1)^3}\right]'' = \frac{3}{16i}$$

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z^2+1)^3} = 2\pi i\left(\frac{3}{16i}\right) = \frac{3\pi}{8}.$$

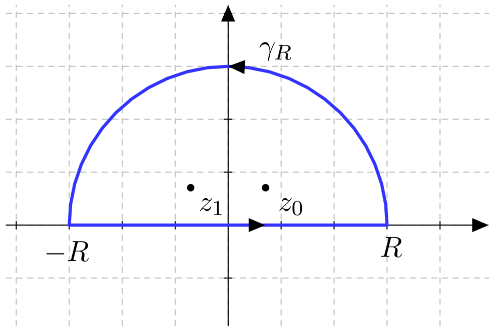
On a aussi

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z^2+1)^3} = \int_{\gamma_R} \frac{dz}{(z^2+1)^3} + \int_{-R}^{R} \frac{dx}{(x^2+1)^3}.$$

Quand $R \to +\infty$ on a $\int_{\gamma_R} \frac{dz}{(z^2+1)^3} \to 0$ car le degré de $(z^2+1)^3$ est $6 \geq 0+2$. D'après le théorème 5.1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{3\pi}{8}.$$

3. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}$.



On calcule $\int_\gamma \frac{dz}{z^4+1}$.

$z^4+1=0 \Rightarrow z_k = e^{\frac{(2k+1)\pi i}{4}}$, $k=0,1,2,3$.
$z_0 = e^{\frac{\pi i}{4}}$, $z_1 = e^{\frac{3\pi i}{4}}$, $z_2 = e^{\frac{5\pi i}{4}}$ et $z_3 = e^{\frac{7\pi i}{4}}$.

Les singularités à l'intérieur du γ sont z_0 et z_1.

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^4+1} = 2\pi i \left[Res(f, e^{\frac{\pi i}{4}}) + Res(f, e^{\frac{3\pi i}{4}}) \right].$$

$$Res(f, e^{\frac{\pi i}{4}}) = \frac{1}{4e^{\frac{3\pi i}{4}}}, \qquad Res(f, e^{\frac{3\pi i}{4}}) = \frac{1}{4e^{\frac{9\pi i}{4}}}.$$

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^4+1} = 2\pi i \left[\frac{1}{4e^{\frac{3\pi i}{4}}} + \frac{1}{4e^{\frac{9\pi i}{4}}} \right] = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

D'autre part

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^4+1} = \int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^4+1} + \int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^4+1}.$$

Quand $R \to +\infty$ on a $\int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^4+1} \to 0$ car le degré de z^4+1 est $4 \geq 0+2$. D'après le théorème 5.1

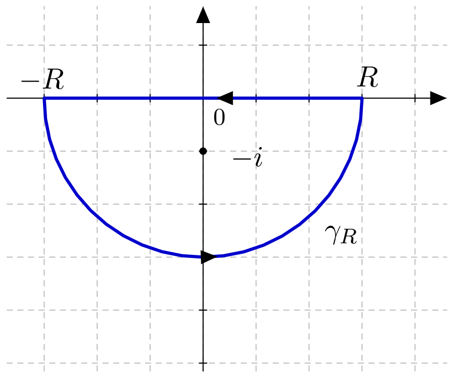
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

Exercice 5.3. Calculer les intégrales suivantes

$$\textbf{1.} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x+i} dx, \qquad \textbf{2.} \quad \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

Solution

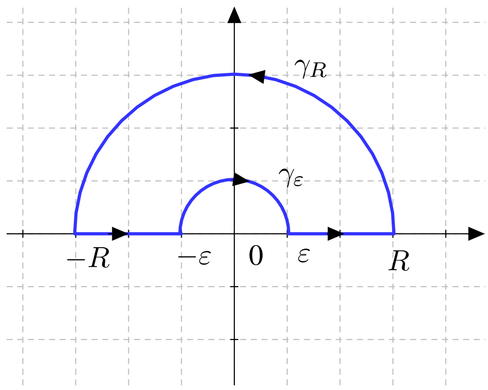
$$1. \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x+i} dx = \frac{1}{2i} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x+i} dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ix}}{x+i} dx \right]$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ix}}{x+i}dx = \int_{\gamma} \frac{e^{-iz}}{z+i}dz = 2\pi i Res(f,-i) = 2\pi i e^{-1}.$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x+i}dx &= \frac{1}{2i}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x+i}dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ix}}{x+i}dx\right] \\ &= \frac{1}{2i}(0 - 2\pi i e^{-1}) = \pi e^{-1}.\end{aligned}$$

2. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$



On a

$$\int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z}dz = \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z}dz + \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x}dx + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{x}dx + \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z}dz = 0.$$

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z}dz = 0.$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z}dz = -i\pi Res(f,0) = -i\pi.$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = i\pi,$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi \Rightarrow \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

<u>Exercice</u> 5.4. 1. Calculer l'intégrale suivante

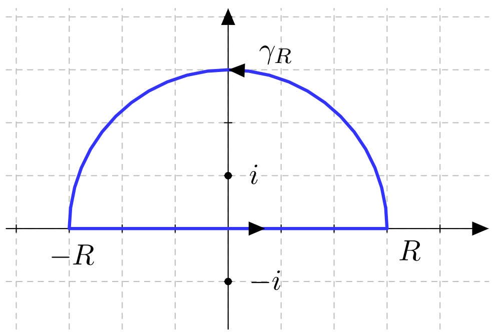
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{3ix}}{x-i} dx.$$

2. En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos(3x) + x\sin(3x)}{x^2+1} dx.$$

Solution

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{3ix}}{x-i} dx.$



On a

$$\int_{\gamma} \frac{e^{3iz}}{z-i} dz = 2\pi i Res(f,i) = 2\pi i e^{-3}.$$

Donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{3ix}}{x-i} dx = \frac{2\pi i}{e^3}.$$

2. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(3x)+x\sin(3x)}{x^2+1} dx = ?$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{3ix}}{x-i} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+i)e^{3ix}}{x^2+1} dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+i)(\cos(3x)+i\sin(3x))}{x^2+1} dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos(3x)-\sin(3x)+i\cos(3x)+ix\sin(3x)}{x^2+1} dx \\
&\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(3x)+x\sin(3x)}{x^2+1} dx = \frac{2\pi}{e^3} \\
&\Rightarrow \int_{0}^{+\infty} \frac{\cos(3x)+x\sin(3x)}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{e^3}.
\end{aligned}$$

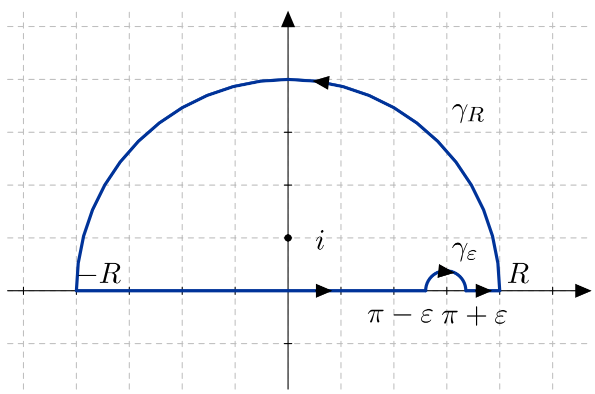
Exercice 5.5. Calculer les intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x dx}{(x^2+1)(x-\pi)}$, **2.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$,

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2+1} dx$.

Solution

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x dx}{(x^2+1)(x-\pi)} = ?$



$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{e^{iz}dz}{(z^2+1)(z-\pi)} &= \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}dz}{(z^2+1)(z-\pi)} + \int_{-R}^{\pi-\varepsilon} \frac{e^{ix}dz}{(x^2+1)(x-\pi)} \\ &+ \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{e^{iz}dz}{(z^2+1)(z-\pi)} + \int_{\pi+\varepsilon}^{R} \frac{e^{ix}dx}{(x^2+1)(x-\pi)} \\ &= 2\pi i Res(f,i) = 2\pi i \left(\frac{e^{-1}}{2i(i-\pi)}\right) = \frac{\pi}{(i-\pi)e}.\end{aligned}$$

D'autre part, d'après le théorème 5.2 on a

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}dz}{(z^2+1)(z-\pi)} = 0$$

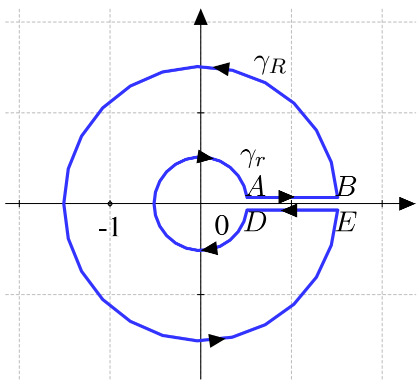
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{e^{iz}dz}{(z^2+1)(z-\pi)} = -i\pi Res(f,i) = -i\pi\left(\frac{e^{i\pi}}{\pi^2+1}\right) = \frac{i\pi}{\pi^2+1}.$$

Donc

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}dx}{(x^2+1)(x-\pi)} = \frac{-i\pi}{\pi^2+1} + \frac{\pi}{(i-\pi)e} = \frac{-\pi^2 e^{-1} - i\pi(1+e^{-1})}{\pi^2+1}, \\ \Rightarrow &\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x dx}{(x^2+1)(x-\pi)} = -\frac{\pi(1+e^{-1})}{\pi^2+1}.\end{aligned}$$

2.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}.$$



$$\int_\gamma \frac{dz}{\sqrt{z}(z+1)} = 2\pi i Res(f,-1)$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
&\int_{\gamma_R}\frac{dz}{\sqrt{z}(z+1)}+\int_{DE}\frac{dz}{\sqrt{z}(z+1)}+\int_{\gamma_r}\frac{dz}{\sqrt{z}(z+1)}+\int_{AB}\frac{dz}{\sqrt{z}(z+1)}=\\
=\;& 2\pi i Res(f,-1)=2\pi i\lim_{z\to -1}(z+1)\frac{1}{\sqrt{z}(z+1)}\\
=\;& 2\pi i\lim_{z\to e^{\pi i}}\frac{1}{\sqrt{z}}=2\pi i e^{-i\frac{\pi}{2}}=2\pi.
\end{aligned}$$

Nous remarquons que

$$\int_{DE}\frac{dz}{\sqrt{z}(z+1)}=\int_R^r\frac{e^{2\pi i}dx}{\sqrt{e^{2\pi i}x}(e^{2\pi i}x+1)}=-\int_R^r\frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}=\int_r^R\frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)},$$

et

$$\int_{AB}\frac{dz}{\sqrt{z}(z+1)}=\int_r^R\frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}.$$

D'autre part et d'après le théorème 5.1, on affirme que

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R}\frac{dz}{\sqrt{z}(z+1)}=0,$$

et

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_r}\frac{dz}{\sqrt{z}(z+1)}=0.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to+\infty r\to 0}&\left[\int_{\gamma_R}\frac{dz}{\sqrt{z}(z+1)}+\int_r^R\frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}\right.\\
&\left.+\int_{\gamma_r}\frac{dz}{\sqrt{z}(z+1)}+\int_r^R\frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}\right]=2\pi.
\end{aligned}$$

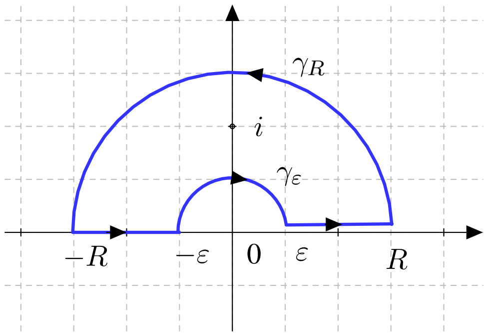
Ceci implique

$$\begin{aligned}
&2\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}=2\pi\\
\Rightarrow\;&\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}=\pi.
\end{aligned}$$

3. Soit

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+1}dx$$

Soit la fonction $f(z)=\frac{\ln z}{z^2+1}$, on va intégrer la fonction f sur



car $\frac{1}{z^2+1}$ est paire. On a alors

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{\ln z}{z^2+1}dz &= 2\pi i Res(f,i)\\ &= 2\pi i \lim_{z\to i}(z-i)\frac{\ln z}{z^2+1}\\ &= 2\pi i\frac{\ln i}{2i} = i\frac{\pi^2}{2}.\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{\ln z}{z^2+1}dz &= \int_\varepsilon^R \frac{\ln x}{x^2+1}dx + \int_{\gamma_R}\frac{\ln z}{z^2+1}dz\\ &+ \int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{\ln x}{x^2+1}dx + \int_{\gamma_\varepsilon}\frac{\ln z}{z^2+1}dz\\ &= i\frac{\pi^2}{2}.\end{aligned}$$

Nous remplaçons x par $-x$ dans $\int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{\ln x}{x^2+1}dx$, nous avons alors

