

Math2 – Chapitre 5

Circulation et flux

5.1 – Courbes

5.2 – Circulation

5.3 – Surfaces

5.4 – Flux, Stokes et Gauss

5.1 – Courbes

Dans cette section:

- Courbes données par deux équations
- Courbes paramétrées
- Élément de ligne

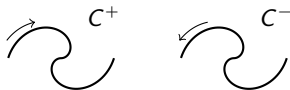
Courbes

Idée – Une **courbe** est une figure géométrique C de *dimension intrinsèque* égale à 1, comme une droite, une parabole, un cercle, ou l'union d'arcs de ce type:



- Une courbe est **plane** si elle est contenue dans un plan.
- Elle est **orientée**, et notée C^+ , si on fixe un sens de parcourir (il y en a toujours deux).

Dans ce cas, on note C^- la courbe orientée dans le sens opposé.



- Elle est **fermée** si en la parcourant on revient au point de départ, comme sur un cercle.

Courbes données par des équations

Définition – Comme sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$, une **courbe** est l'union d'ensembles donnés par deux équations:

$$C = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid F(\vec{x}) = 0 \text{ et } G(\vec{x}) = 0, \text{ plus restrictions sur } \vec{x} \right\}$$

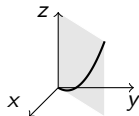
où $F, G : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions réelles et les “restrictions” sont des inégalités dans les coordonnées.

Exemple –

- En coordonnées cartésiennes, les équations

$$x - y = 0 \quad \text{et} \quad x^2 - z = 0,$$

avec la restriction $x \in [0, 1]$, décrivent un arc de la parabole $z = x^2$ sur le plan $y = x$.



- En coordonnées cylindriques, le même arc de parabole est décrit par

$$\rho^2 - 2z = 0 \quad \text{et} \quad \varphi - \pi/4 = 0 \quad \text{avec} \quad \rho \in [0, 1].$$

Courbes paramétrées

Définition – Une **courbe paramétrée** est une courbe pour laquelle on donne aussi la *façon de la parcourir* en fonction d'un **paramètre** t (qui représente le *temps* en physique):

$$C = \left\{ \gamma(t) = \vec{x}(t) \mid t \in [t_0, t_1] \subset \mathbb{R} \right\},$$

où $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une fonction vectorielle dérivable qui s'appelle **paramétrisation** et denote souvent la courbe même.

L'**orientation** de γ est donné par le sens croissant de t .

La courbe est **fermée** si $\gamma(t_0) = \gamma(t_1)$.

Paramétrisation des coordonnées –

- cartésiennes:

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

- cylindriques:

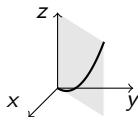
$$\gamma(t) = \rho(t) \vec{e}_\rho(t) + z(t) \vec{k}$$

- sphériques:

$$\gamma(t) = r(t) \vec{e}_r(t)$$

Exemple: paramétrisation d'une courbe

Exemple – L'arc de parabole
peut être paramétré comme suit:



- En coordonnées cartésiennes, on a $z = x^2$, $y = x$, et $x \in [0, 1]$, alors on peut choisir

$$x(t) = t, \quad y(t) = t, \quad z(t) = t^2, \quad \text{avec } t \in [0, 1]$$

et on obtient $\gamma(t) = (t, t, t^2)$, avec $t \in [0, 1]$.

- En coordonnées cylindriques, on a $\rho^2 = 2z$, $\varphi = \pi/4$, et $\rho \in [0, 1]$, alors on peut choisir:

$$\rho(t) = t \quad \varphi(t) = \pi/4, \quad z(t) = t^2/2, \quad \text{avec } t \in [0, 1]$$

et on obtient $\gamma(t) = t \vec{e}_\rho(t) + t^2/2 \vec{k}$, avec $t \in [0, 1]$.

Vitesse et accélération

Définition – Pour une courbe paramétrée $\gamma(t) = \vec{x}(t)$ on appelle:

- **vitesse**, le vecteur

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{d}{dt} \vec{x}(t),$$

- **accélération**, le vecteur

$$\ddot{\gamma}(t) = \frac{d^2}{dt^2} \vec{x}(t).$$

Lemme – Les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont constants, par contre:

$$\begin{cases} \dot{\vec{e}}_\rho = \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi \\ \dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \vec{e}_\rho \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\vec{e}}_r = \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \dot{\theta} \vec{e}_\theta \\ \dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_r - \dot{\varphi} \cos \theta \vec{e}_\theta \\ \dot{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta} \vec{e}_r + \dot{\varphi} \cos \theta \vec{e}_\varphi \end{cases}$$

Paramétrisation de la vitesse en coordonnées –

- cartésiennes:

