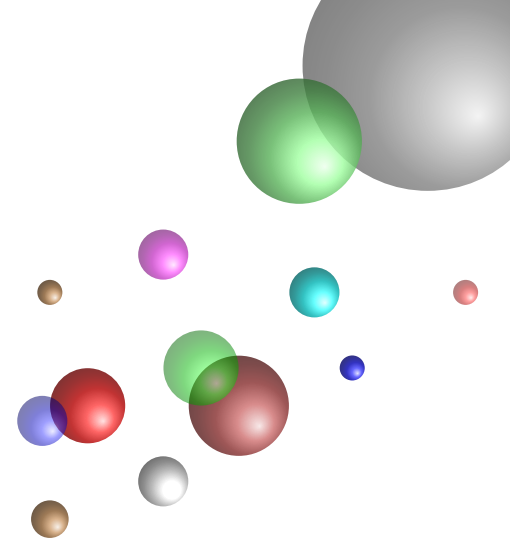
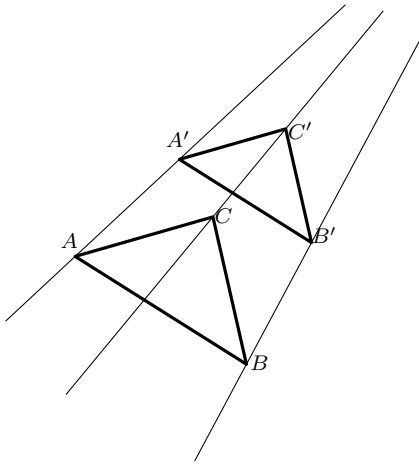
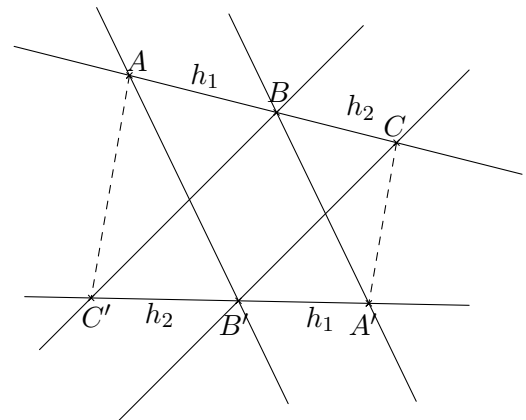




Introduction à la géométrie affine



Prologue

Aucun enseignement ne vaut la peine s'il n'inclut pas la liberté de faire des erreurs ; mais combien en faudra-t-il faire et pour combien de temps ?

-RIF DJEAM
Life Treasures Sense

Ce module de cours vise à donner une vue d'ensemble et introductive à la géométrie affine correspondant à un niveau de troisième année de licence ou de première année de master (en mathématiques). C'est la partie de la géométrie que l'on apprend au collège et au lycée et qui concerne les propriétés des droites, plans, etc., (à l'exclusion des notions métriques). La différence essentielle avec ce qui est enseigné au lycée est qu'ici la géométrie s'appuie fondamentalement sur l'algèbre linéaire. La lecture de ce document requiert la connaissance des notions d'algèbre linéaire, d'analyse réelle et de calcul différentiel enseignées en première et deuxième année de licence de mathématiques dans la plupart des universités (surtout francophones). Une importance considérable est attachée aux exercices qui sont proposés dans ce module, certains sont des applications directes du cours, d'autres contiennent des développements importants. Ces notes de cours, issues d'un polycopié de cours amélioré et complété sur plusieurs années, a bénéficié et continue de bénéficier de nombreuses remarques ou questions des étudiants et de discussions avec les collègues. Il serait ingrat de ne pas les en remercier chaleureusement et de les encourager dans le sens de l'amélioration en vue de rendre plus succincte et récapitulative ces notes pour le bien de ces utilisateurs.

Nous souhaitons un bon usage de ce document à tous les utilisateurs et comptons beaucoup sur leurs critiques et suggestions pour son amélioration.

L'auteur

Table des matières

1	Espace affine	5
1.1	Structure d'espace affine	5
1.1.1	Vectorialisé d'un espace affine	8
1.2	Sous-espace affine	9
1.2.1	Parallélisme et incidence de deux sous-espaces affines	11
1.3	Repère et base affines	13
1.3.1	Coordonnées cartésiennes	14
1.4	Barycentres	15
1.4.1	Fonction vectorielle de Leibniz	15
1.4.2	Coordonnées barycentriques	18
1.4.3	Convexité	21
1.5	Applications affines	25
1.5.1	Quelques applications affines remarquables	33
1.5.2	Quelques sous groupes de $(GA(\mathcal{E}), \circ)$	35
1.5.3	Forme affine	39
2	Les grands théorèmes	40
2.1	Mesure algébrique	40
2.2	Les théorèmes	41
2.3	Quelques exercices	47
3	Groupes classiques	49
3.1	Groupes linéaires – Groupes spéciaux linéaires	49
3.1.1	Dilatations et transvections	49
3.1.2	Groupe spécial linéaire	51
3.2	Groupe orthogonal ou groupe des isométries	51
3.2.1	Généralités	51
3.2.2	Images de sous-espaces vectoriels	53
3.3	Réflexions vectorielles	54
3.4	Dimension 2	55
3.4.1	Rotations et réflexions planes	55
3.4.2	Matrices orthogonales	55
3.4.3	Orientation du plan	56
3.4.4	Angle de vecteurs	57