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{\ln z}{z^2+1}dz &= \int_\varepsilon^R \frac{\ln x}{x^2+1}dx + \int_{\gamma_R}\frac{\ln z}{z^2+1}dz\\ &+ \int_\varepsilon^R\frac{\ln x}{x^2+1}dx + i\pi\int_\varepsilon^R\frac{dx}{1+x^2} + \int_{\gamma_\varepsilon}\frac{\ln z}{z^2+1}dz\\ &= i\frac{\pi^2}{2}.\end{aligned}$$

Quand $R \to +\infty$ et $\varepsilon \to 0$ et d'après les théorèmes du cours, alors

$$\int_{\gamma_R}\frac{\ln z}{z^2+1}dz \to 0 \text{ et } \int_{\gamma_\varepsilon}\frac{\ln z}{z^2+1}dz \to 0$$

et donc

$$2\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+1}dx + i\pi\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = i\frac{\pi^2}{2}.$$

Ce qui implique que

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2+1} dx = 0$$

Exercice 5.6. Calculer les intégrales suivantes

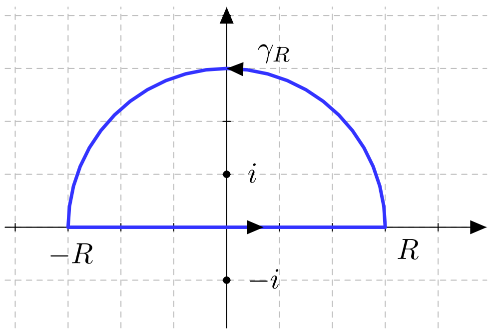
$$\mathbf{1.} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x dx}{x^2+1}, \qquad \mathbf{2.} \quad \int_{0}^{+\infty} \frac{\cos x dx}{x^2+1}.$$

Solution

Soit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx$$

Soit la fonction $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+1}$, on va intégrer la fonction f sur



On a alors

$$\begin{aligned} \int_\gamma \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz &= 2\pi i Res(f, i) \\ &= 2\pi i \lim_{z \to i} (z-i) \frac{e^{iz}}{z^2+1} \\ &= 2\pi i \frac{e^{-1}}{2i} = \pi e^{-1}. \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \int_\gamma \frac{\ln z}{z^2+1} dz &= \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{x^2+1} dx + \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz \\ &= \pi e^{-1}. \end{aligned}$$

Quand $R \to +\infty$ et d'après théorème 5.2, on a

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1} = 0 \quad \text{car le pôlynome} \quad z^2+1 \quad \text{est de degré 2 qui est } \geq 0+1$$

et donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+1}dx = \pi e^{-1}.$$

Ce qui implique que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}dx = \pi e^{-1}.$$

et

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}dx = \frac{\pi e^{-1}}{2}.$$

Exercice 5.7. Calculer

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2+a^2}.$$

Solution

Puisque la fonction

$$|f(z)| = \left|\frac{1}{z^2+a^2}\right| \leq \frac{1}{|z|^2}$$

qui est bornée quand $|z| \geq 1$, alors on peut appliquer la formule suivante

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = -\pi \sum_{k=1}^{n} Res(\cot(\pi z)f(z), z_k).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2+a^2} &= -\pi\left(\frac{1}{2ia}\cot(i\pi a) - \frac{1}{2ia}\cot(-i\pi a)\right) \\
&= -\frac{\pi}{ia}\frac{\cos(i\pi a)}{\sin(i\pi a)} = -\frac{\pi}{ia}\frac{\cosh(\pi a)}{i\sinh(\pi a)} = \frac{\pi}{a}\coth(\pi a).
\end{aligned}$$

En plus on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+a^2} &= -\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2+a^2} \\
&= -\frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{2a}\coth(\pi a).
\end{aligned}$$

5.8 Exercices supplémentaires

Exercice 5.8. 1. Calculer, en coordonnées polaires, l'intégrale

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dy.$$

En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

2. En utilisant la question 1, calculer les intégrales de Fresnel

$$I = \int_0^\infty \sin\left(x^2\right) dx$$

et

$$J = \int_0^\infty \cos\left(x^2\right) dx.$$

(On applique la formule des résidus à la fonction $f(z) = e^{iz^2}$). Justifier le choix du contour ?

Exercice 5.9. 1. Calculer les intégrales suivantes

$$a) \quad \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}, \quad a, b > 0, \quad b) \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}},$$

$$c) \quad \int_0^\infty \frac{\cos(mx)dx}{x^2+a^2}.$$

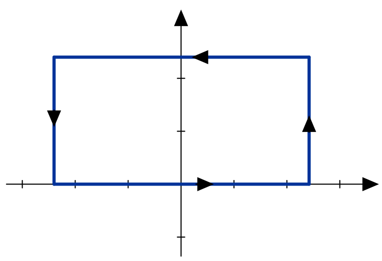
2. Calculer l'intégrale

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} e^{-ax^2} dx.$$

En intégrant, pour $\alpha > 0$,

$$f(z) = e^{i\alpha z} e^{-az^2}$$

sur le rectangle de la figure, puis en faisant tendre R vers l'infini.



Exercice 5.10. Soit $f(z)$ une fonction analytique à l'intérieur d'un cercle C et sur C, ayant pour équation $|z| = R$.

1. Ecrire la première formule intégrale de Cauchy pour la fonction $f(z)$ au point $z = re^{i\theta}$ intérieur à C.

2. Montrer que le point $z' = \frac{R^2}{r}e^{i\theta}$ est l'extérieur du cercle C. En déduire la valeur de l'intégrale $J = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(w)}{w - \frac{R^2}{r}e^{i\theta}}dw$.

3. Montrer que

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi) + r^2} f(Re^{i\phi})d\phi.$$

Si $u(r, \theta)$ désigne la partie réelle de $f(z)$, en déduire que

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi) + r^2} u(R, \phi)d\phi.$$

Que pensez-vous ? Vérifier que la fonction $u(r, \theta)$ est harmonique, c'est-à-dire

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

On considère un disque de rayon $R = 1$ plongé dans un potentielle électrique V sans source. (On rappelle que dans ce cas que la fonction V est harmonique). Supposons qu'en puisse mesurer le potentiel électrique V sur le bord du disque. Peut-on déduire le potentiel électrique à l'intérieur du disque ?

Application : Si $V(1, \theta) = 1$, $0 < \theta < \pi$ et $V(1, \theta) = -1$, $\pi < \theta < 2\pi$. En déduire le potentiel à l'intérieur du disque.

4. En utilisant les formules intégrales démontrées dans la question 3, calculer l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{\cos\phi}\cos(\sin\phi)}{5 - 4\cos(\theta - \phi)}d\phi = \frac{2\pi}{3}e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta).$$

Chapitre 6

Examens

Sommaire

6.1 Examen de rattrapage 2008

Université Abou-Bakr-Belkaid de Tlemcen — **Niveau : ST/L2/S2**
Département des Sciences et techniques — **UEF4/Math4**
2007-2008

Examen de rattrapage.

Exercice 1(7 Pts)
Soit la fonction

$$f(z) = \frac{1 - \sin z}{z^3 - z}$$

1) Déterminer les singularités de la fonction f.
2) Calculer l'intégrale

$$\int_\gamma f(z)dz$$

où
a) $\gamma = \{z \in \mathbb{C}/|z| = \frac{1}{2}\}$
b) $\gamma = \{z \in \mathbb{C}/|z-1| = \frac{1}{2}\}$
c) $\gamma = \{z \in \mathbb{C}/|z-i| = \frac{1}{2}\}$.

Exercice 2(6 Pts)

1) Résoudre l'équation $z^3 = 1$ en utilisant la forme exponentielle.
2) On note j la solution complexe de partie imaginaire positive.
a) Vérifier que j^2 est aussi solution.
b) Montrer que $j^2 = \frac{1}{j} = \overline{j}$
c) Calculer $1 + j + j^2$.

Exercice 3(7 Pts)

Soit la fonction

$$f(z) = \frac{1}{z^2+9}$$

1) Calculer par la méthode des résidus $\int_\gamma f(z)dz$ où γ est un demi-cercle de rayon R centré à l'origine.
2) En déduire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+9}.$$

Solution

Exercice 1(7 Pts)

1) Les singularités de la fonction f sont 0, 1 et -1 qui sont des pôles simples.
2) a) Soit $\gamma = \{z \in \mathbb{C}/|z| = \frac{1}{2}\}$. Puisque, il y a une seule singularité à l'intérieur de γ, alors par la méthode des résidus,

$$\int_\gamma \frac{1-\sin z}{z^3-z} dz = 2\pi i Res(f, 0)$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to 0} z\left(\frac{1-\sin z}{z(z^2-1)}\right) = -2\pi i.$$

b) Soit $\gamma = \{z \in \mathbb{C}/|z-1| = \frac{1}{2}\}$. Puisque, il y a une seule singularité à l'intérieur de γ, alors

$$\int_\gamma \frac{1-\sin z}{z^3-z} dz = 2\pi i Res(f,1)$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{1-\sin z}{z(z-1)(z+1)} = (1-\sin 1)\pi i.$$

c) Soit $\gamma = \{z \in \mathbb{C}/|z-i| = \frac{1}{2}\}$. Puisque, il n'y a pas de singularité à l'intérieur de γ, alors par le théorème de Cauchy,

$$\int_\gamma \frac{1-\sin z}{z^3-z} dz = 0.$$

<u>Exercice 2</u>(6 Pts)

1) Nous remarquons que l'équation $z^3 = 1$ possède 3 solutions données par :

$$z_k = \sqrt[3]{1} = \cos(\frac{2\pi k}{3}) + i\sin(\frac{2\pi k}{3}), \quad k = 0, 1, 2.$$

Ainsi, les solutions sont

$$z_0 = 1$$

$$z_1 = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3}) = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$z_2 = \cos(\frac{4\pi}{3}) + i\sin(\frac{4\pi}{3}) = e^{i\frac{4\pi}{3}}.$$

2) La solution complexe de partie imaginaire positive est

$$j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

a) On peut voir facilement que $j^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$ qui est encore solution de l'équation $z^3 = 1$.

b) Nous remarquons que

$$j^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos(\frac{4\pi}{3}) + i\sin(\frac{4\pi}{3})$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

$$= \cos(\frac{-2\pi}{3}) + i\sin(\frac{-2\pi}{3})$$

$$= \cos(\frac{2\pi}{3}) - i\sin(\frac{4\pi}{3}) = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

$$= \frac{1}{j} = \bar{j}.$$

c) Par les réponses précédentes, on a

$$1 + j + j^2 = 1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

$$= 1 + 2\cos(\frac{2\pi}{3}).$$

Exercice 3(7 Pts)

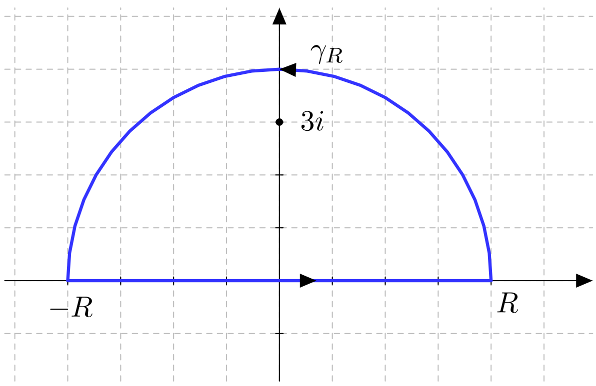
Soit la fonction

$$f(z) = \frac{1}{z^2+9}$$

1) Les pôles de la fonction f sont $3i$ et $-3i$ qui sont des pôles simples. Puisque le contour γ ne contient que la singularité $3i$, alors par la méthode des résidus on a

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2+9} = 2\pi i Res(f, 3i)$$

$$= 2\pi i (\lim_{z\to 3i} \frac{(z-3i)}{(z-3i)(z+3i)}) = \frac{\pi}{3}.$$



2) Nous remarquons que

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2+9} = \int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^2+9} + \int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^2+9} = \frac{\pi}{3}.$$

Après limite, quand $R \to +\infty$, on a

$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^2+9} = 0$ car le pôlynome z^2+9 est de degré 2 qui est $\geq 0+2$ (Voir théorème 5.1).

Ainsi,

$$\lim_{R\to+\infty} \int_\gamma \frac{dz}{z^2+9} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+9} = \frac{\pi}{3}.$$

6.2 Examen 2009

Université Abou-Bakr-Belkaid de Tlemcen **Niveau : ST/L2/S2**
Département des Sciences et techniques **UEF4/Math4**
2008-2009

Examen final.

