



## Extremums locaux, gradient, fonctions implicites

---

### Exercice 1

Pour chacune des fonctions suivantes étudier la nature du point critique donné :

1.  $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$  au point critique  $(0, 0)$  ;
2.  $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 + 6$  au point critique  $(0, 0)$  ;
3.  $f(x, y) = x^3 + 2xy^2 - y^4 + x^2 + 3xy + y^2 + 10$  au point critique  $(0, 0)$ .

[Indication ▼](#)    [Correction ▼](#)

[002641]

### Exercice 2

Trouver les points critiques de la fonction  $f$  suivante et déterminer si ce sont des minima locaux, des maxima locaux ou des points selle.

$$f(x, y) = \sin x + y^2 - 2y + 1$$

[Indication ▼](#)    [Correction ▼](#)

[002642]

### Exercice 3

1. Soit  $f$  une fonction réelle d'une variable réelle de classe  $C^2$  dans un voisinage de  $0 \in \mathbb{R}$  telle que  $f(0) = 0$  et  $f'(0) \neq 0$ . Montrer que la fonction réelle  $F$  des deux variables  $x$  et  $y$  définie dans un voisinage de  $(0, 0)$  par  $F(x, y) = f(x)f(y)$  n'a pas d'extremum relatif en  $(0, 0)$ . Est-ce que le point  $(0, 0)$  est quand même critique ? Si oui caractériser sa nature.
2. Déterminer les points critiques, puis les minima et les maxima locaux de

$$f(x, y) = \sin(2\pi x) \sin(2\pi y).$$

Remarque : en utilisant la périodicité de la fonction, on peut limiter le nombre de cas à étudier.

[Indication ▼](#)    [Correction ▼](#)

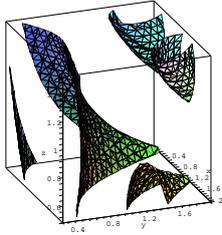
[002643]

### Exercice 4

Déterminer l'équation du plan tangent à la surface de niveau

$$\sin(\pi xy) + \sin(\pi yz) = 1,$$

au point de coordonnées  $(1, \frac{1}{6}, 1)$ . Identifier, en ce point, un vecteur perpendiculaire à la surface. Votre résultat est-il compatible avec la figure ci-dessous ? Expliquer.



[Indication ▼](#)    [Correction ▼](#)

[002644]

### Exercice 5

Soit  $\mathcal{C}$  la courbe plane d'équation  $f(x, y) = ye^x + e^y \sin(2x) = 0$ .

1. Appliquer le théorème des fonctions implicites à la courbe  $\mathcal{C}$  au point  $(0, 0)$ .
2. Déterminer la limite de  $y/x$  quand  $(x, y)$  tend le long la courbe  $\mathcal{C}$  vers  $(0, 0)$ .

[Indication ▼](#)    [Correction ▼](#)

[002645]

### Exercice 6

1. Déterminer les points stationnaires de la fonction  $f$  de deux variables définie par  $f(x, y) = x(x+1)^2 - y^2$  et préciser la nature de chacun d'eux.
2. Tracer la courbe constituée des points tels que  $f(x, y) = 0$  et  $x \geq 0$ . (*Indication* : Étudier la fonction  $x \mapsto \sqrt{x}(x+1)$  pour  $x \geq 0$ ).
3. Montrer que le point  $(-1, 0)$  est un point isolé de la partie

$$\mathcal{C} = \{(x, y); f(x, y) = 0\}$$

du plan, c'est-à-dire, le point  $(-1, 0)$  appartient à cette partie et il existe un nombre réel  $\varepsilon > 0$  tel que  $D_\varepsilon \cap \mathcal{C} = \{(-1, 0)\}$  où  $D_\varepsilon$  est le disque ouvert centré en  $(-1, 0)$  et de rayon  $\varepsilon$ .