4	Isométries et similitudes affines	59
4.0.1	Groupe orthogonal	59
4.1	Isométries affines	60
4.1.1	Premiers exemples	62
4.2	Décomposition canonique des isométries et classification en petite dimension . . .	65
4.3	Génération du groupe des isométries et du groupe des déplacements	67
4.4	Similitude affines	69
4.5	Recapitulation des isométries	73
4.5.1	En dimension 2	73
4.5.2	En dimension 3	73
4.6	my exams	74
4.7	New series	78
4.8	algebra training + others	82
4.8.1	Espaces affines, applications affines	85
4.8.2	Sous-espaces affines	87
4.8.3	Barycentres et convexité	94

Introduction

L'activité géométrique ne s'articule pas autour de « théories » : elle s'exerce à partir de problèmes et de concepts ; car, faire de la géométrie, c'est résoudre des problèmes de géométrie.

ESPACE AFFINE

Dans tout ce document $\mathbb{K}$ designera l'un quelconque de trois corps $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et plus généralement tout corps commutatif de caractéristique zéro.

1.1 Structure d'espace affine

Définition 1.1

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Un **espace affine** de direction E est la donnée d'un ensemble non vide $\mathcal{E}$ et d'une application

$$\begin{aligned}\varphi : \mathcal{E} \times \mathcal{E} &\longrightarrow E \\ (A, B) &\longmapsto \varphi(A, B) = \overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

telle que pour tout A, B et C éléments de $\mathcal{E}$

1. pour tout $A \in \mathcal{E}$ on a $\varphi(A, A) = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$
2. pour tous $A, B, C \in \mathcal{E}$ on a :
 $\varphi(A, B) + \varphi(B, C) = \varphi(A, C)$ i.e. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (relation de Chasles)
3. pour tout $A \in \mathcal{E}$, l'application

$$\begin{aligned}\varphi_A : \mathcal{E} &\longrightarrow E \\ B &\longmapsto \varphi_A(B) = \varphi(A, B) = \overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

est une bijection d'ensemble.

Vocabulaire

L'application φ de la Définition 1.1 est appelée **structure d'espace affine** sur $\mathcal{E}$ et l'espace vectoriel E est appelé **direction** de $\mathcal{E}$ ou que $\mathcal{E}$ est dirigé par E . On dira donc que $\mathcal{E}$ est un $\mathbb{K}$ -espace affine (ou tout simplement espace affine) de direction E .

Les éléments d'un espace affine $\mathcal{E}$ appelés des **points**, ceux du corps de base $\mathbb{K}$ des scalaires tandis que les éléments de E sont des vecteurs.

En vertu de la bijection φ_A pour tout $A \in \mathcal{E}$, on appellera **dimension** de $\mathcal{E}$ la dimension de l'espace vectoriel E et on écrira $\dim \mathcal{E} = \dim E$.

En particulier, les espaces affines de dimension 0 (i.e., associés à $E = \{\vec{0}\}$) sont ceux réduits à un point, et par analogie au vocabulaire de l'algèbre linéaire, les espaces affines de dimension 1 sont appelés **droites affines**, ceux de dimension 2 sont appelés **plans affines**.

Proposition 1.2

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . Il existe une application $\varphi : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow E$ qui vérifie les axiomes suivants

1. $\varphi(A, C) = \varphi(A, B) + \varphi(B, C)$ pour tous A, B et C dans $\mathcal{E}$,
2. pour tout $A \in \mathcal{E}$ l'application $\varphi_A : M \longmapsto \varphi(A, M)$ est une bijection de $\mathcal{E}$ dans E .

Remarque 1.3

1. Soit A élément de $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E . Du fait que φ_A est une bijection alors pour tout élément $\vec{u} \in E$ il existe un unique élément B de $\mathcal{E}$ tel que $\varphi_A(B) = \varphi(A, B) = \vec{AB} = \vec{u}$. On notera : $B = A + \vec{AB}$.
2. Soit A, B deux points d'un espace affine $\mathcal{E}$ de direction E . L'égalité $B = A + \vec{AB}$ entraîne l'opération algébrique donnant l'écriture équivalente $B - A = \vec{AB}$ qui est très utile dans les calculs. Mais il faut faire très attention, car le fait de donner un sens à une différence de points n'autorise pas à écrire n'importe quelle combinaison de points d'un espace affine sauf dans deux situations particulières que l'on verra plus loin : barycentre et vectorialisé.

Exemple 1.1

1. Tout $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E est un espace affine sur lui même. On dit donc que tout espace vectoriel est muni d'une **structure affine canonique**

En effet, soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Posons

$$\begin{aligned} \varphi : E \times E &\longrightarrow E \\ (\vec{u}, \vec{v}) &\longmapsto \varphi(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u} - \vec{v}. \end{aligned}$$

- $\varphi(\vec{u}, \vec{u}) = \vec{u} - \vec{u} = \vec{0}$
- $\varphi(\vec{u}, \vec{v}) + \varphi(\vec{v}, \vec{w}) = \vec{u} - \vec{v} + \vec{v} - \vec{w} = \vec{u} - \vec{w} = \varphi(\vec{u}, \vec{w})$
- Soit $\vec{u} \in E$ fixé dans E et

$$\begin{aligned} \varphi_{\vec{u}} : E &\longrightarrow E \\ \vec{v} &\longmapsto \varphi_{\vec{u}}(\vec{v}) = \varphi(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u} - \vec{v}. \end{aligned}$$

Soient $\vec{v}$ et $\vec{w}$ élément de E tels que $\vec{v} = \vec{w}$. Alors on a $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} - \vec{w} \implies \varphi_{\vec{u}}(\vec{v}) = \varphi_{\vec{u}}(\vec{w})$ donc $\varphi_{\vec{u}}$ est bien définie (i.e est une application).