Exercice 1(4 Pts)

Soit le point M d'affixe z différent de i. On pose

$$w = \frac{z+i}{z-i}$$

1. Déterminer l'ensemble des points M tels que $Re(w) = 0$.
2. Déterminer l'ensemble des points M tels que $Im(w) = 0$.

Exercice 2(5 Pts)

Soit la fonction

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+3)}$$

Développer la fonction f en série de Laurent dans les régions suivantes

1. $\{z \in \mathbb{C}/ \quad |z| < 1\}$, 2. $\{z \in \mathbb{C}/ \quad 1 < |z| < 3\}$, 3. $\{z \in \mathbb{C}/ \quad 3 < |z|\}$.

Exercice 3(5 Pts)

Calculer l'intégrale

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z^2(z-1)} dz$$

où

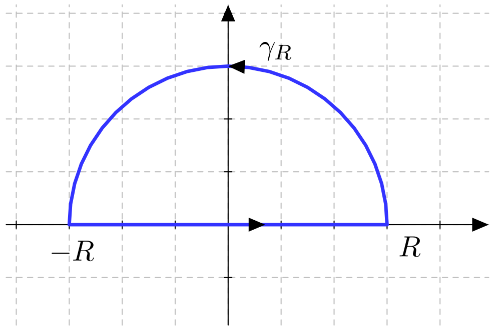
1. $\gamma = \{z \in \mathbb{C}/ \quad |z| = 2\}$.
2. $\gamma = \{z \in \mathbb{C}/ \quad |z-1| = \frac{1}{2}\}$.
3. $\gamma = \{z \in \mathbb{C}/ \quad |z-2| = \frac{1}{2}\}$.

Exercice 4(6 Pts)

Soit la fonction

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+1}$$

1. Déterminer les pôles de la fonctions f.
2. Calculer par la méthode des résidus $\int_\gamma f(z)ds$ où γ est le contour suivant



3. En déduire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}dx \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}dx.$$

S o l u t i o n

<u>Exercice 1</u>(4 Pts)

Soit $z = x + iy, \qquad x, y \in \mathbb{R}$, alors

$$w = \frac{x+iy+i}{x+iy-i} = \frac{x+i(y+1)}{x+i(y-1)}$$

$$= \frac{x+i(y+1)(x-i(y-1))}{(x+i(y-1)(x-i(y-1))}$$

$$= \frac{x^2+i(y+1)x-ix(y-1)+y2-1}{x^2+(y-1)^2}$$

$$= \frac{x^2+y^2-1+2ix}{x^2+(y-1)^2}.$$

1. $Re(w) = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2-1=0$.
L'ensemble des points M est un cercle de rayon 1 centré à l'origine d'equation $x^2+y^2=1$.

2. $Im(w) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. L'ensemble des points est une droite d'equation $x = 0$.

<u>Exercice 2</u>(4 Pts)

Soit
$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+3)}.$$
On a
$$\frac{1}{(z-1)(z+3)} = \frac{1}{4(z-1)} - \frac{1}{4(z+3)}.$$
a. Le développement dans la région $\{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$.
$$\frac{1}{z-1} = \frac{-1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$
$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{3(\frac{z}{3}+1)} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{z}{3})^n$$
Ainsi,
$$f(z) = -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{12}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{z}{3})^n.$$
b. Le développement dans la région $\{z \in \mathbb{C}, 1 < |z| < 3\}$.
$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z(1-\frac{1}{z})} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^n.$$
$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{z}{3})^n.$$
Ainsi,
$$f(z) = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^{n+1} - \frac{1}{12}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{z}{3})^n.$$

Exercice 3(6 Pts)

Les singularités de la fonction $f(z) = \frac{e^z}{z^2(z-1)}$ sont 0 qui est un pôle d'ordre 2 et 1 qui est un pôle simple.
$$Res(f,0) = \lim_{z\to 0}\frac{1}{1!}[z^2\frac{e^z}{z^2(z-1)}]' = \lim_{z\to 0}\frac{e^z(z-1)-e^z}{(z-1)^2} = -2$$
$$Res(f,1) = \lim_{z\to 1}\frac{(z-1)e^z}{z^2(z-1)} = e.$$
1. Soit $\gamma = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 2\}$. Puisque il y a deux singularités à l'intérieur de γ, alors
$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{e^z}{z^2(z-1)} &= 2\pi i(Res(f,0) + Res(f,1))\\ &= 2\pi i(-2+e).\end{aligned}$$

2. Soit $\gamma = \{z \in \mathbb{C}, |z-1| = \frac{1}{2}\}$. Dans cette région, on a une seule singularité à l'intérieur. Ainsi

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z^2(z-1)} = 2\pi i Res(f, 1) = 2\pi i e.$$

(On peut utiliser aussi la formule intégrale de Cauchy).

3. Soit $\{z \in \mathbb{C}, |z-2| = \frac{1}{2}\}$. Aucune singularité à l'intérieur de cette région, ainsi par le théorème de Cauchy, on a

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z^2(z-1)} = 0.$$

Exercice 4(6 Pts)

Soit la fonction

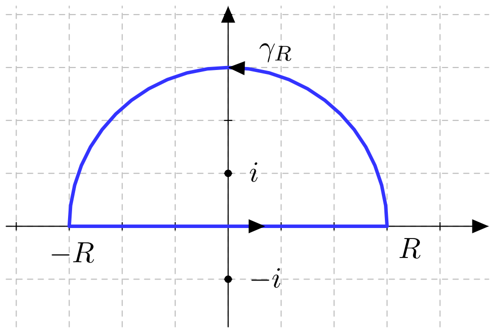
$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+1}$$

1. Les pôles de la fonction f sont i et $-i$ qui sont des pôles simples.

2. Puisque le contour γ ne contient que la singularité i, alors par la méthode des résidus on a

$$\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z^2+1} = 2\pi i Res(f, i)$$

$$= 2\pi i (\lim_{z \to i} \frac{(z-i)e^{iz}}{(z-i)(z+i)}) = \frac{\pi}{e}.$$



3. Nous remarquons que

$$\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z^2+1} = \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1} + \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{x^2+1} = \frac{\pi}{e}.$$

Après limite, quand $R \to +\infty$, on a

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1} = 0 \quad \text{car le pôlynome} \quad z^2+1 \quad \text{est de degré 2 qui est } \geq 0+1$$

(Voir théorème 5.2).
Ainsi,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{e} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x dx}{x^2+1} + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^2+1}$$

Ceci implique que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{e}.$$

Le faite que la fonction est paire, nous aurons

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos x dx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2e}.$$

6.3 Examen de rattrapage 2009

Université Abou-Bakr-Belkaid de Tlemcen
Département des Sciences et techniques
2008-2009

Niveau : ST/L2/S2
UEF4/Math4

Examen de rattrapage.

Exercice 1(7 Pts)

Calculer l'intégrale

$$\int_\gamma \frac{dz}{z(z-1)^3}$$

où

1)$\gamma = \{z \in \mathbb{C}/|z| = 2\}$.
2)$\gamma = \{z \in \mathbb{C}/|z| = \frac{1}{2}\}$.
3)$\gamma = \{z \in \mathbb{C}/|z+1| = \frac{1}{2}\}$.
4)$\gamma = \{z \in \mathbb{C}/|z-1| = \frac{1}{2}\}$.

Exercice 2(6 Pts)

Soit la fonction

$$f(z) = \frac{1}{z^2+2z}.$$

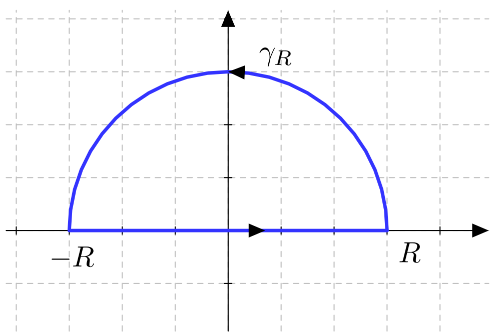
Développer la fonction f en série de Laurent au voisinage de 0.

Exercice 3(7 Pts)

Soit la fonction

$$f(z) = \frac{1}{z^2+z+1}$$

1)Calculer par la méthode des résidus $\int_\gamma f(z)dz$ où γ est le contour suivant



2) En déduire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}.$$

Solution

Exercice 1(7 Pts)

Les singularités de la fonction sont 0 qui est un pôle simple et 1 qui est un pôle d'ordre 3.

$$Res(f,0) = \lim_{z\to 0} z.\frac{1}{z(z-1)^3} = -1.$$

$$Res(f,1) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 1}((z-1)^3.\frac{1}{z(z-1)^3})''$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to 1}(\frac{1}{z})'' = \frac{1}{2}\lim_{z\to 1}(\frac{2}{z^3}) = 1.$$

1) Soit $\gamma = \{z \in \mathbb{C}/|z| = 2\}$. Puisque il y a deux singularités à l'intérieur de γ, alors

$$\int_\gamma \frac{dz}{z(z-1)^3} = 2\pi i[Res(f,0) + Res(f,1)]$$

$$= 2\pi i[-1+1] = 0.$$

2) Soit $\gamma = \{z \in \mathbb{C}/|z| = \frac{1}{2}\}$. Une seule singularité à l'intérieur, ainsi

$$\int_\gamma \frac{dz}{z(z-1)^3} = 2\pi i Res(f,0)$$

$$= -2\pi i.$$

3) Soit $\gamma = \{z \in \mathbb{C}/|z+1| = \frac{1}{2}\}$. Aucune singularité à l'intérieur, ainsi par le théorème de Cauchy,

$$\int_\gamma \frac{dz}{z(z-1)^3} = 0.$$

4) Soit $\gamma = \{z \in \mathbb{C}/|z-1| = \frac{1}{2}\}$. Une seule singularité à l'intérieur, ainsi

$$\int_\gamma \frac{dz}{z(z-1)^3} = 2\pi i Res(f,1)$$

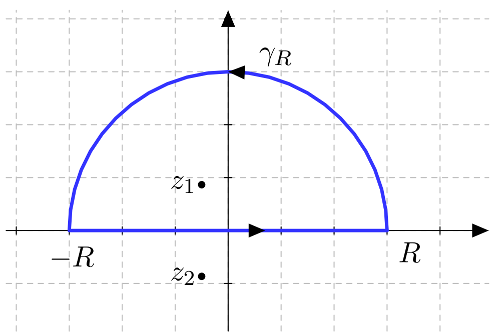
$$= 2\pi i.$$

Exercice 2(6 Pts)

Soit
$$f(z) = \frac{1}{z(z+2)}$$
a) Le développement de la fonction f dans la région $\{z \in \mathbb{C}/|z| < 2\}$.
$$f(z) = \frac{1}{z}.\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2z}.\frac{1}{1+\frac{z}{2}}$$
$$= \frac{1}{2z}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(\frac{z}{2})^n.$$
b) Le développement de la fonction f dans la région $\{z \in \mathbb{C}/|z| > 2\}$.
$$f(z) = \frac{1}{z}.\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z^2}.\frac{1}{1+\frac{2}{z}}$$
$$= \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(\frac{2}{z})^n.$$

<u>Exercice 3</u>(7 Pts)

1) Soit la fonction
$$f(z) = \frac{1}{z^2+z+1}.$$
Les pôles de la fonction sont
$$z_1 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \qquad z_2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$
Puisque le contour γ ne contient que la singularité z_1, ainsi,
$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2+z+1} = 2\pi i Res(f, z_1)$$
$$= 2\pi i \lim_{z\to z_1}(z-z_1).\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}$$
$$= \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$



2) Nous remarquons que

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2+z+1} = \int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^2+z+1} + \int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^2+x+1}$$
$$= \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

Après limite, quand $R \to +\infty$, on a $\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^2+z+1} = 0$ car le polynôme z^2+z+1 est de degré 2 qui est $\geq 0+2$ (voir théorème 5.1).
Ainsi,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

6.4 Examen 2010

Université Abou-Bakr-Belkaid de Tlemcen **Niveau : ST/L2/S2**
Département des Sciences et techniques **UEF4/Math4**
2009-2010

Examen final.

Exercice 1(4 Pts)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation

$$\frac{z}{z-1} = i.$$

2) Calculer le module et l'argument de la solution trouvée.
3) Calculer $\ln(z)$.
Exercice 2(6 Pts)

Calculer l'intégrale suivante

$$\int_\gamma \frac{\cos(z)}{(z+1)^2(z-1)} dz$$

où
1) $\gamma = \{z \in \mathbb{C}/|z-i| = \frac{1}{2}\}$.
2) $\gamma = \{z \in \mathbb{C}/|z-1| = 1\}$.
3) $\gamma = \{z \in \mathbb{C}/|z+1| = 1\}$.
4) $\gamma = \{z \in \mathbb{C}/|z| = 2\}$.
Exercice 3(4 Pts)

Soit la fonction

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z-4)}.$$

Développer la fonction f en série de Laurent au voisinage de 0.
Exercice 4(6 Pts)

Calculer l'intégrale suivante

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 3\cos(\theta)}.$$

Solution

Exercice 1(4 Pts)

1) On a

$$\frac{z}{z-1} = i \Rightarrow z - (z-1)i = 0$$

ceci implique que

$$z(1-i) = -i.$$

Ainsi,

$$z = \frac{-i}{1-i} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}.$$

2)Le module de la solution précédente est :

$$|z| = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

L'argument est :

$$\arg(z) = \arctan(-1) = \frac{-\pi}{4}.$$

3)Le logarithme complexe est :

$$\ln(z) = \ln|z| + i\arg(z)$$

$$= \ln(\frac{\sqrt{2}}{2}) - i\frac{\pi}{4}.$$

Exercice 2(6 Pts)

Les singularités de la fonction $f(z) = \frac{\cos(z)}{(z+1)^2(z-1)}$ sont -1 qui est un pôle d'ordre 2 et 1 qui est un pôle simple.