4. Énoncer le théorème des fonctions implicites.
5. Montrer que, quel que soit le point  $(x_0, y_0)$  de  $\mathcal{C}$  distinct de  $(-1, 0)$ , au moins une des deux alternatives (i) ou (ii) ci-dessous est vérifiée :
  - (i) Il existe une fonction  $h$  de classe  $C^1$  de la variable  $x$  définie dans un intervalle ouvert approprié telle que  $h(x_0) = y_0$  et telle que, pour qu'au voisinage de  $(x_0, y_0)$  les coordonnées  $x$  et  $y$  du point  $(x, y)$  satisfassent à l'équation  $f(x, y) = 0$  il faut et il suffit que  $y = h(x)$ .
  - (ii) Il existe une fonction  $k$  de classe  $C^1$  de la variable  $y$  définie dans un intervalle ouvert approprié telle que  $h(y_0) = x_0$  et telle que, pour qu'au voisinage de  $(x_0, y_0)$  les coordonnées  $x$  et  $y$  du point  $(x, y)$  satisfassent à l'équation  $f(x, y) = 0$  il faut et il suffit que  $x = k(y)$ .

[Indication ▼](#)    [Correction ▼](#)

[002646]

---

**Indication pour l'exercice 1 ▲**

---

Rappel : Pour qu'un point critique non dégénéré présente un maximum relatif (resp. minimum relatif) il faut et il suffit que la forme hessienne en ce point soit négative (resp. positive); pour qu'un point critique non dégénéré présente un point selle il faut et il suffit que la forme hessienne en ce point soit (non dégénérée et) indéfinie.

---

**Indication pour l'exercice 2 ▲**

---

Voir l'exercice précédent.

---

**Indication pour l'exercice 3 ▲**

---

Voir les exercices précédents.

---

**Indication pour l'exercice 4 ▲**

---

Le plan tangent à la surface d'équation  $f(x, y, z) = 0$  au point  $(x_0, y_0, z_0)$  est donné par l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0. \quad (1)$$

---

**Indication pour l'exercice 5 ▲**

---

Rappel du théorème des fonctions implicites pour une fonction  $f$  de classe  $C^1$  de deux variables définie dans un ouvert du plan : Soit  $(x_0, y_0)$  un point tel que  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ . Au voisinage de  $x_0$ , il existe une fonction  $h$  de classe  $C^1$  de la variable  $x$  définie dans un intervalle ouvert approprié telle que  $h(x_0) = y_0$  et telle que, pour qu'au voisinage de  $(x_0, y_0)$  les coordonnées  $x$  et  $y$  du point  $(x, y)$  satisfassent à l'équation  $f(x, y) = 0$  il faut et il suffit que  $y = h(x)$  et, s'il en est ainsi,

$$h'(x_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}.$$

Dès que l'intervalle de définition de la fonction  $h$  est fixé la fonction  $h$  est unique.

---

**Indication pour l'exercice 6 ▲**

---

Voir l'exercice précédent.

---

### Correction de l'exercice 1 ▲

---

1.  $df = (2x - y)dx + (2y - x)dy$  et  $\text{Hess}_f = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$  d'où

$$\begin{aligned} (u, v)\text{Hess}_f(0, 0) \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} &= (u, v) \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \\ &= u(2u - v) + v(2v - u) = 2(u^2 - uv + v^2) \\ &= 2 \left( \left(u - \frac{v}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 \right). \end{aligned}$$

Par conséquent la forme hessienne au point  $(0, 0)$  est positive et ce point présente donc un minimum local.

2.  $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 + 6 = (x + y)^2 + 6$  d'où le point  $(0, 0)$  présente un minimum local.

3.  $df = (3x^2 + 2x + 2y^2 + 3y)dx + (4xy - 4y^3 + 3x + 2y)dy$  et

$$\text{Hess}_f = \begin{bmatrix} 6x + 2 & 4y + 3 \\ 4y + 3 & -12y^2 + 4x + 2 \end{bmatrix}$$

d'où

$$\begin{aligned} (u, v)\text{Hess}_f(0, 0) \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} &= (u, v) \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \\ &= (2u + 3v)u + (3u + 2v)v = 2(u^2 + 3uv + v^2) \\ &= 2 \left( \left(u + \frac{3v}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}v^2 \right). \end{aligned}$$

Par conséquent la forme hessienne au point  $(0, 0)$  est non dégénérée et indéfinie et ce point présente un point selle.