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{x}(t) \vec{i} + \dot{y}(t) \vec{j} + \dot{z}(t) \vec{k}$$

- cylindriques:

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{\rho}(t) \vec{e}_\rho(t) + \rho(t) \dot{\varphi}(t) \vec{e}_\varphi(t) + \dot{z}(t) \vec{k}$$

- sphériques:

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{r}(t) \vec{e}_r(t) + r(t) \dot{\varphi}(t) \vec{e}_\varphi(t) + r(t) \dot{\theta}(t) \vec{e}_\theta(t)$$

Courbes régulières

Définition – La courbe $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ est **régulière** si la vitesse ne s'annule jamais, c'est-à-dire si

$$\dot{\gamma}(t) \neq \vec{0} \quad (\text{ou bien} \quad \|\dot{\gamma}(t)\| \neq 0) \quad \text{pour tout } t \in [t_0, t_1].$$

Dans ce cas, la vitesse est un vecteur tangent à la courbe, et on appelle:

- **élément de ligne**, le vecteur $\boxed{\vec{d\ell} = \dot{\gamma}(t) dt}$;
- **abscisse curviligne**, la primitive de $\|\dot{\gamma}(t)\|$, notée $s = s(t)$, donc on a $\boxed{s'(t) = \|\dot{\gamma}(t)\|}$;

- **élément d'arc**, la différentielle $\boxed{ds = \|\dot{\gamma}(t)\| dt}$;

- **longueur**, l'intégrale

$$\boxed{L_{t_0}^{t_1}(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_{s(t_0)}^{s(t_1)} ds} .$$

Exemples de courbes paramétrées

Exemples –

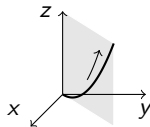
- **Parabole:** $x = y, z = x^2$ et $x \in [0, 1]$

$$\gamma(t) = (t, t, t^2) \quad \text{avec} \quad t \in [0, 1]$$

$$\dot{\gamma}(t) = (1, 1, 2t) = \vec{i} + \vec{j} + 2t \vec{k}$$

$$\|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{2 + 4t^2} \neq 0 \implies \gamma \text{ est régulière}$$

$$d\vec{\ell} = (1, 1, 2t) dt = dt \vec{i} + dt \vec{j} + 2t dt \vec{k}.$$

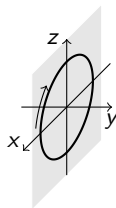


- **Ellipse:** $\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$ et $y = 0$

$$\gamma(t) = (3 \cos t, 0, 2 \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\dot{\gamma}(t) = (-3 \sin t, 0, 2 \cos t) \neq \vec{0}$$

$$d\vec{\ell} = (-3 \sin t, 0, 2 \cos t) dt = -3 \sin t dt \vec{i} + 2 \cos t dt \vec{k}.$$



Exemples de courbes paramétrées

• Hélice circulaire:

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t) \quad \text{avec} \quad t \in [0, 6\pi]$$
$$\implies x^2 + y^2 = 1, \quad \frac{y}{x} = \tan z \quad (\text{si } x \neq 0)$$

$$\dot{\gamma}(t) = (-\sin t, \cos t, 1) \neq \vec{0} \implies \gamma \text{ rég.}$$
$$\implies d\vec{\ell} = (-\sin t \vec{i} + \cos t \vec{j} + \vec{k}) dt$$

$$\|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

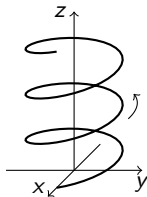
$$\implies L_0^{2\pi}(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = 2\sqrt{2}\pi$$

En cylindriques: $\rho(t) = 1, \quad \varphi(t) = t, \quad z(t) = t$

$$\implies \gamma(t) = \rho(t) \vec{e}_\rho + z(t) \vec{k} = \vec{e}_\rho + t \vec{k}$$

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{\rho}(t) \vec{e}_\rho + \rho(t) \dot{\varphi}(t) \vec{e}_\varphi + \dot{z}(t) \vec{k} = \vec{e}_\varphi + \vec{k}$$

$$\implies d\vec{\ell} = (\vec{e}_\varphi + \vec{k}) dt$$



5.2 – Circulation

Dans cette section:

- Circulation d'un champ de vecteurs le long d'une courbe
- Circulation d'un champ de gradient

Circulation et intégrale curviligne

Définition – Soit $\vec{V}$ un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et soit C^+ une courbe orientée dans le domaine de $\vec{V}$, paramétrée par $\gamma: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^3$. On appelle **circulation de $\vec{V}$ le long de C^+** l'**intégrale curviligne**

$$\int_{C^+} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{V}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt$$

où $\vec{V}(\gamma(t))$ indique que le champ $\vec{V}$ est évalué sur les points de la courbe et $\cdot$ indique le produit scalaire entre vecteurs.