1) Soit $\gamma = \{z \in \mathbb{C}/|z-i| = \frac{1}{2}\}$. Puisque les singularités sont à l'extérieur de la région, alors par le théorème de Cauchy,

$$\int_\gamma \frac{\cos(z)}{(z+1)^2(z-1)} dz = 0.$$

2) Soit $\gamma = \{z \in \mathbb{C}/|z-1| = 1\}$. Dans cette région, on a une seule singularité à l'intérieur. Ainsi,

$$\int_\gamma \frac{\cos(z)}{(z+1)^2(z-1)} dz = 2\pi i Res(f,1)$$

$$= 2\pi i(\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{\cos(z)}{(z+1)^2(z-1)})$$

$$= \pi i(\frac{\cos(1)}{2}).$$

3) Soit $\gamma = \{z \in \mathbb{C}/|z+1| = 1\}$. Dans cette région, on a une seule singularité à l'intérieur. Ainsi,

$$\int_\gamma \frac{\cos(z)}{(z+1)^2(z-1)}dz = 2\pi i Res(f,-1)$$

$$= 2\pi i(\lim_{z\to -1} \frac{1}{1!}((z+1)^2\frac{\cos(z)}{(z+1)^2(z-1)})')$$

$$= 2\pi i(\lim_{z\to -1} \frac{-(z-1)\sin(z)-\cos(z)}{(z-1)^2})$$

$$= 2\pi i(\frac{-2\sin(1)-\cos(1)}{4}) = \pi i(\frac{-2\sin(1)-\cos(1)}{2}).$$

4) Soit $\gamma = \{z \in \mathbb{C}/|z| = 2\}$. Puisque, il y a deux singularités à l'intérieur de γ, alors

$$\int_\gamma \frac{\cos(z)}{(z+1)^2(z-1)}dz = 2\pi i[Res(f,-1)+Res(f,1)]$$

$$= 2\pi i(\frac{-2\sin(1)-\cos(1)}{4} + \frac{\cos(1)}{4}) = -\pi i\sin(1).$$

<u>Exercice 3</u>(4 Pts)

Soit

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z-4)}.$$

1) Le développement de f en série de Laurent au voisinage de 0 dans la région $\{z \in \mathbb{C}/|z| < 4\}$.

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\frac{1}{z-4} = \frac{1}{4z^2}\frac{1}{\frac{z}{4}-1} = -\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{z}{4})^n.$$

2) Le développement de f en série de Laurent dans la région $\{z \in \mathbb{C}/4 < |z| < +\infty\}$

$$f(z) = \frac{1}{z^2}[\frac{1}{z}.\frac{1}{1-\frac{4}{z}}] = \frac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{4}{z})^n.$$

<u>Exercice 4</u>(6 Pts)

Soit l'intégrale

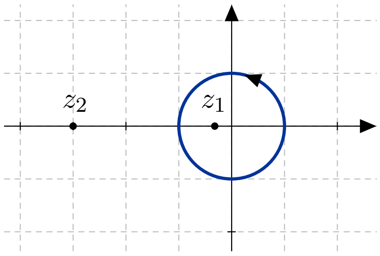
$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+3\cos(\theta)}.$$

L'idée est de convertir l'intégrale trigonométrique en une intégrale complexe. On a alors

$$I = \int_C \frac{1}{5 + 3(\frac{z+z^{-1}}{2})} \frac{dz}{iz}.$$

où C est un cercle de centre 0 et de rayon 1. Ainsi,

$$I = \frac{2}{i} \int_C \frac{1}{3z^2 + 10z + 3} dz.$$



Le polynôme $3z^2 + 10z + 3$ possède deux racines $z_1 = -\frac{1}{3}$ et $z_2 = -3$. Puisque le point $-\frac{1}{3}$ est à l'intérieur de C, alors nous devons calculer le résidu de ce point.

$$\begin{aligned} Res(\frac{1}{3z^2 + 10z + 3}, -\frac{1}{3}) &= \lim_{z \to \frac{-1}{3}} ((z + \frac{1}{3}) \frac{1}{(z + \frac{1}{3})(z + 3)}) \\ &= \frac{3}{8}, \end{aligned}$$

$$I = \frac{2}{i} \int_C \frac{1}{3z^2 + 10z + 3} dz = \frac{2}{i}(2\pi i)(\frac{3}{8}) = \frac{3\pi}{2}.$$

6.5 Examen de rattrapage 2010

Université Abou-Bakr-Belkaid de Tlemcen
Département des Sciences et techniques
2009-2010

Niveau : ST/L2/S2
UEF4/Math4

Examen de rattrapage.

Exercice 1(5 Pts)

Résoudre dans $\mathbb{C}$,

$$2i\sin z + e^{-iz} = 1 + i$$

Exercice 2(7 Pts)

Calculer l'intégrale curviligne suivante

$$\oint_C \overline{z}^2 dz$$

où C est le cercle d'équation $|z-1| = 1$.

Exercice 3(8 Pts)

Soit la fonction suivante

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 - 2z + 1}$$

1) Trouver les singularités de f.
2) Calculer l'intégrale $\int_\gamma f(z)dz$ où
   a) $\gamma = \{z \in \mathbb{C}/|z-1| = 1\}$
   b) $\gamma = \{z \in \mathbb{C}/|z+1| = 1\}$.

Solution

<u>Exercice 1</u>(5 Pts)

On remarque que

$$2i(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i})+e^{-iz}=1+i.$$

$$\Rightarrow e^{iz}=1+i.$$

$$\Rightarrow iz=\ln(1+i).$$

$$z=\frac{1}{i}(\ln(\sqrt{2})+i\frac{\pi}{4}).$$

$$\Rightarrow z=-i\ln(\sqrt{2})+\frac{\pi}{4}.$$

<u>Exercice 2</u>(7 Pts)

On remarque que

$$z=1+e^{it}\quad \text{avec}\quad 0\leq t\leq 2\pi,$$

et ceci implique que

$$dz=ie^{it}dt\quad \text{et}\quad \overline{z}=1+e^{-it}.$$

Ainsi,

$$\oint_C \overline{z}^2dz=\int_0^{2\pi}(1+e^{-it})^2(ie^{it})dt$$

$$=\int_0^{2\pi}(1+2e^{-it}+e^{-2it})(ie^{it})dt$$

$$=\int_0^{2\pi}(ie^{it}+2i+ie^{-it})dt$$

$$=i[\frac{e^{it}}{i}]_0^{2\pi}+2i[t]_0^{2\pi}+i[\frac{e^{-it}}{-i}]_0^{2\pi}$$

$$=4\pi i.$$

<u>Exercice 3</u>(8 Pts)

Soit la fonction

$$f(z)=\frac{e^{iz}}{z^2-2z+1}$$

1) On remarque que $z^2-2z+1=(z-1)^2$, ainsi la singularité est 1 qui est un pôle d'ordre 2.

2) Soit a)$\gamma=\{z\in\mathbb{C}/|z-1|=1\}$.

$$\int_\gamma f(z)dz=2\pi iRes(f,1)$$

$$= 2\pi i(\frac{1}{2}\lim_{z\to 1}((z-1)^2 f(z))'')$$

$$= 2\pi i(-\frac{1}{2}e^{-iz}) = -\pi i e^{-i}.$$

b) $\gamma = \{z \in \mathbb{C}/|z+1| = 1\}$. Aucune singularité à l'intérieur de γ, ainsi, par le théorème de Cauchy,

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

6.6 Examen 2011

Université Abou-Bakr-Belkaid de Tlemcen
Département des Sciences et techniques
2010-2011

Niveau : ST/L2/S2
UEF4/Math4

Examen final.

Exercice 1(6 Pts)

Soit $z = x + iy$ où x et y sont deux réels et soit la fonction

$$f(z) = 2x(1-y) + i(x^2 - y^2 + 2y).$$

Démontrer que $f(z)$ est analytique.

Exercice 2(6 Pts)

Calculer l'intégrale

$$\int_\gamma \frac{e^{iz}dz}{(z^2+1)^2}$$

où

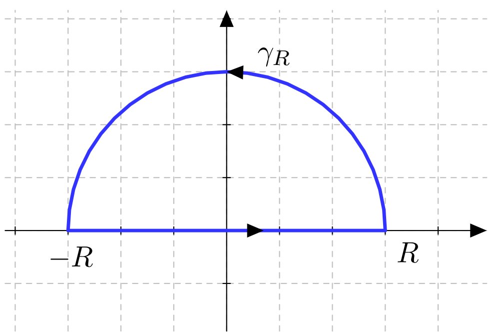
1)$\gamma = \{z \in \mathbb{C}/|z+i| = \frac{1}{2}\}$.
2)$\gamma = \{z \in \mathbb{C}/|z+1| = \frac{1}{2}\}$.

Exercice 3(8 Pts)

Soit la fonction

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+4)^2}$$

1) Déterminer les singularités de $f(z)$ à l'intérieur de γ qui est le contour suivant



2) Calculer l'intégrale $\int_\gamma f(z)dz$.

3) À partir de la relation

$$\lim_{R\to+\infty}\int_\gamma f(z)dz = \lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} f(z)dz + \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx,$$

déduire

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+4)^2}.$$

Solution

<u>Exercice 1</u>(6 Pts)

Soit $f(z) = 2x(1-y) + i(x^2 - y^2 + 2y)$.
Posons

$$u(x,y) = 2x(1-y) \qquad \text{et} \quad v(x,y) = x^2 - y^2 + 2y.$$

Nous remarquons que u et v sont des fonctions différentiables par rapport à x et y. Pour que f soit analytique, il faut que u et v vérifient les deux conditions de Cauchy-Riemann : Soit

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

Or on a :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2-2y \qquad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -2y+2.$$

et on a aussi,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2x \qquad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2x.$$

Les deux conditions étant vérifiées. f est analytique dans $\mathbb{C}$.

<u>Exercice 2</u>(6 Pts)

Soit la fonction

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}.$$

Les singularités de f sont i et $-i$. Nous remarquons que ces points sont des pôles d'ordre 2.

1) Soit $\gamma = \{z \in \mathbb{C}/|z+i| = \frac{1}{2}\}$. Une seule singularité à l'intérieur de γ, ainsi,

$$\int_\gamma \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}dz = 2\pi i Res(f,-i)$$

$$= 2\pi i[\lim_{z\to -i}\frac{1}{(2-1)!}((z+i)^2\frac{e^{iz}}{(z+i)^2(z-i)^2})']$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to -i} \left(\frac{e^{iz}}{(z-i)^2}\right)'$$

$$\int_\gamma \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}dz = 2\pi i \lim_{z\to -i} \frac{ie^{iz}(z-i)^2 - 2(z-i)e^{iz}}{(z-i)^4} = 0.$$

Remarque. On peut utiliser la formule intégrale de Cauchy.

2) Soit $\gamma = \{z \in \mathbb{C}/|z+1| = \frac{1}{2}\}$. Aucune singularité à l'intérieur de γ, ainsi par le théorème de Cauchy,

$$\int_\gamma \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}dz = 0.$$

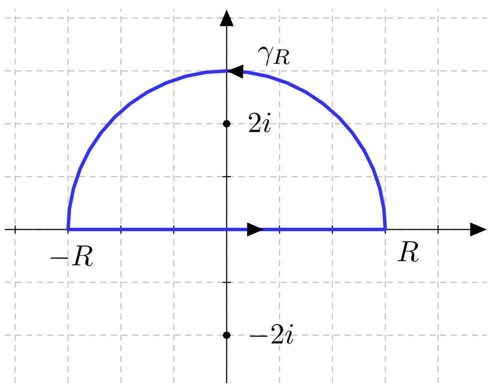
Exercice 3(8 Pts)

Soit

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+4)^2}$$

1) Les singularités de f sont les points qui vérifient $z^2+4=0$. Ce qui donne deux singularités $2i$ et $-2i$.

Nous remarquons que la singularité $2i$ est à l'intérieur de γ.