---

### Correction de l'exercice 2 ▲

---

Puisque  $df = \cos x dx + (2y - 2)dy$ , les points critiques sont les points  $((k + 1/2)\pi, 1)$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). En plus,  $\text{Hess}_f =$

$$\begin{bmatrix} -\sin x & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ et}$$

$$-\sin((k + 1/2)\pi) = (-1)^{k+1}$$

d'où  $\text{Hess}_f((k + 1/2)\pi, 1) = \begin{bmatrix} (-1)^{k+1} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ . Par conséquent, si  $k$  est impaire, le point  $((k + 1/2)\pi, 1)$  présente un minimum local et, si  $k$  est paire, le point  $((k + 1/2)\pi, 1)$  présente un point selle.

---

### Correction de l'exercice 3 ▲

---

1.  $dF = f(y)f'(x)dx + f(x)f'(y)dy$  et

$$\text{Hess}_f(x, y) = \begin{bmatrix} f(y)f''(x) & f'(x)f'(y) \\ f'(x)f'(y) & f(x)f''(y) \end{bmatrix} \quad (2)$$

d'où  $\text{Hess}_f(0, 0) = (f'(0))^2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  et

$$(u, v)\text{Hess}_f(0, 0) \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = (f'(0))^2 (u, v) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 2(f'(0))^2 uv$$

Par conséquent la forme hessienne au point  $(0, 0)$  est non dégénérée et indéfinie et ce point ne peut pas présenter un extremum relatif. En effet, le point  $(0, 0)$  est critique mais un point selle.

2. D'après la partie (1.) et la périodicité, les points de la forme

$$(x, y) = (k, l) \in \mathbb{R}^2, k, l \in \mathbb{Z}, \quad (3)$$

présentent des points selle. Également d'après la partie (1.),

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= f(y)f'(x) = 2\pi \sin(2\pi y) \cos(2\pi x) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= f(x)f'(y) = 2\pi \sin(2\pi x) \cos(2\pi y). \end{aligned}$$

Par conséquent, pour que le point  $(x, y)$  soit critique il faut et il suffit qu'il soit de la forme

$$(k, l), (k + \frac{1}{2}, l), (k, l + \frac{1}{2}), (k + \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}), k, l \in \mathbb{Z},$$

ou

$$(k + \frac{1}{4}, l + \frac{1}{4}), (k + \frac{1}{4}, l + \frac{3}{4}), (k + \frac{3}{4}, l + \frac{1}{4}), (k + \frac{3}{4}, l + \frac{3}{4}), k, l \in \mathbb{Z}.$$

D'après la périodicité, il suffit d'examiner les huit points

$$(0, 0), (\frac{1}{2}, 0), (0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}), (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}), (\frac{3}{4}, \frac{1}{4}), (\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$$

et, d'après (1.), l'origine présente un point selle. D'après (2),

$$\begin{aligned} \text{Hess}_f(0, \frac{1}{2}) &= \begin{bmatrix} f(\frac{1}{2})f''(0) & f'(0)f'(\frac{1}{2}) \\ f'(0)f'(\frac{1}{2}) & f(0)f''(\frac{1}{2}) \end{bmatrix} = 16\pi^2 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{Hess}_f(\frac{1}{2}, 0) &= \begin{bmatrix} f(0)f''(\frac{1}{2}) & f'(\frac{1}{2})f'(0) \\ f'(\frac{1}{2})f'(0) & f(\frac{1}{2})f''(0) \end{bmatrix} = 16\pi^2 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{Hess}_f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) &= \begin{bmatrix} f(\frac{1}{2})f''(\frac{1}{2}) & f'(\frac{1}{2})f'(\frac{1}{2}) \\ f'(\frac{1}{2})f'(\frac{1}{2}) & f(\frac{1}{2})f''(\frac{1}{2}) \end{bmatrix} = 16\pi^2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

d'où les points  $(0, \frac{1}{2})$ ,  $(\frac{1}{2}, 0)$  et  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  présentent des points selle. Il est géométriquement évident que le comportement de la fonction sin entraîne que les points  $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$  et  $(\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$  présentent des maxima et que les points  $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$  et  $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$  présentent des minima.

### Correction de l'exercice 4 ▲

Soit  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$f(x, y, z) = \sin(\pi xy) + \sin(\pi yz) - 1.$$

Ses dérivées partielles sont

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \pi y \cos(\pi xy), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \pi(x \cos(\pi xy) + z \cos(\pi yz)), \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \pi y \cos(\pi yz)$$

et, après simplification, au point  $(1, \frac{1}{6}, 1)$ , l'équation (1) du plan tangent à la surface de niveau en discussion devient

$$(x - 1) + 12(y - 1/6) + (z - 1) = 0.$$

Ainsi, en ce point, le vecteur  $(1, 12, 1)$  est perpendiculaire à la surface.