Notation – Si C^+ est une courbe fermée, la circulation de $\vec{V}$ le long de C^+ s'écrit

$$\oint_{C^+} \vec{V} \cdot d\vec{\ell}$$

Proposition – Si C^- est orientée dans le sens opposé à C^+ , on a

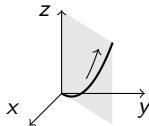
$$\int_{C^-} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = - \int_{C^+} \vec{V} \cdot d\vec{\ell}.$$

Exercices

Enoncé – Calculer la circulation des champs suivants, le long des courbes indiquées.

- Champ $\vec{F}(x, y, z) = z \vec{i} - y \vec{j} + x \vec{k}$

Parabole $\gamma(t) = (t, t, t^2), \quad t \in [0, 1]$



Réponse – On a

$$\vec{F}(\gamma(t)) = t^2 \vec{i} - t \vec{j} + t \vec{k}$$

$$\dot{\gamma}(t) = \vec{i} + \vec{j} + 2t \vec{k}.$$

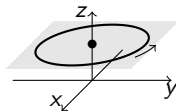
La circulation de $\vec{F}$ le long de γ est donc

$$\begin{aligned} \int_{C_1^+} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} &= \int_0^1 (t^2 - t + 2t^2) dt \\ &= \int_0^1 (3t^2 - t) dt \\ &= \left[t^3 - \frac{1}{2}t^2 \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Exercices

- Champ $\vec{V}(\rho, \varphi, z) = \varphi \vec{e}_\rho + z \vec{e}_\varphi + \rho \vec{k}$

Cercle $x^2 + y^2 = 9, \quad z = 2$
orienté en sens antihoraire



Réponse – On paramétrise $\gamma(t) = \rho(t) \vec{e}_\rho + z(t) \vec{k}$ avec

$$\rho(t) = 3, \quad \varphi(t) = t \quad \text{et} \quad z(t) = 2, \quad t \in [0, 2\pi].$$

On a alors

$$\vec{V}(\gamma(t)) = t \vec{e}_\rho + 2 \vec{e}_\varphi + 3 \vec{k}$$

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{\rho}(t) \vec{e}_\rho + \rho(t) \dot{\varphi}(t) \vec{e}_\varphi + \dot{z}(t) \vec{k} = 3 \vec{e}_\varphi$$

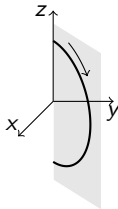
et la circulation de $\vec{V}$ le long de γ est donc

$$\int_{\gamma} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^{2\pi} 6 \, dt = 12\pi.$$

Exercices

- Champ $\vec{U}(r, \varphi, \theta) = \varphi \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\varphi + \rho \vec{e}_\theta$

Demi-cercle $x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad y = x \geq 0$
orienté en sens horaire



Réponse – On paramétrise $\gamma(t) = r(t) \vec{e}_r$ avec

$$r(t) = 2, \quad \varphi(t) = \frac{\pi}{4}, \quad \theta(t) = t, \quad t \in [0, \pi].$$

On a alors

$$\vec{U}(\gamma(t)) = \pi/4 \vec{e}_r + \sin t \vec{e}_\varphi + 2 \vec{e}_\theta$$

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{r}(t) \vec{e}_r + r(t) \dot{\varphi}(t) \vec{e}_\varphi + r(t) \dot{\theta}(t) \vec{e}_\theta = 2 \vec{e}_\theta$$

et la circulation de $\vec{U}$ le long de γ est donc

$$\int_{\gamma} \vec{U} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^\pi 4 \, dt = 4\pi.$$

Travail d'une force

Définition – Soit $\vec{F}$ un champ de force de $\mathbb{R}^3$ qui déplace un corps le long d'un trajet paramétré par la courbe $\gamma: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Le **travail de la force** $\vec{F}$ est l'énergie W fournie pour accomplir le déplacement et est donné par la circulation de $\vec{F}$ le long de γ .