2) Puisque le contour γ ne contient que $2i$, alors

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z^2+4)^2} = 2\pi i Res(f, 2i)$$

$$= 2\pi i[\lim_{z\to 2i} \frac{1}{(2-1)!}((z-2i)^2\frac{1}{(z-2i)^{(}z+2i)^2})']$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to 2i} \frac{1}{(z+2i)^2}$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to 2i} \frac{-2}{(z+2i)^3} = \frac{\pi}{16}.$$

3) Nous avons

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma} f(z)dz = \lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} f(z)dz + \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx.$$

Nous remarquons que

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} \frac{1}{(z^2+4)^2}dz = 0$$

car le polynôme $(z^2+4)^2$ est de degré 4 qui est supétieur à $0+2$. (Voir théorème 5.1). Ainsi,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2} = \frac{\pi}{16}.$$

Puisque $\frac{1}{(x^2+4)^2}$ est une fonction paire, alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2} = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2} = \frac{\pi}{16}$$

Ce qui implique que

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2} = \frac{\pi}{32}.$$

6.7 Examen de rattrapage 2011

Université Abou-Bakr-Belkaid de Tlemcen **Niveau : ST/L2/S2**
Département des Sciences et techniques **UEF4/Math4**
2010-2011

Examen de rattrapage.

Exercice 1(7 Pts)

Soit la fonction
$$f(z) = \frac{1-\sin z}{z^3 - z}$$
1) Déterminer les singularités de la fonction f.
2) Calculer l'intégrale
$$\int_\gamma f(z)dz$$
où
a) $\gamma = \{z \in \mathbb{C}/|z| = \frac{1}{2}\}$
b) $\gamma = \{z \in \mathbb{C}/|z-1| = \frac{1}{2}\}$
c) $\gamma = \{z \in \mathbb{C}/|z-i| = \frac{1}{2}\}$.

Exercice 2(6 Pts)

1) Résoudre l'équation $z^3 = 1$ en utilisant la forme exponentielle.
2) On note j la solution complexe de partie imaginaire positive.
a) Vérifier que j^2 est aussi solution.
b) Montrer que $j^2 = \frac{1}{j} = \overline{j}$.
c) Calculer $1 + j + j^2$.

Exercice 3(7 Pts)

Soit la fonction
$$f(z) = \frac{1}{z^2+9}$$
1) Calculer par la méthode des résidus $\int_\gamma f(z)dz$ où γ est un demi-cercle de rayon R centré à l'origine.
2) En déduire
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+9}.$$

S o l u t i o n

Exercice 1(7 Pts)

1) Les singularités de la fonction f sont 0, 1 et -1 qui sont des pôles simples.

2) a) Soit $\gamma = \{z \in \mathbb{C}/|z| = \frac{1}{2}\}$. Puisque, il y a une seule singularité à l'intérieur de γ, alors par la méthode des résidus,

$$\int_\gamma \frac{1-\sin z}{z^3 - z} dz = 2\pi i Res(f, 0)$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to 0} z(\frac{1-\sin z}{z(z^2-1)}) = -2\pi i.$$

b) Soit $\gamma = \{z \in \mathbb{C}/|z-1| = \frac{1}{2}\}$. Puisque, il y a une seule singularité à l'intérieur de γ, alors

$$\int_\gamma \frac{1-\sin z}{z^3 - z} dz = 2\pi i Res(f, 1)$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{1-\sin z}{z(z-1)(z+1)} = (1-\sin 1)\pi i.$$

c) Soit $\gamma = \{z \in \mathbb{C}/|z-i| = \frac{1}{2}\}$. Puisque, il n'y a pas de singularité à l'intérieur de γ, alors par le théorème de Cauchy,

$$\int_\gamma \frac{1-\sin z}{z^3 - z} dz = 0.$$

Exercice 2(6 Pts)

1) Nous remarquons que l'équation $z^3 = 1$ possède 3 solutions données par :

$$z_k = \sqrt[3]{1} = \cos(\frac{2\pi k}{3}) + i\sin(\frac{2\pi k}{3}), \quad k = 0, 1, 2.$$

Ainsi, les solutions sont

$$z_0 = 1$$

$$z_1 = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3}) = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$z_2 = \cos(\frac{4\pi}{3}) + i\sin(\frac{4\pi}{3}) = e^{i\frac{4\pi}{3}}.$$

2) La solution complexe de partie imaginaire positive est

$$j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

a)On peut voir facilement que $j^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$ qui est encore solution de l'équation $z^3 = 1$.

b) Nous remarquons que

$$j^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos(\frac{4\pi}{3}) + i\sin(\frac{4\pi}{3})$$
$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$
$$= \cos(\frac{-2\pi}{3}) + i\sin(\frac{-2\pi}{3})$$
$$= \cos(\frac{2\pi}{3}) - i\sin(\frac{4\pi}{3}) = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$
$$= \frac{1}{j} = \bar{j}.$$

c) Par les réponses précédentes, on a

$$1 + j + j^2 = 1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$
$$= 1 + 2\cos(\frac{2\pi}{3}).$$

Exercice 3(7 Pts)

Soit la fonction

$$f(z) = \frac{1}{z^2+9}$$

1. Les pôles de la fonction f sont $3i$ et $-3i$ qui sont des pôles simples. Puisque le contour γ ne contient que la singularité $3i$, alors par la méthode des résidus on a

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2+9} = 2\pi i Res(f, 3i)$$
$$= 2\pi i(\lim_{z\to 3i} \frac{(z-3i)}{(z-3i)(z+3i)}) = \frac{\pi}{3}.$$

2. Nous remarquons que

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2+9} = \int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^2+9} + \int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^2+9} = \frac{\pi}{3}.$$

Après limite, quand $R \to +\infty$, on a

$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^2+9} = 0$ car le pôlynome z^2+9 est de degré 2 qui est $\geq 0+2$

(Voir théorème du cours).
Ainsi,

$$\lim_{R\to+\infty} \int_\gamma \frac{dz}{z^2+9} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+9} = \frac{\pi}{3}.$$

6.8 Examen 2012

Université Abou-Bakr-Belkaid de Tlemcen **Niveau : ST/L2/S2**
Département des Sciences et techniques **UEF4/Math4**
2011-2012

Examen final.

Exercice 1(7 Pts)

Soit $z = x + iy$ où x et y sont deux réels et soit la fonction

$$f(z) = e^z.$$

1) Mettre $f(z)$ sous la forme $P(x, y) + iQ(x, y)$.
2) Montrer que $f(z)$ est analytique (holomorphe) dans $\mathbb{C}$.
3) Calculer le module et l'argument de $f(z)$.

Exercice 2(6 Pts)

Soit

$$f(z) = \overline{z}$$

1) Calculer

$$\int_{\gamma} \overline{z} dz$$

où
a) γ : le segment de droite joignant les points $(0, 0)$ et $(2, 1)$.
b) γ : le quart-de-cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 2.

Exercice 3(7 Pts)

Soit

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z-1)}$$

1) Déterminer les points de singularités de la fonction f.
2) Développer la fonction f en série de Laurent au voisinage de 0.
3) Calculer de deux manières différentes le résidu de $f(z)$ en $z = 0$.
4) En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^2(z-1)} dz$$

avec γ un cercle d'équation $|z| = \frac{1}{2}$.

Solution

<u>Exercice 1</u>(6 Pts)
Soit la fonction $f(z) = e^z$

1. Soit $z = x + iy$, on a

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos x + i \sin x).$$

Ainsi $P(x, y) = e^x \cos x$ et $Q(x, y) = e^x \sin x$.

2. Montrons que f est analytique dans $\mathbb{C}$. Il suffit de vérifier les conditions de Cauchy-Riemann,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) &= e^x \cos y, & \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) &= e^x \cos y, \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) &= -e^x \sin y, & \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) &= e^x \sin y. \end{aligned}$$

Ainsi $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$ et $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$.
Le module de f est

$$\sqrt{(e^x \cos y)^2 + (e^x \sin y)^2} = \sqrt{e^{2x}(\cos^2 x + \sin^2 x)} = e^x.$$

L'argument de f est

$$\arg(e^z) = y + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

<u>Exercice 2</u>(6 Pts)
Soit

$$f(z) = \overline{z}$$

1) Calculer

$$\int_\gamma \overline{z} dz$$

où

a) γ : le segment de droite joignant les points $(0,0)$ et $(2,1)$.

$$\begin{aligned} & \gamma(t) = (2+i)t, \quad 0 \leq t \leq 1, \\ & \gamma'(t) = (2+i) \\ \int_\gamma \overline{z} dz &= \int_0^1 (2-i)t(2+i)dt = 5\int_0^1 tdt = 5\frac{t^2}{2}]_0^1 = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

b) $\int_\gamma \overline{z} dz$ avec γ : un quart-de-cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 2.

$$\begin{aligned} & \gamma(t) = 2e^{it}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \\ & \gamma'(t) = 2ie^{it} \\ \int_\gamma \overline{z} dz &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2e^{it})(2ie^{it})dt = 4i\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = 4i\frac{\pi}{2} = 2\pi i. \end{aligned}$$

<u>Exercice 3</u>(7 Pts)

Soit

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z-1)}$$

1. Les singularités de f sont 0 (pôle double) et 1 (pôle simple).

2. Le développement de f en série de Laurent au voisinage de 0 :

Si $|z| < 1$ on a

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z-1)} = -\frac{1}{z^2}\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{+\infty} z^n.$$

Si $|z| > 1$ on a

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z-1)} = \frac{1}{z^3}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n.$$

3. Le calcul des résidus

$$Res(f,0) = a_{-1} = -1,$$

car on sait que le développement est Si $|z| < 1$ on a

$$f(z) = -\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = -\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - 1 - z - \ldots$$

D'autre part et puisque 0 est un pôle d'ordre 2, on a

$$Res(f,0) = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 0}\left[z^2\frac{1}{z^2(z-1)}\right]' = \lim_{z\to 0}\frac{-1}{(z-1)^2} = -1.$$

4.

$$\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z^2(z-1)}dz = 2\pi i Res(f,0) = -2\pi i.$$

6.9 Examen 2012bis

Université Abou-Bakr-Belkaid de Tlemcen
Département des Sciences et techniques
2011-2012

Niveau : ST/L2/S2
UEF4/Math4

Examen final.

Exercice 1(6 Pts)
Soit $z = x + iy$ où x et y sont deux réels et soit la fonction

$$f(z) = z^2 - 2z.$$

1) Mettre $f(z)$ sous la forme $P(x, y) + iQ(x, y)$.
2) Montrer que $f(z)$ est analytique (holomorphe) dans $\mathbb{C}$.

Exercice 2(8 Pts)
Soit

$$f(z) = \frac{\cos(z)}{z^3}$$

1) Détrminer les points de singularités de la fonction f.
2) Développer la fonction f en série de Laurent au voisinage de 0.
3) Calculer de deux manières différentes le résidu de $f(z)$ en $z = 0$.
4) En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_\gamma \frac{\cos(z)}{z^3} dz$$

avec γ un cercle d'équation $|z| = 1$.

Exercice 3(6 Pts)

1) Calculer

$$\int_\gamma z\overline{z} dz$$

où
a) γ : le segment de droite joignant les points $(0, 0)$ et $(1, 1)$.
b) γ : l'arc de courbe de $y = x^2$ limité par les points $z = 0$ et $z = 1 + i$.
2) En déduire que $f(z)$ n'est pas analytique (holomorphe).

S o l u t i o n

Exercice 1(6 Pts)

1) Soit $z = x + iy$. On peut écrire

$$f(z)) = z^2 - 2z = (x+iy)^2 - 2(x+iy)$$
$$= x^2 - y^2 - 2x + i(2xy - 2y).$$

Ainsi,

$$P(x,y) = x^2 - y^2 - 2x, \qquad Q(x,y) = 2xy - 2y.$$

2) Nous vérifions les conditions de Cauchy-Riemann.

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 2x - 2 \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = 2x - 2$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -2y2 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y$$

Ainsi, f est analytique (holomorphe) dans $\mathbb{C}$.

Exercice 2(8 Pts)

Soit

$$f(z) = \frac{\cos(z)}{z^3}$$

1) La singularité de f est 0.

2) Nous remarquons que

$$\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - ...$$

Ainsi,

$$f(z) = \frac{1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - ...}{z^3}$$
$$= \frac{1}{z^3} - \frac{1}{2z} + \frac{z}{4!} - ...$$

3) La première méthode : Sachant que

$$Res(f,0) = a_{-1}$$

Ce qui implique que $Res(f,0) = -\frac{1}{2}$.