Soient $\vec{v}$ et $\vec{w}$ élément de E tels que $\varphi_{\vec{u}}(\vec{v}) = \varphi_{\vec{u}}(\vec{w})$. On a

$$\varphi_{\vec{u}}(\vec{v}) = \varphi_{\vec{u}}(\vec{w}) \implies \vec{u} - \vec{v} = \vec{u} - \vec{w} \implies \vec{v} = \vec{w}$$

donc $\varphi_{\vec{u}}$ est injective. Soit $\vec{v} \in E$. On a $(\vec{v} - \vec{u}) \in E$ et $\varphi_{\vec{u}}(\vec{v} - \vec{u}) = \vec{v}$. Donc $\varphi_{\vec{u}}$ est surjective. Ainsi $\varphi_{\vec{u}}$ est une bijection.

2. Soit a, b et c trois fonctions numériques d'une variable réelle définies et continues sur un intervalle I telles que $a(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$. L'ensemble

$$\mathcal{E} = \left\{ y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) ; a(x)y' + b(x)y = c(x) \right\}$$

est un espace affine de direction l'espace vectoriel

$$E = \left\{ y \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) ; a(x)y' + b(x)y = 0 \right\}$$

des solutions de l'équation homogène.

N.B : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a, b et c trois éléments de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. Soit l'équation différentielle $a(x)y' + b(x)y = c(x)$ (1).

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \\ y &\longmapsto a(x)y' + b(x)y \end{aligned}$$

$\ker \mathcal{L} = \left\{ y \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) ; a(x)y' + b(x)y = 0 \right\} = E$. Si $c \notin \text{Im } \mathcal{L}$, alors l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation (1) est vide. Si $c \in \text{Im } \mathcal{L}$ alors $\mathcal{S} = y_0 + \ker \mathcal{L}$ où y_0 est une solution particulière de (1).

Exercice 1.1

- On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ tels que $x + y + z = 1$ et E l'ensemble des (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ tels que $x + y + z = 0$.
 - Vérifiez que E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. L'ensemble E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?
 - On définit φ de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}^3$ par $\varphi((x, y, z), (x', y', z')) = (x' - x, y' - y, z' - z)$. Montrez que $\varphi(\mathcal{E} \times \mathcal{E})$ est inclus dans E et que φ définit sur $\mathcal{E}$ une structure d'espace affine dont l'espace vectoriel sous-jacent est E .

Remarque 1.4

Une convention usuelle est aussi de noter $\vec{\mathcal{E}}$ un espace vectoriel associé à $\mathcal{E}$; il faut bien voir toutefois que la direction n'est pas unique et qu'il ne suffit pas que $\mathcal{E}$ soit un espace affine de direction E pour qu'on puisse définir canoniquement sa direction $\vec{\mathcal{E}}$.

Proposition 1.5

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension n .

— Deux points distincts A et B de $\mathcal{E}$ forment un **bipoint** que l'on note (A, B) ou (B, A) .

L'application φ définit une relation d'équivalence sur $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$:

$$(A, B) \sim (C, D) \iff \varphi(A, B) = \varphi(C, D) \iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}.$$

C'est la relation d'équipollence entre bipoints de $\mathcal{E}$.

— Trois points distincts A, B et C de $\mathcal{E}$ forment un **triangle** de sommets A, B, C qui se note ABC (l'ordre des lettres importe peu).

— Si $n = 2$, quatre points distincts A, B, C et D de $\mathcal{E}$ déterminent un **quadrilatère** de sommets A, B, C, D noté $ABCD$. De même cinq points distincts A, B, C, D et F forment un **pentagone**. Plus généralement, plusieurs point distincts donnent un **polygone**.

- Si $n = 3$ alors quatre points distincts non coplanaires de $\mathcal{E}$ forment un tétraèdre.
- etc.

Propriétés 1.6

Soient A, B, C et D quatres points distincts d'un espace affine $\mathcal{E}$ alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

$$(P_1) \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

$$(P_2) \quad \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}.$$

Si l'une de ces propriétés est vérifiée st si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont indépendants on dit que $ABCD$ est un parallélogramme.

Définition 1.7

Soient $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E et $\vec{u} \in E$. On appelle translation de vecteur $\vec{u}$ l'application souvent noté $t_{\vec{u}}$

$$t_{\vec{u}} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

$$A \longmapsto A + \vec{u}.$$

On traduit la relation $M = A + \vec{u}$ en disant que M est le translaté de A de vecteur $\vec{u}$.