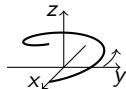
$$W = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

Exemple – Calculons le travail effectué par la force

$$\vec{F}(x, y, z) = z \vec{i} - y \vec{j} + x \vec{k}$$

pour déplacer un objet le long de l'arc d'hélice

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t), \quad t \in [0, 2\pi].$$



On a

$$\vec{F}(\gamma(t)) = t \vec{i} - \sin t \vec{j} + \cos t \vec{k}$$

$$\dot{\gamma}(t) = -\sin t \vec{i} + \cos t \vec{j} + \vec{k},$$

donc

$$\begin{aligned} W &= \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^{2\pi} (-t \sin t - \sin t \cos t + \cos t) dt \\ &= \left[t \cos t \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \cos t dt - \left[\frac{1}{2} \sin^2 t \right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos t dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Circulation d'un champ de gradient

Théorème – Soit $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} \phi$ un champ de gradient, de domaine D_ϕ . Alors:

- La circulation de $\overrightarrow{\text{grad}} \phi$ le long d'une courbe C^+ quelconque qui joint deux points A et B contenus dans D_ϕ ne dépend pas de la courbe mais seulement des deux points:

$$\int_{C^+} \overrightarrow{\text{grad}} \phi \cdot \vec{d\ell} = \phi(B) - \phi(A).$$

- La circulation de $\overrightarrow{\text{grad}} \phi$ le long d'une courbe fermée C^+ est nulle:

$$\oint_{C^+} \overrightarrow{\text{grad}} \phi \cdot \vec{d\ell} = 0.$$

La première assertion se démontre par calcul direct.

La deuxième est une conséquence de la première, ou bien un corollaire du théorème de Gauss traité à la fin de ce chapitre.

Exercice

Enoncé – *Considerons le champ scalaire*

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{y(z^2 - x^2)}},$$

sur le domaine $D = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y > 0, z > x > 0 \}$.

Calculer le travail de la force conservative $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} \phi$ le long d'une hélice C^+ contenue dans D qui joint le point $A = (0, 1, 2)$ au point $B = (3, 4, 5)$.

Réponse – Le travail de $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} \phi$ le long de C^+ vaut:

$$\begin{aligned} W &= - \int_{C^+} \overrightarrow{\text{grad}} \phi \cdot d\vec{\ell} = \phi(0, 1, 2) - \phi(3, 4, 5) \\ &= \frac{1}{\sqrt{4-0}} - \frac{1}{\sqrt{4(25-9)}} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 4} = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

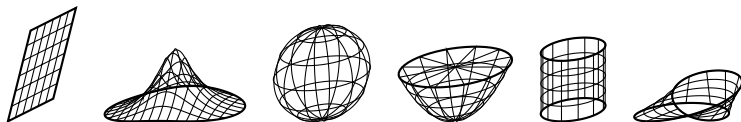
5.3 – Surfaces

Dans cette section:

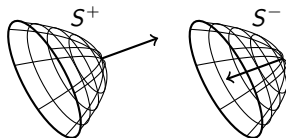
- Surfaces données par une équation
- Surfaces paramétrées
- Vecteur normale et élément de surface

Surfaces

Idée – Une **surface** est une figure géométrique S de *dimension intrinsèque* égale à 2, comme un plan, un disque, un paraboloïde, une sphère, un cylindre, la bande de Moebius, ou leur union:

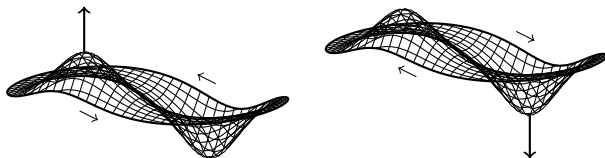


- Une surface est **plane** si elle est contenue dans un plan.
- Elle est **orientable** si on peut distinguer deux cotés. Ceci n'est pas toujours possible, par exemple pour la bande de Moebius.
- Une surface orientable est **orientée**, et notée S^+ , si on choisit un sens de traversée, indiqué par un vecteur sortant. Dans ce cas, on note S^- la surface orientée dans le sens opposé.



Bord des surfaces et surfaces fermées

- Le **bord** d'une surface S est la courbe ∂S qui délimite la surface, par exemple le cercle qui entoure un disque, ou les deux cercles qui délimitent un cylindre.
- Le bord d'une surface orientée est automatiquement orienté de telle sorte qu'en le parcourant débout (direction sortante de S), la surface se trouve sur la gauche.



- Une surface S est **fermée** si on peut distinguer son intérieur de son extérieur, comme pour la sphère. Cela arrive si son bord est vide: $\partial S = \emptyset$.
- Une surface fermée S delimite un solide $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, comme la sphère qui entoure la boule unitaire. On dit alors que S est le **bord de** Ω , et on écrit: $S = \partial\Omega$.

Surfaces données par une équation

Définition – Comme sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$, une **surface** est l'union d'ensembles donnés par une équation:

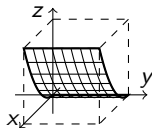
$$S = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid F(\vec{x}) = 0 \quad \text{plus restrictions sur les variables} \right\}$$

où $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réelle et les “restrictions” sont des inégalités dans les coordonnées.