Deuxième méthode : Nous remarquons que 0 est un pôle d'ordre 3, ainsi

$$Res(f,0) = \frac{1}{(3-1)!} \lim_{z\to 0} [z^3 \frac{\cos(z)}{z^3}]''$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{z\to 0} [-\cos(z)]$$

$$= -\frac{1}{2}.$$

4) Puisque 0 appartient à l'interieur du cercle $|z| = 1$, alors

$$\int_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{z^3} = 2\pi i(-\frac{1}{2}) = -\pi i.$$

Exercice 3(6 Pts)

a) La paramétrisation du segment de droite joignant les points $(0,0)$ à $(1,1)$ est :

$$\gamma(t) = (1+i)t \qquad \text{avec} \quad t \in [0,1]$$

La dérivée est

$$\gamma'(t) = (1+i).$$

Ainsi,

$$\int_\gamma z\bar{z}dz = \int_0^1 (1+i)t(1-i)t(1+i)dt$$
$$= (1+i)^2(1-i)\int_0^1 t^2 dt$$
$$= 2(1+i)[\frac{t^3}{3}]_0^1 = \frac{2}{3} + \frac{2i}{3}.$$

b) Nous pouvons utilisés la paramétrisation suivant pour l'arc de courbe $y = x^2$.

$$\gamma(t) = t^2 + it^4 \qquad \text{avec} \quad t \in [0,1].$$

La dérivée est :

$$\gamma'(t) = 2t + 4it^3$$

Alors, on a

$$\int_\gamma z\bar{z}dz = \int_0^1 (t^2+it^4)(t^2-it^4)(2t+4it^3)dt$$
$$2 = \int_0^1 (t^4+t^8)(t+2it^3)dt$$
$$= 2\int_0^1 (t^5+t^9+2it^7+2it^{11})dt$$
$$= 2[\frac{t^6}{6} + \frac{t^{10}}{10} + 2i\frac{t^8}{8} + 2i\frac{t^{12}}{12}]_0^1$$
$$= \frac{8}{15} + \frac{5i}{6}.$$

2) La fonction $f(z)$ n'est pas analytique car

$$\int_{\gamma_1} z\bar{z}dz \neq \int_{\gamma_2} z\bar{z}dz$$

avec γ_1 le segment de droite et γ_2 l'arc de courbe $y = x^2$.

6.10 Examen de rattrapage 2012

Université Abou-Bakr-Belkaid de Tlemcen **Niveau : ST/L2/S2**
Département des Sciences et techniques **UEF4/Math4**
2011-2012

Examen de rattrapage.

Exercice 1(6 Pts)

Soit $z = x + iy$ où x et y sont deux réels et soit la fonction

$$f(z) = x^2 + iy^3.$$

1) Montrer que $f(z)$ n'est pas analytique en tout point $(x, y) \neq (0, 0)$.
2) La fonction $f(z)$ est-elle analytique en $(0, 0)$?

Exercice 2(6 Pts)
Soit

$$f(z) = z\overline{z}$$

Calculer l'intégrale suivante

$$\int_\gamma z\overline{z}dz$$

où
a) γ : le demi-cercle de centre 0 et de rayon 1.
b) γ : le segment de droite joignant les points $(0, 0)$ et $(1, 0)$.

Exercice 3(8 Pts)
Soit

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)^2(z^2+1)}.$$

1) Déterminer les points de singularités de f et leurs types.
2) Calculer l'intégrale

$$\int_\gamma f(z)dz$$

avec
a) $\gamma = \{z \in \mathbb{C}/|z| = \frac{1}{2}\}$
b) $\gamma = \{z \in \mathbb{C}/|z| = 4\}$.

Solution

Exercice 1(6 Pts)

1) Nous appliquons les conditions de Cauchy-Riemann.

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

avec

$$u(x, y) = x^2 \qquad \text{et} \quad v(x, y) = y^3.$$

Ainsi,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \neq \frac{\partial v}{\partial y} = 3y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Nous concluons que pour $(x, y) \neq (0, 0)$, f n'est pas analytique.

2) Pour $(x, y) = (0, 0)$, nous remarquons que que les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifiées donc f est holomorphe en $(0, 0)$ mais non analytique car l'analyticité exige que f soit holomorphe dans un voisinage de $(0, 0)$.

Exercice 2(6 Pts)

1)

$$\gamma(t) = e^{it} \qquad 0 \leq t \leq \pi$$

$$\gamma'(t) = ie^{it}$$

Nous avons

$$\int_\gamma z\bar{z}dz = \int_0^\pi (e^{it})(e^{-it})(ie^{it})dt$$

$$= i\int_0^\pi e^{it}dt = i[\frac{1}{i}e^{it}]_0^\pi = -2.$$

2)

$$\gamma(t) = t \quad \text{avec} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

$$\gamma'(t) = 1$$

$$\int_\gamma z\bar{z}dz = \int_0^1 t^2 dt = [\frac{t^3}{3}]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Exercice 3(8 Pts)

1) Les singularités de f sont $2, i$ et $-i$.
2 est un pôle d'ordre 2.
i et $-i$ sont des pôles simples.

2) a) Nous remarquons que à l'intérieur de la région $|z| = \frac{1}{2}$, il n'existe pas de singularités, ainsi par le thórème de Cauchy, nous avons

$$\int_{|z|=\frac{1}{2}} f(z)dz = 0.$$

b) Les trois singularités $(2, i$ et $-i)$ sont à l'intérieur de la région $|z| = 4$, ainsi

$$\int_{|z|=4} f(z)dz = 2\pi i(Res(f,i) + Res(f,-i) + Res(f,2))$$

$$Res(f,2) = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 2}\left[(z-2)^2.\frac{1}{(z-2)^2(z^2+1)}\right]' = \lim_{z\to 2} -\frac{2z}{(z^2+1)^2} = -\frac{4}{25}$$

$$Res(f,i) = \lim_{z\to i}(z-i).\frac{1}{(z-2)^2(z-i)(z+i)} = \frac{1}{6i+8}$$

$$Res(f,-i) = \lim_{z\to -i}(z+i).\frac{1}{(z-2)^2(z-i)(z+i)} = \frac{1}{-6i+8}$$

Ainsi,

$$\int_{|z|=4} f(z)dz = 2\pi i\left(-\frac{4}{25} + \frac{1}{8-6i} + \frac{1}{8+6i}\right) = 0.$$

6.11 Examen 2013

Université Abou-Bakr-Belkaid de Tlemcen **Niveau : ST/L2/S2**
Département des Sciences et techniques **UEF4/Math4**
2012-2013

Examen final.

Exercice 1(4 Pts)

Soit $z = x + iy$ où x et y sont deux réels et soit la fonction

$$f(z) = 3x - y + 5 + i(ax + by - 3).$$

1) Pour quelles valeurs de a et b, la fonction f est holomorphe sur $\mathbb{C}$. ?
2) Soit la fonction $g(z) = \frac{z^2+1}{\bar{z}}$. La fonction g est-elle holomorphe ?

Exercice 2(12 Pts)

Soit la fonction

$$f(z) = \frac{z}{(z+1)(z-2)}$$

1) Trouver les singularités de la fonction f avec leurs types.
2) Développer la fonction f en séries de Laurent au voisinage de 2 et -1.
3) Calculer les résidus de la fonction f aux points $z = 2$ et $z = -1$ de deux manières différentes.
4) En déduire la valeur de l'intégrale suivante

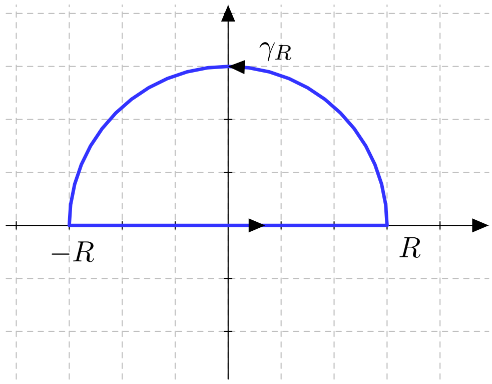
$$\int_\gamma \frac{z}{(z+1)(z-2)} dz$$

avec
a)$\gamma = \{z \in \mathbb{C}/|z| = \frac{1}{2}\}$.
b)$\gamma = \{z \in \mathbb{C}/|z+1| = 1\}$.
c)γ : un carré de sommets $3+3i, -3+3i, -3-3i, 3-3i$.

Exercice 3(4 Pts)

Soit la fonction $f(z) = \frac{e^{iaz}}{z^2+4}$

1) Calculer l'intégrale $I = \int_\gamma f(z)dz$ avec γ le contour suivant



2) Sachant que $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} f(z)dz = 0$, en déduire, $\lim\limits_{R\to+\infty} I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x^2+4}dx$ et les valeurs des deux intégrales suivantes

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2+4}dx, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x^2+4}dx.$$

Solution

<u>Exercice 1</u>(4 Pts)

1) Soit $f(z) = 3x - y + 5 + i(ax - by - 3)$ avec

$$u = Re(f(z)) = 3x - y + 5 \qquad v = Im(f(z)) = ax - by - 3.$$

Nous vérifions les conditions de Cauchy-Riemann.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3 = \frac{\partial v}{\partial y} = -b \Rightarrow b = -3.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -1 = -\frac{\partial v}{\partial x} = -a \Rightarrow a = 1.$$

Ainsi, f est holomorphe si $a = 1$ et $b = -3$.

2) Soit $g(z) = \frac{z^2+1}{\bar{z}}$, on a

$$g(x+iy) = \frac{(x+iy)^2 - 1}{x - iy} = \frac{x^3 - 3y^2x - x}{x^2+y^2} + i\frac{3x^2y - y^3 - y}{x^2+y^2}$$

Nous vérifions facilement que les conditions de Cauchy-Riemann ne sont pas vérifiées. Ainsi, la fonction g n'est pas holomorphe.

<u>Exercice 2</u>(12 Pts)

Soit $f(z) = \frac{z}{(z+1)(z-2)}$.

1) Les singularités de f sont -1 et 2 qui sont des pôles simples.

2) Le développement de f en série de Laurent au voisinage de -1 :

a) $|z+1| < 3$

$$f(z) = \frac{a}{z+1} + \frac{b}{z-2} \Rightarrow a = \frac{1}{3} \quad b = \frac{2}{3}.$$

$$f(z) = \frac{1}{3}[\frac{1}{z+1} + \frac{2}{z-2}] = \frac{1}{3}[\frac{1}{z+1} + \frac{2}{z+1-3}]$$

$$= \frac{1}{3}[\frac{1}{z+1} - \frac{2}{3}.\frac{1}{1-(\frac{z+1}{3})}] = \frac{1}{3}[\frac{1}{z+1} - \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{z+1}{3})^n]$$

b)$3 < |z+1| < +\infty$.

$$f(z) = \frac{1}{3}[\frac{1}{z+1} + \frac{2}{z-2}] = \frac{1}{3}[\frac{1}{z+1} + \frac{2}{z+1-3}] = \frac{1}{3}[\frac{1}{z+1} + \frac{2}{z+1}.\frac{1}{1-\frac{3}{z+1}}]$$

$$= \frac{1}{3}[\frac{1}{z+1} + \frac{2}{z+1}\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{3}{z+1})^n].$$

• Le développement au voisinage de 2.

a) $|z-2| < 3$,

$$f(z) = \frac{1}{3}[\frac{2}{z-2} + \frac{1}{z+1}] = \frac{1}{3}[\frac{2}{z-2} + \frac{1}{z-2+3}] = \frac{1}{3}[\frac{2}{z-2} + \frac{1}{3}.\frac{1}{\frac{z-2}{3}+1}]$$

$$= \frac{1}{3}[\frac{2}{z-2} + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(\frac{z-2}{3})^n]$$

b)$3 < |z-2| < +\infty$.

$$f(z) = \frac{1}{3}[\frac{2}{z-2} + \frac{1}{z+1}] = \frac{1}{3}[\frac{1}{z-2} + \frac{1}{z-2+3}]$$

$$= \frac{1}{3}[\frac{2}{z-2} + \frac{1}{z-2}.\frac{1}{1+\frac{3}{z-2}}] = \frac{1}{3}[\frac{2}{z-2} + \frac{1}{z-2}.\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(\frac{3}{z-2})^n].$$

3) Le résidu de la fonction f au point -1 est

$$Res(f,-1) = \lim_{z\to -1}(z+1)\frac{z}{(z+1)(z-2)} = \frac{1}{3}$$

D'autre part, on sait que

$$Res(f,-1) = a_{-1}, \qquad \text{le coefficient de la série de Laurent.}$$

Ceci implique, d'après la question 2 que $a_{-1} = \frac{1}{3}$.

Le résidu de la fonction f au point 2 est

$$Res(f,2) = \lim_{z\to 2}(z-2)\frac{z}{(z-2)(z+1)} = \frac{2}{3}.$$

De la même manière, nous remarquons que $a_{-1} = \frac{2}{3}$.

4) a)

$$\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{z}{(z+1)(z-2)} dz = 0$$

puisque aucune singularité n'est à l'intérieur du cercle $|z| = \frac{1}{2}$, alors par le théorème de Cauchy, nous avons le résultat.