Propriétés 1.8

1. $t_{\vec{0}} = id_{\mathcal{E}}$
2. $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$
3. $(t_{\vec{u}})^{-1} = t_{-\vec{u}}$

1.1.1 Vectorialisé d'un espace affine

On a vu que tout espace vectoriel donne naissance à un espace affine. Mais cet espace possède un point particulier : le vecteur $\vec{0}$. Par contre, dans un espace affine général $\mathcal{E}$ aucun point n'est privilégié par rapport aux autres : on pourrait dire donc que la géométrie affine est de la géométrie vectorielle sans origine a priori. Cependant on peut quand même selon les besoins de la cause choisir un point A comme origine de $\mathcal{E}$ et étudier le problème inverse : cela permet de **vectorialiser** $\mathcal{E}$ en A . L'application

$$\chi_A : E \longrightarrow \mathcal{E}$$

$$\vec{u} \longmapsto A + \vec{u}$$

est une bijection ensembliste (c'est au fait la bijection réciproque de φ_A de la Définition 1.1). En effet, commençons par observer que χ_A est linéaire

$$\chi_A(\vec{u} + \vec{v}) = \chi_{\chi_A(\vec{u})}(\vec{v}) = \chi_A(\vec{u}) + \chi_A(\vec{v}) = \chi_{\chi_A(\vec{u})}(\vec{v}) \quad \text{et} \quad \chi_A(\alpha \cdot \vec{u}) = \alpha \chi_A(\vec{u}) ;$$

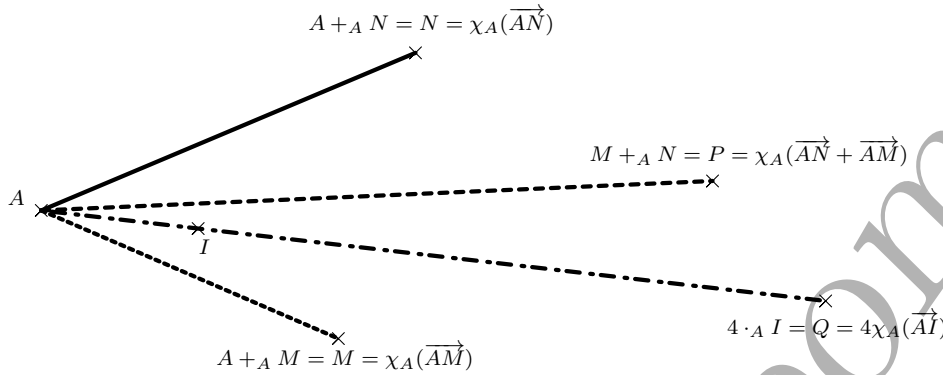
de plus $\chi_A(\vec{u}) = A \iff \vec{u} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$. Cette bijection permet de transporter la structure d'espace vectorielle de E sur $\mathcal{E}$ tout en étant au point A . On définit donc les opérations suivantes :

$$+_A : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

$$(M, N) \longmapsto M +_A N := \chi_A(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN})$$

et

$$\begin{aligned} \cdot_A : \mathbb{K} \times \mathcal{E} &\longrightarrow \mathcal{E} \\ (\alpha, M) &\longmapsto \alpha \cdot_A M := \chi_A \left(\alpha \cdot \overrightarrow{AM} \right) = \alpha \chi_A \left(\overrightarrow{AM} \right) \end{aligned}$$



Proposition 1.9

Soient $\mathcal{E}$ un $\mathbb{K}$ -espace affine et $A \in \mathcal{E}$. Alors $+_A$ et $\cdot_A$ munissent $\mathcal{E}$ d'une structure de $\mathbb{K}$ -espace vectorielle.

L'espace vectorielle $(\mathcal{E}, +_A, \cdot_A)$ est appelé le **vectorialisé** de $\mathcal{E}$ en A et est noté $\mathcal{E}_A$.

Propriétés 1.10

Soient $\mathcal{E}$ un $\mathbb{K}$ -espace affine, $A \in \mathcal{E}$ et $\mathcal{E}_A$ son vectorialisé en A .

- Le point A de l'espace affine $\mathcal{E}$ est le vecteur nul du vectorialisé $\mathcal{E}_A$: pour tout $M \in \mathcal{E}_A$, $A +_A M = \chi_A \left(\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AM} \right) = \chi_A \left(\overrightarrow{AM} \right) = A + \overrightarrow{AM} = M$
- Par construction, la bijection d'ensemble χ_A induit un isomorphisme d'espaces vectoriels de E sur $\mathcal{E}_A$.

Remarque 1.11

La vectorialisation n'est donc qu'une définition rigoureuse d'un phénomène intuitif qui consiste à considérer un espace affine comme un espace vectoriel dans lequel on veut plus privilégier l'origine : le vecteur nul.

Le procédé de vectorialisation d'un espace affine n'est pas canonique. En effet pour deux points distincts A et B , les loi $(+_A, \cdot_A)$ et $(+_B, \cdot_B)$ ne sont pas les mêmes à priori. C'est ainsi qu'on ne peut dire qu'un espace affine est un espace vectoriel alors que la réciproque est toujours vrai.

1.2 Sous-espace affine

Définition 1.12

Un sous-ensemble $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ est appelé un **sous-espace affine** ou une **variété affine** d'un espace affine $\mathcal{E}$ de direction E s'il existe $A \in \mathcal{E}$ avec $A \in \mathcal{F}$ et un sous-espace vectoriel F de E tel que

$$\mathcal{F} = A + F = \left\{ A + \vec{u} ; \forall \vec{u} \in F \right\}.$$

On définit de manière analogue les notions de direction et de dimension pour les sous-espaces affines. Et on dit aussi que $\mathcal{F} = A + F$ et le sous-espace affine de $\mathcal{E}$ passant par A et de direction F .