Proposition – *Le graphe d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une surface d'équation $z = f(x, y)$, avec $(x, y) \in D_f$.*

Exemple – $z = x^2$, $x, y \in [0, 1]$
décrit un **cylindre parabolique**,
d'axe $\vec{Oy}$.

Dans ce cas, S est non fermée et son bord ∂S est l'union de quatre courbes.



Surfaces paramétrées

Définition – Une **surface paramétrée** est une surface où les points sont décrits par deux **paramètres** indépendants u et v :

$$S = \left\{ f(u, v) = \vec{x}(u, v) \mid u \in [u_0, u_1], v \in [v_0, v_1] \right\},$$

où $f : [u_0, u_1] \times [v_0, v_1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est une fonction vectorielle différentiable qui s'appelle **paramétrisation** de la surface.

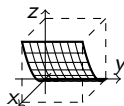
En coord. cartésiennes: $f(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$

Exemples –

• **Cylindre parabolique:** $z = x^2, \quad x, y \in [0, 1]$

si on pose $y = u, x = v$ et $z = v^2$, on a

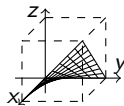
$$f(u, v) = (v, u, v^2), \quad u, v \in [0, 1]$$



• **Hyperboloïde:** $z = xy, \quad x, y \in [0, 1]$

si on pose $x = u, y = v$ et $z = uv$, on a

$$f(u, v) = (u, v, uv), \quad u, v \in [0, 1]$$



Surfaces régulières et vecteur normal

Définition – Une surface S paramétrée par $f : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est **régulière** au point $f(u, v)$ si le

- **vecteur normal**

$$\vec{n}(u, v) = \frac{\partial f(u, v)}{\partial u} \wedge \frac{\partial f(u, v)}{\partial v}$$

est bien défini et non nul. Dans ce cas, S est orientée par $\vec{n}$, et on appelle:

- **élément de surface**, le vecteur

$$\vec{dS} = \vec{n}(u, v) \, du \, dv,$$

- **élément d'aire**, le scalaire

$$dA = \|\vec{n}(u, v)\| \, du \, dv,$$

- **aire de la surface**, l'intégrale double

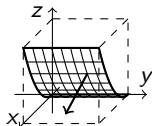
$$\text{Aire}(S) = \iint_{U \times V} \|\vec{n}(u, v)\| \, du \, dv = \iint_{U \times V} dA.$$

Exemples de surfaces paramétrées

Exemples –

- **Cylindre parabolique:** $z = x^2$, $x, y \in [0, 1]$

$$f(u, v) = (v, u, v^2), \quad u, v \in [0, 1]$$

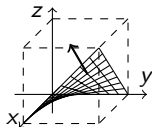


$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{vecteur orienté vers le bas}$$

$$\overrightarrow{dS} = 2v \, du \, dv \, \vec{i} - du \, dv \, \vec{k}$$

- **Hyperboloïde:** $z = xy$, $x, y \in [0, 1]$

$$f(u, v) = (u, v, uv), \quad u, v \in [0, 1]$$



$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ -u \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{vecteur orienté vers le haut}$$

$$\overrightarrow{dS} = -v \, du \, dv \, \vec{i} - u \, du \, dv \, \vec{j} + du \, dv \, \vec{k}$$

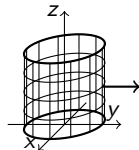
Exemples de surfaces paramétrées

- **Cylindre circulaire:** $x^2 + y^2 = R^2$, $z \in [0, H]$

en coord. cylindriques: $\rho = R$, donc

$$f(\varphi, z) = (R \cos \varphi, R \sin \varphi, z)$$

avec $\varphi \in [0, 2\pi[$ et $z \in [0, H]$



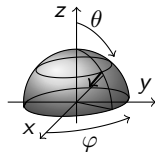
$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -R \sin \varphi \\ R \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{vecteur sortant}$$

- **Démi-sphère:** $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$

en coord. sphériques: $r = 1$, donc

$$f(\varphi, \theta) = (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta)$$

avec $\varphi \in [0, 2\pi]$ et $\theta \in [0, \pi/2]$



$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \varphi \sin^2 \theta \\ -\sin \varphi \sin^2 \theta \\ -\sin \theta \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{vecteur entrant}$$

5.4 – Flux, Stokes et Gauss

Dans cette section:

- Flux d'un champ de vecteurs à travers une surface
- Théorème de Stokes-Ampère
- Cas particuliers, Théorème de Green-Riemann
- Théorème de Gauss

Flux et intégrales de surface

Définition – Soit $\vec{V}$ un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et S^+ une surface contenue dans le domaine de $\vec{V}$, paramétrée par $f : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}^3$, et orientée par le vecteur normal $\vec{n}$. On appelle **flux de $\vec{V}$ à travers S^+ l'intégrale de surface**

$$\iint_{S^+} \vec{V} \cdot d\vec{S} = \iint_{U \times V} \vec{V}(f(u, v)) \cdot \vec{n}(u, v) \, du \, dv,$$

où $\vec{V}(f(u, v))$ indique que le champ $\vec{V}$ est évalué sur les points de la surface et $\cdot$ est le produit scalaire de vecteurs.