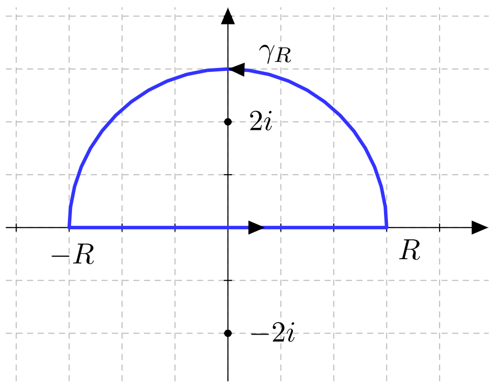
b)

$$\int_{|z+1|=1} \frac{z}{(z+1)(z-2)} dz = 2\pi i Res(f,-1) = 2\pi i/3$$

c)

$$\int_{\gamma} \frac{z}{(z+1)(z-2)} dz = 2\pi i(Res(f,-1) + Res(f,2)) = 2\pi i(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}) = 2\pi i$$

<u>Exercice 3</u>(4 Pts)



1)

$$\int_{\gamma} \frac{e^{iaz}}{z^2+4} = 2\pi i Res(f,2i) = \frac{\pi}{2e^{2a}}.$$

2) Nous remarquons que

$$\int_{\gamma} \frac{e^{iaz}}{z^2+4} = \int_{\gamma_R} \frac{e^{iaz}}{z^2+4} + \int_{-R}^{R} \frac{e^{iax}}{x^2+4}$$

Ainsi, après passage à la limite, nous avons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x^2+4} = \frac{\pi}{2e^{2a}}.$$

Ceci implique que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2+4} = \frac{\pi}{2e^{2a}} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x^2+4} = 0.$$

6.12 Examen de rattrapage 2013

Université Abou-Bakr-Belkaid de Tlemcen
Département des Sciences et techniques
2012-2013

Niveau : ST/L2/S2
UEF4/Math4

Examen de rattrapage.

Exercice 1(5 Pts)

Soit $z = x + iy$ où x et y sont deux réels.
1) Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de $\ln(z)$.
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$,

$$e^{2iz} + 2e^{iz} - 1 = 0.$$

3) En déduire la solution en précisant la partie réelle et la partie imaginaire de l'équation

$$\sin(z) = i.$$

Exercice 2(6 Pts)

1) Calculer les intégrales suivantes

$$I = \int_{\gamma_1} \overline{z} dz \qquad J = \int_{\gamma_2} \overline{z} dz$$

avec
a) γ_1 : la droite $y = x + 2$ joignant les points $(0, 2)$ et $(1, 3)$.
b) γ_2 : la courbe d'équation $y = x^2 + 2$ joignant les points $(0, 2)$ et $(1, 3)$.
2) Dire pourquoi les valeurs de I et J sont différentes ?.

Exercice 3(9 Pts)

Soit l'intégrale suivante

$$I = \int_{\gamma} \frac{e^z dz}{z^2(z-2)},$$

avec
a) $\gamma = \{z \in \mathbb{C}/|z| = 1\}$
b)$\gamma = \{z \in \mathbb{C}/|z - 2| = 1\}$
c)$\gamma = \{z \in \mathbb{C}/|z + 2| = 1\}$
1) Calculer I par la formule intégrale de Cauchy.
2) Calculer I par la méthode des résidus.

Solution

Exercice 1(5 Pts)

1. On sait que $\ln z = \ln |z| + iArg(z)$, ainsi $Re(z) = \ln |z|$ et $Im(z) = Arg(z)$.

2. On a $e^{2iz} + 2e^{iz} - 1 = 0$.

Posons $X = e^{iz}$ nous avons $X^2 + 2X - 1 = 0$

$\Delta' = 2$ et $X_1 = -1 + \sqrt{2}$, $X_2 = -1 - \sqrt{2}$.

Ainsi $e^{iz} = -1 + \sqrt{2}$ ou $e^{iz} = -1 - \sqrt{2}$.

Ceci implique que $iz = \ln(-1 + \sqrt{2})$ ou $iz = \ln(-1 - \sqrt{2})$.

3. On a $\sin z = i$ implique que $e^{2iz} + 2e^{iz} - 1 = 0$.

Les solutions sont

$$iz = \ln(-1 + \sqrt{2}) \Rightarrow z = -i \ln(-1 + \sqrt{2}),$$

ou

$$iz = \ln(-1 - \sqrt{2}) \Rightarrow z = -i \ln(-1 - \sqrt{2}).$$

Exercice 2(6 Pts)

1. $\int_{\gamma_1} \overline{z} dz$ avec γ_1 : la droite $y = x + 2$ joignant les points $(0, 2)$ et $(1, 3)$.

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} \overline{z} dz &= \int_{\gamma_1} (x - iy) d(x + iy) = \int_{\gamma_1} (x - iy)(dx + idy) \\
&= \int_{\gamma_1} (xdx - iydx + ixdy + ydy) \\
&= \int_0^1 (xdx - i(x + 2)dx + ixdx + (x + 2)dx) = \int_0^1 (2x + 2(1 - i))dx \\
&= \left[x^2 + 2(1 - i)x\right]_0^1 = 3 - 2i.
\end{aligned}$$

2. $\int_{\gamma_2} \overline{z} dz$ avec γ_2 : la courbe d'équation $y = x^2 + 2$ joignant les points $(0, 2)$ et $(1, 3)$.

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_2} \overline{z} dz &= \int_{\gamma_2} (x - iy) d(x + iy) = \int_{\gamma_2} (x - iy)(dx + idy) \\
&= \int_{\gamma_2} (xdx - iydx + ixdy + ydy) \\
&= \int_0^1 (xdx - i(x^2 + 2)dx + 2ix^2 dx + 2(x^2 + 2)xdx) \\
&= \int_0^1 2x^3 + ix^2 + 5x - 2i)dx \\
&= \left[\frac{1}{2}x^4 + \frac{i}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2ix\right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{i}{3} + \frac{5}{2} - 2i \\
&= 3 - \frac{5}{3}i.
\end{aligned}$$

Les valeurs des intégrales $\int_{\gamma_1} \overline{z} dz$ et $\int_{\gamma_2} \overline{z} dz$ sont différentes car la fonction $f(z) = \overline{z}$ n'est pas analytique (n'est pas holomorphe).

<u>Exercice 3</u>(9 Pts)

1. En utilisant les formules intégrales de Cauchy, on a

$$\begin{aligned}
a) \quad \int_\gamma \frac{e^z dz}{z^2(z-2)} &= \int_\gamma \frac{\frac{e^z}{z-2}}{z^2} dz = 2\pi i \left(\frac{e^z}{z-2}\right)'_{z=0} \\
&= 2\pi i \left(\frac{e^z(z-3)}{(z-2)^2}\right)_{z=0} = 2\pi i \left(-\frac{3}{4}\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b) \quad \int_\gamma \frac{e^z dz}{z^2(z-2)} &= \int_\gamma \frac{\frac{e^z}{z^2}}{z-2} dz = 2\pi i \left(\frac{e^z}{z^2}\right)_{z=2} \\
&= 2\pi i \left(\frac{e^2}{4}\right).
\end{aligned}$$

Par le théorème de Cauchy

$$c) \quad \int_\gamma \frac{e^z dz}{z^2(z-2)} = 0.$$

2. En utilisant la méthode des résidus, on a

$$a) \quad \int_\gamma \frac{e^z dz}{z^2(z-2)} = 2\pi i Res(f, 0) = 2\pi i \left(-\frac{3}{4}\right).$$

$$b) \quad \int_\gamma \frac{e^z dz}{z^2(z-2)} = 2\pi i Res(f, 2) = 2\pi i \left(\frac{e^2}{4}\right).$$

c) Même chose.

6.13 Examen 2014

Université Abou-Bakr-Belkaid de Tlemcen **Niveau : ST/L2/S2**
Département des Sciences et techniques **UEF4/Math4**
2013-2014

Examen final.

Exercice 1(4 Pts)
Soit $z = x + iy$ où x et y sont deux réels et soit la fonction

$$f(z) = ze^{-z}.$$

1) Mettre $f(z)$ sous la forme $P(x, y) + iQ(x, y)$.
2) Vérifier que P et Q vérifient les conditions de Cauchy-Rieman.
3) Calculer la dérivée de $f(z)$.

Exercice 2(6 Pts)
Soit

$$f(z) = \frac{1}{z(z+2)}$$

1) Développer la fonction f en série de Laurent au voisinage de 0.
2) En déduire le résidu de la fonction f en 0.

Exercice 3(4 Pts)

Calculer l'intégrale suivante

$$\int_\gamma \frac{\cos(z)}{z^2+4}dz$$

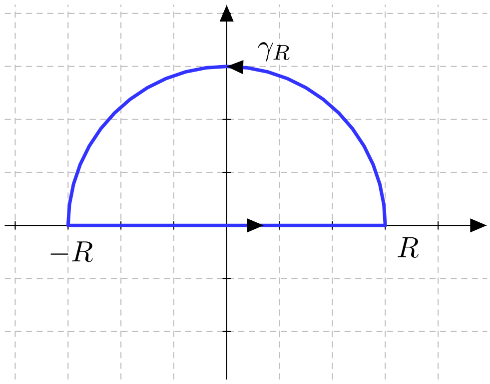
en utilisant la formule intégrale de Cauchy avec
a)$\gamma = \{z \in \mathbb{C}, \quad |z - 2i| = 1\}$
b) $\gamma = \{z \in \mathbb{C}, \quad |z - 2| = 1\}$

Exercice 4(6 Pts)

Soit la fonction

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 - 4z + 5)^2}.$$

1) Calculer $\int_\gamma f(z)dz$ par la méthode des résidus avec $\gamma = \gamma_R \cup [-R, R]$.



2) Montrer que $\lim\limits_{R\to+\infty}\displaystyle\int_{\gamma_R} f(z)dz = 0$, et en déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2-4x+5)^2}.$$

Solution

<u>Exercice 1</u>(4 Pts)

On remplace $z = x + iy$, on a

$$f(x+iy) = (x+iy)e^{-x-iy} = e^{-x}(x+iy)(\cos(y) - i\sin(y))$$

$$= e^{-x}\left(x\cos(y) + y\sin(y) + iy\cos(y) - ix\sin(y)\right)$$

Ainsi,

$$\begin{cases} P(x,y) = xe^{-x}\cos y + ye^{-x}\sin y, \\ Q(x,y) = ye^{-x}\cos y - xe^{-x}\sin y \end{cases}$$

2)Vérifions les conditions de Cauchy-Riemann.

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = e^{-x}\cos y - xe^{-x}\cos y - e^{-x}y\sin y \\ \frac{\partial Q}{\partial y} = e^{-x}\cos y - xe^{-x}\cos y - ye^{-x}\sin y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = -xe^{-x}\sin y + e^{-x}\sin y + ye^{-x}\cos y \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = xe^{-x}\sin y - e^{-x}\sin y - ye^{-x}\cos y \end{cases}$$

Ainsi,

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

3) La dérivée de la fonction f est

$$f'(z) = e^{-z} - ze^{-z}.$$

<u>Exercice 2</u>(6 Pts)

1)Le développement en série de Laurent autour de 0.
Dans la région $0 < |z| < 2$,

$$\frac{1}{z(z+2)} = \frac{1}{2z}\frac{1}{1+\frac{z}{2}} = \frac{1}{2z}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(\frac{z}{2})^n.$$

Dans la région $2 < |z| < +\infty$

$$\frac{1}{z(z+2)} = \frac{1}{z^2}\frac{1}{1+\frac{2}{z}} = \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(\frac{2}{z})^n.$$

2)Le résidu de la fonction f est le coefficient a_{-1} dans la sériecde Laurent. On a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2z}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(\frac{z}{2})^n &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^{n-1}\\ &= \frac{1}{2z} - \frac{1}{2^2} + \frac{z}{2^3} + ...\end{aligned}$$

Ainsi,

$$Res(f,0) = \frac{1}{2}.$$

<u>Exercice 3</u>(4 Pts)

1) a) $\gamma = \{z \in \mathbb{C}, |z-2i| = 1\}$;

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{\cos(z)}{z^2+4}dz &= \int_\gamma \frac{\cos(z)}{(z-2i)(z+2i)}dz = \int_\gamma \frac{\frac{\cos(z)}{z+2i}}{z-2i}dz\\ &= 2\pi i f(2i) = 2\pi i\frac{\cos(2i)}{4i} = \frac{\pi}{2}\cos(2i).\end{aligned}$$

b) $\gamma = \{z \in \mathbb{C}, |z-2| = 1\}$;
Nous remarquons que la région de frontière γ ne possède aucune singularités à l'intérieur, ainsi par le théorème de Cauchy, on

$$\int_\gamma \frac{\cos(z)}{z^2+4}dz = 0.$$

<u>Exercice 4</u>(4 Pts)