### Correction de l'exercice 5 ▲

1. Puisque  $\frac{\partial f}{\partial x} = ye^x + 2e^y \cos(2x)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y} = e^x + e^y \sin(2x)$  il s'ensuit que  $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 2$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$ . Par conséquent, il existe une fonction  $h$  de la variable  $x$  définie au voisinage de 0 telle que  $h(0) = 0$  et telle que, pour qu'au voisinage de  $(0,0)$  les coordonnées  $x$  et  $y$  du point  $(x,y)$  satisfassent à l'équation  $ye^x + e^y \sin(2x) = 0$  il faut et il suffit que  $y = h(x)$ ; de même il existe une fonction  $k$  de la variable  $y$  définie au voisinage de 0 telle que  $h(0) = 0$  et telle que, pour qu'au voisinage de  $(0,0)$  les coordonnées  $x$  et  $y$  du point  $(x,y)$  satisfassent à l'équation  $ye^x + e^y \sin(2x) = 0$  il faut et il suffit que  $x = k(y)$ . En plus,

$$h'(0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)} = -2, \quad k'(0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)} = -\frac{1}{2}.$$

2. Puisque le point  $(0,0)$  appartient à la courbe  $\mathcal{C}$ , en 0, les fonctions  $h$  et  $k$  prennent les valeurs  $h(0) = 0$  et  $k(0) = 0$ . Par conséquent,

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0), (x,y) \neq 0 \\ ye^x + e^y \sin(2x) = 0}} y/x = h'(0) = -2.$$

### Correction de l'exercice 6 ▲

1. Puisque  $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$  et

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (x+1)^2 + 2x(x+1) = (x+1)(3x+1) = 3x^2 + 4x + 1,$$

les points stationnaires de  $f$  sont les points  $(-1,0)$  et  $(-1/3,0)$ . En plus,

$$\text{Hess}_f(x,y) = \begin{bmatrix} 6x+4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

d'où  $\text{Hess}_f(-1,0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$  et  $\text{Hess}_f(-1/3,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ . Par conséquent la forme hessienne au point  $(-1,0)$  est définie négative et ce point présente un maximum local; de même, la forme hessienne au point  $(-1/3,0)$  est non dégénérée et indéfinie et ce point présente un point selle.

2. La courbe  $y = \sqrt{x}(x+1)$  pour  $x \geq 0$  passe par les points  $(0,0)$ ,  $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\sqrt{3})$ ,  $(1,2)$ , et  $(2,3\sqrt{2})$ ; elle a une tangente verticale à l'origine, le point  $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\sqrt{3})$  est un point d'inflexion, la pente en ce point vaut  $\sqrt{3}$ , et c'est la pente minimale de la courbe. Ces faits se déduisent des expressions  $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{2}(\sqrt{x})^{-1}$  et  $y'' = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$ . La courbe constituée des points tels que  $f(x,y) = 0$  et  $x \geq 0$  s'obtient par réflexion de la courbe  $y = \sqrt{x}(x+1)$  pour  $x \geq 0$  par rapport à l'axe des  $x$ .

3. Dans la boule ouverte

$$\{(x,y,z); (x+1)^2 + y^2 + z^2 < 1\} \subseteq \mathbb{R}^3,$$

le graphe  $z = f(x,y)$  de la fonction  $f$  ne rencontre le plan des  $x$  et  $y$  qu'au point  $(-1,0)$ . Par conséquent, l'intersection  $D \cap \mathcal{C}$  du disque

$$D = \{(x,y); (x+1)^2 + y^2 < 1\}$$

avec  $\mathcal{C}$  ne consiste qu'au point  $(-1,0)$ .

4. Voir l'indication de l'exercice précédent.  
5. Quel que soit le point  $(x_0, y_0)$  de  $\mathcal{C}$  distinct de  $(-1,0)$ , d'après (1.),

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \neq (0,0).$$

L'assertion est donc une conséquence immédiate du théorème des fonctions implicites.