Notation – Si S^+ une surface fermée, le flux de $\vec{V}$ à travers S^+ s'écrit

$$\oiint_{S^+} \vec{V} \cdot d\vec{\ell}.$$

Proposition – Si S^- est orientée dans le sens opposé à S^+ , on a

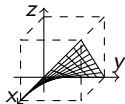
$$\iint_{S^-} \vec{V} \cdot d\vec{S} = - \iint_{S^+} \vec{V} \cdot d\vec{S}.$$

Exercice

Enoncé – Calculer le flux des champs suivants, à travers les surfaces indiquées.

• Champ $\vec{V}(x, y, z) = x \vec{i} + z \vec{j} + y \vec{k}$

Hyperboloïde $f(u, v) = (u, v, uv)$, $u, v \in [0, 1]$



Réponse – On a

$$\vec{V}(f(u, v)) = u \vec{i} + uv \vec{j} + v \vec{k}$$

$$\vec{n}(u, v) = -v \vec{i} - u \vec{j} + \vec{k}$$

donc le flux de $\vec{V}$ à travers S^+ vaut

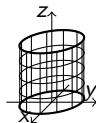
$$\begin{aligned} \iint_{S^+} \vec{V} \cdot d\vec{S} &= \iint_{[0,1] \times [0,1]} (-uv - u^2v + v) \, du \, dv \\ &= \int_0^1 (-u - u^2 + 1) \, du \int_0^1 v \, dv \\ &= \left[-\frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{3}u^3 + u \right]_0^1 \left[\frac{1}{2}v^2 \right]_0^1 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1 \right) \frac{1}{2} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Exercice

• Champ $\vec{V}(x, y, z) = xz \vec{i} - yz \vec{j}$

Cylindre $f(\varphi, z) = (R \cos \varphi, R \sin \varphi, z)$,

$$\varphi \in [0, 2\pi[, \quad z \in [0, H]$$



Réponse – On a

$$\vec{V}(f(\varphi, z)) = R \cos \varphi z \vec{i} - R \sin \varphi z \vec{j}$$

$$\vec{n}(\varphi, z) = R \cos \varphi \vec{i} + R \sin \varphi \vec{j}$$

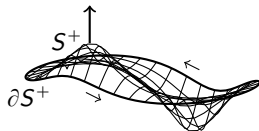
donc le flux de $\vec{V}$ à travers S^+ vaut

$$\begin{aligned} \iint_{S^+} \vec{V} \cdot d\vec{S} &= \iint_{[0, 2\pi[\times [0, H]} R^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) z \, d\varphi \, dz \\ &= R^2 \int_0^{2\pi} \cos(2\varphi) \, d\varphi \int_0^H z \, dz \\ &= R^2 \left[\frac{1}{2} \sin(2\varphi) \right]_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_0^H = 0 \end{aligned}$$

Théorème de Stokes-Ampère

Théorème – Si $\vec{V} = \text{rot } \vec{U}$ et S^+ est une surface orientée quelconque, avec bord ∂S^+ , on a:

$$\iint_{S^+} \text{rot } \vec{U} \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial S^+} \vec{U} \cdot d\vec{\ell}$$



Autrement dit:

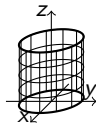
Le flux d'un champ $\text{rot } \vec{U}$ à travers une surface S^+ est égal à la circulation de $\vec{U}$ le long de son bord ∂S^+ .

Exemple

Exemple – Champ $\vec{V}(x, y, z) = xz \vec{i} - yz \vec{j}$

Cylindre $f(\varphi, z) = (R \cos \varphi, R \sin \varphi, z)$,

$$\varphi \in [0, 2\pi[, \quad z \in [0, H]$$



• On remarque que $\operatorname{div} \vec{V}(x, y, z) = z - z = 0$.

Puisque $D_{\vec{V}} = \mathbb{R}^3$ est contractile, $\vec{V}$ a un potentiel vectoriel $\vec{U}$.

Après calculs, on trouve: $\vec{U}(x, y, z) = xyz \vec{k}$.