Soit

$$f(z) = \frac{1}{(z^2-4z+5)^2}$$

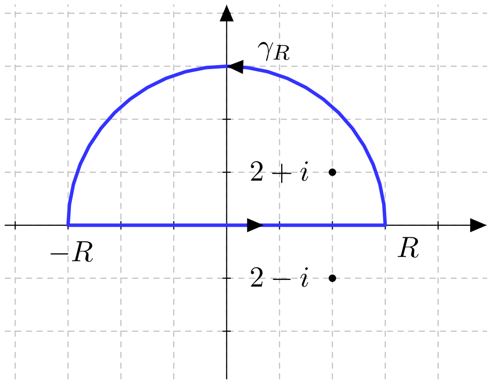
1)Les singularités.

$$z^2 - 4z + 5 = 0$$

$$\Delta' = -1, \quad z_1 = 2 + i, \quad z_2 = 2 - i.$$

Nous remarquons que z_1 et z_2 sont des pôles d'ordre 2. Ainsi,

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z^2 - 4z + 5)^2} = 2\pi i Res(f, z_1)$$



$$\int_\gamma \frac{dz}{(z^2 - 4z + 5)^2} = 2\pi i \lim_{z \to z_1} \left[(z - z_1)^2 . \frac{1}{(z - z_1)^2 (z - z_2)^2} \right]'$$

$$= 2\pi i \lim_{z \to z_1} \left[\frac{1}{(z - z_2)^2} \right]'$$

$$= 2\pi i \left[\frac{-2}{(z_1 - z_2)^3} \right] = \frac{\pi}{2}.$$

2)Nous remarquons que

$$\lim_{R \to +\infty} \int_\gamma f(z)dz = \lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz + \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx..(E)$$

En appliquant le théorème du cours, nous avons que le $deg((z^2 - 4z + 5)^2) = 4 > 0 + 2$, ou bien $\lim\limits_{|z| \to +\infty} zf(z) = 0$. Ainsi,

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0.$$

D'après l'égalité (E), on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 - 4x + 5)^2} = \frac{\pi}{2}.$$

6.14 Examen de rattrapage 2014

Université Abou-Bakr-Belkaid de Tlemcen
Département des Sciences et techniques
2013-2014

Niveau : ST/L2/S2
UEF4/Math4

Examen de rattrapage.

Exercice 1(4 Pts)
Soit $z = x + iy$ où x et y sont deux réels et soit la fonction

$$f(z) = 2x^2 - 3xy - 2y^2 + i(4xy - \frac{3y^2}{2} + \frac{3x^2}{2}).$$

Montrer que f est analytique (holomorphe) dans $\mathbb{C}$.
Exercice 2(6 Pts)

Calculer l'intégrale suivante

$$I = \int_{\gamma} (z^2 + z\overline{z})dz$$

où

a)γ : le demi-cercle de centre 0 et de rayon 2.
b) γ : le segment de droite joignant les points $(0, 0)$ et $(0; 2)$.
Exercice 3(10 Pts)
Soit la fonction

$$f(z) = \frac{1}{(z - i)(z + i)}$$

1) Trouver a et b tels que

$$f(z) = \frac{a}{z - i} + \frac{b}{z + i}.$$

2)Développer la fonction f en série de Laurent au voisinage de i et de $-i$.

3) Calculer l'intégrale suivante

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{(z + i)(z - i)}$$

par
a) la méthode des résidus.

b) la formule intégrale de Cauchy.

4) Calculer l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}.$$

Solution

Exercice 1(4 Pts)

Soit $f(z) = 2x^2 - 3xy - 2y^2 + i(4xy - \frac{3y^2}{2} + \frac{3x^2}{2})$.
On pose

$$\begin{cases} u = 2x^2 - 3xy - 2y^2 \\ v = 4xy - \frac{3y^2}{2} + \frac{3x^2}{2} \end{cases}$$

Vérifions les conditions de Cauchy-Riemann.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 4x - 3y \\ \frac{\partial v}{\partial y} = 4x - 3y \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -3x - 4y \\ \frac{\partial v}{\partial x} = 4y + 3x \end{cases}$$

Nous remarquons que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Ainsi, la fonction f est analytique (holomorphe) dans $\mathbb{C}$.
Exercice 2(6 Pts)

a) On

$$\int_\gamma (z^2 + z\overline{z})dz$$

avec γ : demi-cercle de centre 0 et de rayon 2.
La paramétrisation est donné par

$$\gamma(t) = 2e^{it} \qquad 0 \leq t \leq \pi.$$

$$\gamma'(t) = 2ie^{it}$$

$$\int_\gamma (z^2 + z\overline{z})dz = \int_0^\pi \left[(2e^{it})^2 + 4e^{it}e^{-it}\right](2ie^{it})dt$$

$$= 2i \int_0^{\pi} (4e^{2it} + 4)e^{it} dt$$

$$= 2i \int_0^{\pi} (4e^{3it} + 4e^{it}) = dt$$

$$= 8i \left[\left[\frac{e^{3it}}{3i} \right]_0^{\pi} + \left[\frac{e^{it}}{i} \right]_0^{\pi} \right]$$

$$= 8i \left[\frac{4}{3i}(e^{3i\pi} - 1) + \frac{1}{i}(e^{i\pi} - 1) \right] = -\frac{64}{3}.$$

b) Ici, γ : le segment de droite joingnant les points $(0, 0)$ et $(0, 2)$. La paramérisation est donné par

$$\gamma(t) = it \quad 0 \leq t \leq 2 \qquad \text{et} \quad \gamma'(t) = i$$

$$\int_{\gamma} (z^2 + z\overline{z}) dz = \int_0^2 \left[(it)^2 + (it)(-it) \right] idt = 0.$$

<u>**Exercice 3**</u>**(10 Pts)**

1) On a

$$\frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{a}{z-i} + \frac{b}{(z+i)}$$

$$= \frac{az + ia + bz - ib}{(z-i)(z+i)},$$

ceci implique que

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ ia - ib = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{-i}{2} \\ b = \frac{i}{2} \end{cases}$$

2) Le développement en série de Laurent.
Au voisinage de i. çad dans la région $|z - i| < 2$.

$$f(z) = \frac{i}{2} \left[\frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-i} \right]$$

$$= \frac{i}{2} \left[\frac{1}{z - i + 2i} - \frac{1}{z-i} \right]$$

$$= \frac{i}{2} \left[\frac{1}{2i(1 + \frac{z-i}{2i})} - \frac{1}{z-i} \right]$$

$$= \frac{i}{2} \left[\frac{1}{2i} \sum_{n \geq 0} (-1)^n (\frac{z-i}{2i})^n - \frac{1}{z-i} \right].$$

Dans la région, $|z-i|>2$.

$$f(z)=\frac{i}{2}\left[\frac{1}{z-i+2i}-\frac{1}{z-i}\right]$$

$$=\frac{i}{2}\left[\frac{1}{z-i}\frac{1}{1+\frac{2i}{z-i}}-\frac{1}{z-i}\right]$$

$$=\frac{i}{2}\left[\frac{1}{z-i}\sum_{n\geq 0}(-1)^n(\frac{2i}{z-i})^n-\frac{1}{z-i}\right].$$

Au voisinage de $-i$. Dans la région $|z+i|<2$.

$$f(z)=\frac{i}{2}\left[\frac{1}{z+i}-\frac{1}{z-i}\right]$$

$$=\frac{i}{2}\left[\frac{1}{z+i}-\frac{1}{z+i-2i}\right]$$

$$=\frac{i}{2}\left[\frac{1}{z+i}+\frac{1}{2i(1-\frac{z+i}{2i})}\right]$$

$$=\frac{i}{2}\left[\frac{1}{z+i}+\frac{1}{2i}\sum_{n\geq 0}(\frac{z+i}{2i})^n\right].$$

Dans la région $|z+i|>2$.

$$f(z)=\frac{i}{2}\left[\frac{1}{z+i}-\frac{1}{z+i-2i}\right]$$

$$=\frac{i}{2}\left[\frac{1}{z+i}-\frac{1}{z+i}\frac{1}{1-\frac{2i}{z+i}}\right]$$

$$=\frac{i}{2}\left[\frac{1}{z+i}-\frac{1}{z+i}\sum_{n\geq 0}(\frac{2i}{z+i})^n\right].$$

3) En utilisant, la méthode des résidus, on a

$$\int_{|z|=2}\frac{dz}{(z-i)(z+i)}=2\pi i\left[Res(f,i)+Res(f,-i)\right]$$

$$=2\pi i(\frac{1}{2i}-\frac{1}{2i})=0;$$

et avec la formule intégrale de Cauchy, on

$$\int_{|z|=2}\frac{dz}{(z-i)(z+i)}=\int_{\gamma_1}\frac{dz}{(z-i)(z+i)}+\int_{\gamma_2}\frac{dz}{(z-i)(z+i)}$$

avec γ_1 et γ_2 deux cercles de centre i et $-i$ respectivement.

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{(z-i)(z+i)} = \int_{\gamma_1} \frac{\frac{1}{z+i}}{z-i} dz + \int_{\gamma_2} \frac{\frac{1}{z-i}}{z+i} dz$$

$$= 2\pi i g_1(i) + 2\pi i g_2(-i)$$

avec $g_1(z) = \frac{1}{z+i}$ et $g_2(z) = \frac{1}{z-i}$.
Ainsi,

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{(z-i)(z+i)} = 2\pi i(\frac{1}{2i}) + 2\pi i(\frac{1}{-2i}) = 0.$$

4) Nous commençons par calculer

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^2+1} dz = 2\pi i Res(f, i) = \pi$$

où γ est la réunion du demin-cercle de centre 0 et de rayon R et le segment $[-R, R]$.

Nous remarquons que

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^2+1} dz = \int_{\gamma_R} \frac{1}{z^2+1} dz + \int_{-R}^{R} \frac{1}{x^2+1} dx$$

Quand $R \to +\infty$, alors

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{z^2+1} dz = 0 \quad \text{d'après le théorème du cours.}$$

Ainsi,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \pi.$$

Chapitre 7

Annexe historique

Dans cette annexe, nous résumons la biographie des mathématiciens cités dans le livre.

Abraham De Moivre (1667-1754).
Mathématicien Français. Il était un précurseur du développement de la géométrie analytique et de la théorie des probabilités. Il est connu poura sa célèbre formule de trigonométrie découverte en 1707.

Leonhard Euler (1707-1783).
Mathématicien suisse. Euler est considéré comme l'un des plus grand mathématiciens de tous les temps. Il a contribué au calcul infinitésimal, mécanique, dynamique des fluides, optique et en astronomie. Il a presque travaillé sur tous les domaines des mathématiques et introduit beaucoup de notions et notations mathématiques.

Camille Jordan (1838-1922).
Mathématicien Français. Polytechnicien, il succéda à Josephe Liouville au collèghe de France. Il est connu pour son travail fondamental en théorie des groupes et en anlyse mathématique.

Giacinto Morera (1856-1909).
Mathématicien italien. Son nom est associé en analyse complexe au théorème de Morera. Il a contribué aussi à la théorie de l'élasticité linéaire.

Joseph Liouville (1809-1882).
Mathématicien Français. Il est célèbre pour son théorème en alnalyse complexe. Il a contribué à divers branches des mathématiques telle que la physique mathématique, la théorie des nombres et la géométrie différentielle.

Pierre Alphonse Laurent (1813-1854).

Mathématicien Français. Il a travaillé sur les equations aux dérivés partielles et développe des idées sur la théorie des ondes. Sa contribution majeure est les séries qui porte son nom.

Augustin Louis Cauchy (1789-1857).
Mathématicien Français. Son oeuvre a fortement influencé le développement des mathématiques au 18 ème siecle. Ses recherches couvrent l'ensemble des domaines mathématiques de l'époque.

Jean le Rond d'Alembert (1717-1783).
Mathématicien, philosophe et encyclopédiste français, il est célèbre pour avoir dirigé l'Encyclopédie avec Denis Diderot jusqu'en 1757 et pour ces recherches en mathématiques sur les équations différentielles et les dérivées partielles.

Bibliographie

[1] E. Amar et E. Matheron, *Analyse complexe*, Cassini, 2004.

[2] S. D. Chatterji, *Cours d'analyse (vol. 2 : Analyse Complexe)*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1997.

[3] P. Dolbeault, *Analyse complexe*, Dunod, 1997.

[4] J. F. Pabion, *Eléments d'analyse complexe*, Ellipses, 1995.

[5] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe : cours et exercices*, Dunod, Paris, 1998.

[6] M. R. Spiegel, *Variables complexes. Cours et problèmes*,Séries Schaum, McGraw-Hill, 1976.

[7] P. Tauvel, *Analyse complexe : Exercices corrigés*, 2e cycle, Agrégation, Dunod, 1999.

[8] P. Tauvel, *Analyse complexe pour la Licence 3 : Cours et exercices corrigés*, Collection : Sciences Sup, Dunod, 2006.

[9] P. Vogel, *Fonctions analytiques : Cours et exercices avec solutions*, Dunod, 1999.