Proposition 1.13

1. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E . Une partie $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ si et seulement
 - (a) $\mathcal{F} \neq \emptyset$
 - (b) il existe $F \leq E$ un sous-espace vectoriel de E tel que pour tous points M et N éléments de $\mathcal{F}$, le vecteur $\overrightarrow{MN} \in F$
2. Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine d'un espace affine $\mathcal{E}$ de direction E . Le sous-espace vectoriel F de E ($F \leq E$) est appelé la **direction** du sous-espace affine $\mathcal{F}$ et $\dim \mathcal{F} = \dim F$.
On dit que le sous-espace affine $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ est
 - (a) une **droite affine** si sa direction F est une droite vectorielle, ($\dim \mathcal{F} = 1$)
 - (b) un **plan affine** si sa direction F est un plan vectoriel, ($\dim \mathcal{F} = 2$)
 - (c) un **hyperplan affine** si sa direction F est un hyperplan vectoriel, ($\dim \mathcal{F} = n - 1$) où $n = \dim \mathcal{E}$
 - (d) etc.

Exemple 1.2

1. Les sous espaces affines d'un espace vectoriel E sont les espaces $\vec{u} + F$ où $\vec{u} \in E$ et F est un sous-espace vectoriel de E .
2. Le sous ensemble $\mathcal{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x - 2y + 3z = 5\}$ de $\mathbb{R}^3$ est un sous-espace affine de direction $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x - 2y + 3z = 0\}$. Soient $M = (x, y, z)$ et $N = (x', y', z')$ deux points de $\mathcal{F}$.

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} M \in \mathcal{F} \\ N \in \mathcal{F} \end{cases} &\iff \begin{cases} x - 2y + 3z = 5 \\ x' - 2y' + 3z' = 5 \end{cases} \\
 &\iff (x - x') - 2(y - y') + 3(z - z') = 0 \\
 &\iff \overrightarrow{NM} \in F.
 \end{aligned}$$

$\dim \mathcal{F} = \dim F = 2$. Donc $\mathcal{F}$ est un plan affine de direction le plan vectoriel F

Proposition 1.14

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de directions respectives F et G d'un espace affine $\mathcal{E}$.

1. Alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est
 - (a) soit vide ;

(b) soit un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction $F \cap G$.

En effet, supposons que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$. Posons $\mathcal{H} = \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$; soient $M, N \in \mathcal{H}$; on a

$$\begin{cases} \mathcal{H} \subset \mathcal{F} \\ \mathcal{H} \subset \mathcal{G} \end{cases} \iff \begin{cases} M, N, \in \mathcal{F} \\ M, N, \in \mathcal{G} \end{cases} \iff \begin{cases} \overrightarrow{MN} \in F \\ \overrightarrow{MN} \in G \end{cases} \iff \overrightarrow{MN} \in F \cap G.$$

On en déduit que

- deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles.
- étant donné un point A et une droite affine Δ , il existe une unique droite Δ' parallèle à Δ passant par A .

1.2.1 Parallélisme et incidence de deux sous-espaces affines

Définition 1.15

Soient deux sous-espaces affines $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ de direction respectives F et G d'un espace affine $\mathcal{E}$.

1. On dit que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont (faiblement) **parallèles** et on note $\mathcal{F} \parallel \mathcal{G}$ si $F \subset G$ ou $G \subset F$.
2. On dit que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont **strictement parallèles** si $F = G$ i.e $\mathcal{F} \parallel \mathcal{G}$ et $\dim F = \dim G$.

Proposition 1.16

Deux sous-espaces affines $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ de direction respectives F et G d'un espace affine $\mathcal{E}$ sont parallèles si $F = G$ ou $F \cap G = \{0_E\}$. En effet, supposons que $\mathcal{F} = \mathcal{G}$. On sait que $\mathcal{F} = \mathcal{G} \implies F = G$. Ainsi $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont parallèles (par définition).

Exemple 1.3

1. Tout point est parallèle à n'importe quel autre sous-espace.
2. Deux droites sont parallèles si et seulement si elles possèdent des vecteurs directeurs colinéaires.
3. Un quadrilatère $ABCD$ est un **trapèze** si il vérifie $(AB) \parallel (CD)$.
4. Quatre points non alignés A, B, C et D forment un **parallélogramme** si et seulement si $(AB) \parallel (DC)$ et $(AD) \parallel (BC)$.

Proposition 1.17 (Postulat d'Euclide)

Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine d'un espace affine $\mathcal{E}$ et $M \in \mathcal{E}$. Il existe un unique sous-espace affine $\mathcal{G}$ passant par le point M et parallèle à $\mathcal{F}$.

Définition 1.18

Soient deux sous-espaces affines $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ d'un espace affine $\mathcal{E}$. Soient $M \in \mathcal{F}$ et $N \in \mathcal{G}$. Alors

1. $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset \iff \overrightarrow{MN} \in F + G$.
2. $\text{Aff}(\mathcal{F} \cup \mathcal{G}) = M + (F + G + \mathbb{K} \overrightarrow{MN})$.

Théorème 1.19

Soient deux sous-espaces affines $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ d'un espace affine $\mathcal{E}$. Soient $M \in \mathcal{F}$ et $N \in \mathcal{G}$.