• On applique alors le théorème de Stokes:

$$\iint_{S^+} \vec{V} \cdot d\vec{S} = \iint_{S^+} \operatorname{rot} \vec{U} \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial S^+} \vec{U} \cdot d\vec{\ell}.$$

• Le bord de S^+ est composé de deux cercles orientés

$$\alpha(t) = (R \cos t, R \sin t, 0) \quad \text{et} \quad \beta(t) = (R \cos t, -R \sin t, H),$$

avec

$$\dot{\alpha}(t) = -R \sin t \vec{i} + R \cos t \vec{j} \quad \text{et} \quad \dot{\beta}(t) = -R \sin t \vec{i} - R \cos t \vec{j}.$$

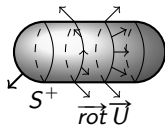
• On alors $\vec{U} \cdot \dot{\alpha}(t) = 0$ et $\vec{U} \cdot \dot{\beta}(t) = 0$, donc $\iint_{S^+} \vec{V} \cdot d\vec{S} = 0$.

Théorème de Green-Riemann

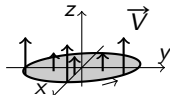
Cas particuliers du théorème de Stokes –

- Si S^+ est une surface fermée, on a:

$$\oiint_{S^+} \operatorname{rot} \vec{U} \cdot d\vec{S} = 0$$



- Si S^+ est une surface plane dans le plan xOy ,
et $\vec{V} = \operatorname{rot} \vec{U}$ est orthogonal à S ,
le champ $\vec{U}$ ne dépend pas de z et on a:



$$\vec{U}(x, y) = P(x, y) \vec{i} + Q(x, y) \vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{V} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

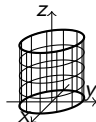
Dans ce cas: **Théorème de Green-Riemann:**

$$\iint_{S^+} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial S^+} (P dx + Q dy).$$

Exemple

Exemple – Champ $\vec{V}(x, y, z) = xz \vec{i} - yz \vec{j}$

Cylindre précédent fermé par les deux disques
à hauteur $z = 0$ et $z = H$.



- Puisque $\vec{V} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{U}$ avec $\vec{U}(x, y, z) = xyz \vec{k}$,
et $\partial S^+ = \emptyset$, on a:

$$\begin{aligned} \oiint_{S^+} \vec{V} \cdot d\vec{S} &= \oiint_{S^+} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{U} \cdot d\vec{S} \\ &= \int_{\partial S^+} \vec{U} \cdot d\vec{\ell} = 0. \end{aligned}$$

Théorème de Gauss-Ostrogradski

Théorème – Si $\vec{V}$ est un champ de vecteurs quelconque et S^+ est une surface orientée fermée, qui delimite un espace borné Ω , c'est-à-dire que $\partial\Omega = S$, on a:

$$\boxed{\iint_{S^+ = \partial\Omega} \vec{V} \cdot \vec{dS} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{V} \, dx \, dy \, dz}.$$

Exemple – Si $\vec{V}$ est un champ avec $\operatorname{div} \vec{V} = 5$, et S est la coquille d'un oeuf Ω de volume 4, le flux de $\vec{V}$ entrant dans l'oeuf est:

$$\begin{aligned} \oiint_{S^+} \vec{V} \cdot \vec{dS} &= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{V} \, dx \, dy \, dz \\ &= 5 \iiint_{\Omega} dx \, dy \, dz = 5 \operatorname{Vol}(\Omega) = 20. \end{aligned}$$

Exercice

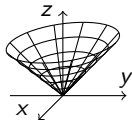
Enoncé – Calculer le flux du champ de vecteurs

$$\vec{V}(x, y, z) = x^2 \vec{i} + y^2 \vec{j} + z^2 \vec{k}$$

à travers le cône S^+ d'équation $z^2 = x^2 + y^2$, $z \in [0, 3]$, paramétré par

$$f(\rho, \varphi) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, \rho)$$

$$\rho \in [0, 3], \varphi \in [0, 2\pi].$$



Réponse –

- D'abord, on observe que la surface S n'est pas fermée, car son bord ∂S est le cercle $x^2 + y^2 = 9$ et $z = 3$.
- Ensuite, on observe que $\operatorname{div} \vec{V}(x, y, z) = 2x + 2y + 2z \neq 0$.
- Alors on ne peut appliquer aucun théorème, il faut calculer le flux de $\vec{V}$ à travers S^+ en utilisant la définition.