1. Si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$ (donc si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un sous-espace) alors

$$\dim \text{Aff}(\mathcal{F} \cup \mathcal{G}) = \dim \mathcal{F} + \dim \mathcal{G} - \dim(\mathcal{F} \cap \mathcal{G});$$

2. Si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$ alors

$$\dim \text{Aff}(\mathcal{F} \cup \mathcal{G}) = \dim \mathcal{F} + \dim \mathcal{G} - \dim(\mathcal{F} \cap \mathcal{G}) + 1$$

Corollaire 1.20

1. Un sous-espace de dimension m d'un espace affine et un point hors de ce sous-espace engendrent un sous-espace de dimension $m + 1$.
2. Dans un plan affine, deux droites sont soit parallèles soit sécantes en un unique point.
3. Dans un espace de dimension 3,
 - (a) si deux droites ne sont pas coplanaires alors elles engendrent l'espace tout entier;
 - (b) si une droite n'est pas parallèle à un plan alors elle le coupe en un unique point;
 - (c) si deux plans ne sont pas parallèles alors ils se coupent suivant une droite.

Définition 1.21

Deux sous-espaces affines d'un espace affine $\mathcal{E}$ sont dits **supplémentaires** dans $\mathcal{E}$ si leurs directions le sont dans E .

Corollaire 1.22

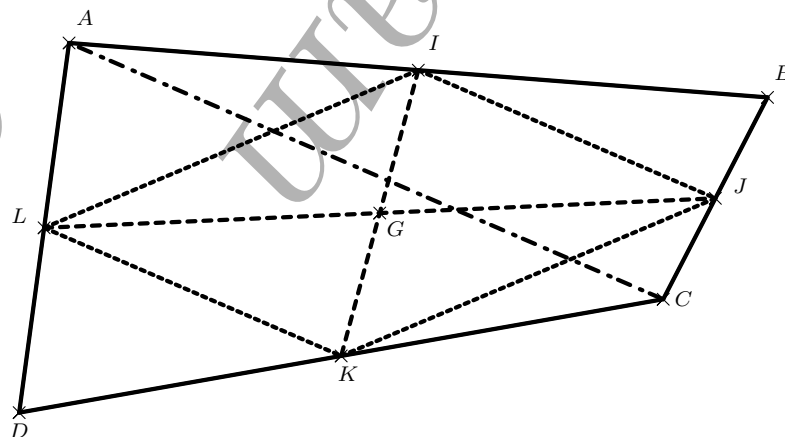
Soient deux sous-espaces affines $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ d'un espace affine $\mathcal{E}$.

1. Si $E = F + G$ alors $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ engendrent $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$.
2. Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont supplémentaires dans $\mathcal{E}$ alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un singleton.

Exemple 1.4

Soit dans le plan affine $ABCD$ un quadrilatère I, J, K et L les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

1. Démontrons que $[IK]$ et $[JL]$ ont le même milieu.



1^{ère} méthode Considérons le triangle ABC , le point I est le milieu de $[A, B]$ et J est le milieu de $[BC]$. D'après la propriété des droites des milieux. On a $(IJ) \parallel (AC)$ et $IJ = \frac{1}{2}AC$. De la même manière, on prouve que $(JK) \parallel (BD)$, $(LK) \parallel (AC)$ et $(LI) \parallel (BD)$.

De tout ce qui précède, on déduit que $(IJ) \parallel (KL)$ et $(LI) \parallel (KJ)$. Donc $IJKL$ est un parallélogramme dont les diagonales $[I, K]$ et $[L, J]$ se coupent en leur milieu. D'où le résultat.

2^{ème} méthode On a : $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{0}$. Posons $\vec{u} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA}$.

$$\begin{aligned}\vec{u} &= 2\vec{AI} + 2\vec{BJ} + 2\vec{CK} + 2\vec{DL} \\ &= \underbrace{2\vec{AI} + 2\vec{BJ}}_{=\vec{0}} + 2\vec{IJ} + \underbrace{2\vec{CK} + 2\vec{DL}}_{=\vec{0}} + 2\vec{KL} \\ &= 2(\vec{IJ} + \vec{KL})\end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } \vec{u} = \vec{0} \iff \vec{IJ} = \vec{LK}.$$

2. Que peut-on dire du point G tel que $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$?

$$\begin{aligned}\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0} &\iff 2\vec{GI} + \underbrace{\vec{IA} + \vec{IB}}_{=\vec{0}} + 2\vec{GK} + \underbrace{\vec{KC} + \vec{KD}}_{=\vec{0}} = \vec{0} \\ &\iff \vec{GI} = -\vec{GK} \\ &\iff G \text{ est le milieu du segment } [I, K]\end{aligned}$$

1.3 Repère et base affines

Soit $\mathcal{E}$ un $\mathbb{K}$ -espace affine de direction E et $\mathcal{A} = \{A_0, \dots, A_p\}$ une partie non vide de $p + 1$ points de $\mathcal{E}$ avec $p \leq n = \dim \mathcal{E}$.

Définition 1.23

1. L'intersection de tous les sous-espaces affines de $\mathcal{E}$ contenant $\mathcal{A}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ noté $\text{Aff}(\mathcal{A})$. C'est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace de $\mathcal{E}$ contenant $\mathcal{A}$.

2. On dit que $\mathcal{A}$ est (affinement) **génératrice** de $\mathcal{E}$ si $\text{Aff}(\mathcal{A}) = \mathcal{E}$.

Par exemple, deux points distincts d'une droite engendrent cette droite i.e $(AB) = \text{Aff}(\{A, B\})$.

3. On appelle **rang** de $\mathcal{A}$ et on note $\text{rg}\mathcal{A}$ la dimension du sous-espace $\text{Aff}(\mathcal{A})$.

Comme on sait que $\text{Aff}(A_0, \dots, A_p) = A_0 + \text{Vect}(\vec{A_0A_1}, \dots, \vec{A_0A_p})$, on voit que le rang de $\{A_0, \dots, A_p\}$ n'est autre que le rang de la famille de vecteurs $\{\vec{A_0A_1}, \dots, \vec{A_0A_p}\}$. En particulier, on observera que $0 \leq \text{rg}\mathcal{A} \leq p$.

4. Si $\text{rg}\mathcal{A} = p$, on dit que la famille $\mathcal{A}$ est (affinement) **libre** dans $\mathcal{E}$ ou que les points A_i sont (affinement) **indépendants** dans $\mathcal{E}$. Dans le cas contraire (i.e $\text{rg}\mathcal{A} < p$), on dit que la famille $\mathcal{A}$ est (affinement) **liée**, ou que les points A_i sont (affinement) **dépendants**.

5. Si $\mathcal{A}$ est une famille à la fois libre et génératrice de $\mathcal{E}$, on dit que $\mathcal{A}$ est une **base** (affine) de $\mathcal{E}$, ou encore un repère affine de $\mathcal{E}$.

NB : Observer ici que $p = n$

Proposition 1.24

Soit $\mathcal{A} = \{A_0, \dots, A_p\}$ une famille finie de $p + 1$ points d'un espace affine $\mathcal{E}$ de direction E avec $\dim \mathcal{E} = n$. On note $X = \{\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_p}\}$. Alors :

1. $\mathcal{A}$ est libre dans $\mathcal{E}$ si et seulement si X est libre dans E et dans ce cas $p \leq n$;
2. $\mathcal{A}$ est génératrice dans $\mathcal{E}$ si et seulement si X est génératrice dans E et dans ce cas $p \geq n$;
3. $\mathcal{A}$ est une base de $\mathcal{E}$ si et seulement si X est une base de E et dans ce cas $p = n$. (En dimension n , toute base de l'espace possède donc $n + 1$ éléments.)
4. Si $p = n$, il y a équivalence entre les assertions :
 - (a) $\mathcal{A}$ est libre ;
 - (b) $\mathcal{A}$ est génératrice ;
 - (c) $\mathcal{A}$ est une base.

Remarque 1.25

Dans tous ces énoncés, on a privilégié le premier point A_0 de la famille $\mathcal{A} = \{A_0, \dots, A_n\}$, pour former des vecteurs. Il est très facile de voir que les résultats ne dépendent pas de ce choix. Par exemple, il est équivalent de dire :

1. les points A, B et C sont indépendants ;
2. les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont linéairement indépendants ;
3. les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont linéairement indépendants ;
4. les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont linéairement indépendants.

Définition 1.26

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension finie n , de direction E et $\mathcal{A} = \{A_0, \dots, A_n\}$ une famille de $(n + 1)$ points de $\mathcal{E}$. On dit que $\mathcal{A}$ est un **repère affine** de $\mathcal{E}$ si et seulement si la famille $(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$ est une base de E .

1.3.1 Coordonnées cartésiennes

Dans les conditions de la Définition 1.26, le système $\mathcal{R} = (A_0; \overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n}) \in \mathcal{E} \times E^n$ est appelé **repère cartésien** de $\mathcal{E}$ et A_0 l'origine du repère.

Pour tout $M \in \mathcal{E}$ il existe un unique n -uplet de scalaire $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ tel qu'on ait

$$M = A_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i}$$

encore équivalent à $\overrightarrow{A_0M} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i} = \lambda_1 \overrightarrow{A_0A_1} + \lambda_2 \overrightarrow{A_0A_2} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{A_0A_n}$.

Le n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est appelé **coordonnées cartésiennes** de M dans le repère affine $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ et on écrit

$$M \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

En dimension n , tout point possède donc n coordonnées cartésiennes.

Si $n = 1$, l'unique coordonnée cartésienne s'appelle l'**abscisse**. Si $n = 2$, la seconde coordonnée s'appelle l'**ordonnée**. Si $n = 3$, la troisième coordonnée s'appelle généralement la **côte** ou la **hauteur**.

1.4 Barycentres

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

Soit $A \in \mathcal{E}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. La paire $(A, \alpha) \in \mathcal{E} \times \mathbb{K}$ est appelée un **point pondéré**.

1.4.1 Fonction vectorielle de Leibniz

Soient $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de points pondérés de $\mathcal{E}$. On appelle **fonction vectorielle de Leibniz** (associée à la famille $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$) l'application

$$\begin{aligned} f : \mathcal{E} &\longrightarrow E \\ M &\longmapsto f(M) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i}. \end{aligned}$$

Propriétés 1.27

Soit $A \in \mathcal{E}$, on a $f(M) = (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n) \overrightarrow{MA} + f(A) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA} + f(A)$

1. Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$ alors $f(M) = f(A)$ pour tout $M \in \mathcal{E}$; ainsi f est constante.
2. Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$ alors on a $f(M) = f(N) \implies \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{NA} \implies M = N$ donc f est injective.