Exercice (suite)

- Pour: $\vec{V}(x, y, z) = x^2 \vec{i} + y^2 \vec{j} + z^2 \vec{k}$

et S^+ : $f(\rho, \varphi) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, \rho)$, $\rho \in [0, 3]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$,

on a:

$$\vec{V}(f(\rho, \varphi)) = \rho^2 \cos^2 \varphi \vec{i} + \rho^2 \sin^2 \varphi \vec{j} + \rho^2 \vec{k},$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\rho \sin \varphi \\ \rho \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho \cos \varphi \\ -\rho \sin \varphi \\ \rho \end{pmatrix}.$$

- Le flux est alors:

$$\begin{aligned} \iint_{S^+} \vec{V} \cdot d\vec{S} &= \iint_{[0,3] \times [0,2\pi]} (-\rho^3 \cos^3 \varphi - \rho^3 \sin^3 \varphi + \rho^3) d\rho d\varphi \\ &= \int_0^3 \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} (1 - \cos^3 \varphi - \sin^3 \varphi) d\varphi \\ &= \frac{1}{4} 3^4 2\pi = \frac{81\pi}{2}, \end{aligned}$$

parce que $\int_0^{2\pi} \cos^3 \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin^3 \varphi d\varphi = 0$.

Exercice

Exercice – Calculer le flux du même champ de vecteurs

$$\vec{V}(x, y, z) = x^2 \vec{i} + y^2 \vec{j} + z^2 \vec{k}$$

à travers la surface fermée S^+ formée du cône précédent $z^2 = x^2 + y^2$, $z \in [0, 3]$ et du disque $x^2 + y^2 \leq 9$, $z = 3$, orientée par les vecteurs normaux sortants.

Réponse – Puisque la surface est fermée, on peut utiliser le théorème de Gauss:

$$\oiint_{S^+} \vec{V} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{V} \, dx \, dy \, dz,$$

où Ω est le solide entouré par S , donc

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z^2, \, 0 \leq z \leq 3\},$$

et

$$\operatorname{div} \vec{V}(x, y, z) = 2x + 2y + 2z.$$

Exercice (suite)

On a alors, en coordonnées cylindriques,

$$\begin{aligned}\oint_{S^+} \vec{V} \cdot d\vec{S} &= 2 \iiint_{\Omega} (x + y + z) \, dx \, dy \, dz \\&= 2 \int_0^3 dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^z \left(\rho^2 (\cos \varphi + \sin \varphi) + \rho z \right) d\rho \\&= 2 \int_0^3 dz \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{3} \rho^3 (\cos \varphi + \sin \varphi) + \frac{1}{2} \rho^2 z \right]_{\rho=0}^{\rho=z} d\varphi \\&= 2 \int_0^3 dz \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{3} z^3 (\cos \varphi + \sin \varphi) + \frac{1}{2} z^3 \right) d\varphi \\&= 2 \int_0^3 dz \left[\frac{1}{3} z^3 (\sin \varphi - \cos \varphi) + \frac{1}{2} z^3 \varphi \right]_0^{2\pi} \\&= 2 \int_0^3 \frac{1}{2} z^3 \, 2\pi \, dz \\&= 2\pi \frac{1}{4} 3^4 = \frac{81\pi}{2}\end{aligned}$$

Exercice

Exercice – Calculer le flux du rotationnel de

$$\vec{V}(x, y, z) = x^2 \vec{i} + y^2 \vec{j} + z^2 \vec{k}$$

à travers le cône S^+ d'équation $z^2 = x^2 + y^2$, $z \in [0, 3]$, paramétré par

$$f(\rho, \varphi) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, \rho), \quad \rho \in [0, 3], \varphi \in [0, 2\pi].$$

Réponse – Pour trouver ce flux on utilise le théorème de Stokes:

$$\iint_{S^+} \operatorname{rot} \vec{V} \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial S^+} \vec{V} \cdot d\vec{\ell}$$

et on n'a pas besoin de calculer $\operatorname{rot} \vec{V}$.

Le bord ∂S^+ est le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 9$, $z = 3$, orienté dans le sens horaire, qu'on paramétrise par

$$\gamma(t) = (3 \cos t, -3 \sin t, 3), \quad t \in [0, 2\pi[.$$

Exercice (suite)

On a alors: $\gamma'(t) = -3 \sin t \vec{i} - 3 \cos t \vec{j}$ et

$$\vec{V}(\gamma(t)) = 9 \cos^2 t \vec{i} + 9 \sin^2 t \vec{j} + 9 \vec{k}.$$

Le flux de $\overrightarrow{\text{rot } V}$ à travers le cône S^+ est donc:

$$\begin{aligned} \iint_{S^+} \overrightarrow{\text{rot } V} \cdot d\vec{S} &= \oint_{\partial S^+} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} \\ &= \int_0^{2\pi} \vec{V}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-27 \cos^2 t \sin t - 27 \sin^2 t \cos t + 0) dt \\ &= 27 \left[\frac{1}{3} \cos^3 t - \frac{1}{3} \sin^3 t \right]_0^{2\pi} \\ &= 0. \end{aligned}$$

FIN DU COURS !

BONNE CONTINUATION !