Soit $\vec{u} \in E$. On a :

$$f(M) = \vec{u} \iff \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) \overrightarrow{MA} + f(A) = \vec{u} \iff \overrightarrow{MA} = \frac{\vec{u} - f(A)}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \iff M = A + \frac{f(A) - \vec{u}}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}.$$

Ainsi il existe $M \in \mathcal{E}$ tel que $f(M) = \vec{u}$, par conséquent f est surjective. Il s'en suit donc que f est bijective.

Proposition 1.28

Soient $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de points pondérés de $\mathcal{E}$ et $O \in \mathcal{E}$

1. Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$ alors le vecteur $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n}$ est indépendant du point $M \in \mathcal{E}$.
2. Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$ alors le point $O + \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{OA_i} = O + \alpha_1 \overrightarrow{OA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{OA_n}$ est indépendant du point $O \in \mathcal{E}$ et l'unique antécédent du vecteur nul par la fonction de Leibniz $G = f^{-1}(\vec{0})$ est appelé le **barycentre** des points pondérés $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$. On note $G = \text{bar}((A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n})$ et on a $G = \text{bar}((A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}) \iff \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$.

En posant $\beta_i = \frac{\alpha_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}$, on obtient $\sum_{i=1}^n \beta_i = 1$ et on dit que les coefficients sont normalisés.

En particulier, si tous les coefficients sont égaux alors le point G dans ce cas est appelé **isobarycentre** des points pondérés $(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$. En d'autres termes, on dit que G est l'**isobarycentre** de la famille de points pondérés $(A_i, 1)_{1 \leq i \leq n}$ en vertu de la normalisation.

Exemple 1.5

1. Soit G le barycentre d'un système $((A, \alpha), (B, \beta))$, où $\alpha + \beta \neq 0$. On peut donc écrire le point $G = \frac{1}{\alpha + \beta}(\alpha A + \beta B)$. Puisqu'il s'agit d'une écriture vectorielle, on obtient l'identité $(\alpha + \beta)G = \alpha A + \beta B$, et on en déduit immédiatement deux formulations équivalentes, à savoir :

$$A = \frac{\alpha + \beta}{\alpha}G - \frac{\beta}{\alpha}B \quad (\text{si } \alpha \neq 0) \quad \text{et} \quad B = \frac{\alpha + \beta}{\beta}G - \frac{\alpha}{\beta}A \quad (\text{si } \beta \neq 0)$$

qui permettent d'exprimer cette fois A (resp. B) comme barycentre de G et B (resp. de G et A).

2. Soit $A, B \in \mathcal{E}$, la droite passant par A et B est

$$\mathcal{D} = \{M \in \mathcal{E} ; \overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB}, \alpha \in \mathbb{R}\} = \{M \in \mathcal{E} ; M = A + \alpha \overrightarrow{AB}, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB} \iff (1 - \alpha) \overrightarrow{MA} + \alpha \overrightarrow{MB} = \vec{0} \quad (1.4.1)$$

Ainsi $M = \text{bar}((A, 1 - \alpha), (B, \alpha))$.

3. Le sous espace affine engendré par les points A et B souvent noté $\langle A, B \rangle$ est

$$\langle A, B \rangle = \{A + \alpha \overrightarrow{AB}, \alpha \in \mathbb{R}\} = \{G = \text{bar}((A, 1 - \alpha), (B, \alpha))\}$$

4. Le sous espace affine engendré par les points A, B et C souvent noté $\langle A, B, C \rangle$ est

$$\langle A, B, C \rangle = \{A + \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{G = \text{bar}((A, 1 - \alpha - \beta), (B, \alpha), (C, \beta))\}$$

Si $\alpha, \beta \in [0, 1]$ alors $\langle A, B, C \rangle$ est la plaque triangulaire de frontière le triangle ABC .

5. Soit I le milieu de $[AB]$ on a $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$. Ainsi I est barycentre de $\{(A, 1), (B, 1)\}$.

Proposition 1.29

Soit $(A_i, \alpha_i)_{i \in I}$ un système de points pondérés d'un espace affine $\mathcal{E}$ avec $\sum_{i \in I} \alpha_i \neq 0$.

1. Si il existe $i_0 \in I$ tel que $\alpha_{i_0} = 0$, alors $\text{bar}(A_i, \alpha_i)_{i \in I} = \text{bar}(A_i, \alpha_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}}$. Par conséquent, on peut toujours se ramener à une famille où tous les poids sont non nuls.
2. Commutativité : $\text{bar}(A_i, \alpha_i)_{i \in I} = \text{bar}(A_{\sigma(i)}, \alpha_{\sigma(i)})_{i \in I}$ pour toute permutation σ de l'ensemble I .
3. Homogénéité : $\text{bar}(A_i, \beta \alpha_i)_{i \in I} = \text{bar}(A_i, \alpha_i)_{i \in I}$ pour tout $\beta \in \mathbb{K}^*$. Par conséquent, quitte à diviser chaque α_i par $\sum_{i \in I} \alpha_i$, on peut toujours se ramener à un système où $\sum_{i \in I} \alpha_i = 1$. On pourra ainsi écrire $\text{bar}(A_i, \alpha_i)_{i \in I} = \sum_{i \in I} \alpha_i A_i$.

En effet, il suffit d'écrire :
$$\frac{\sum_{i \in I} \beta \alpha_i A_i}{\sum_{i \in I} \beta \alpha_i} = \frac{\beta}{\beta} \frac{\sum_{i \in I} \alpha_i A_i}{\sum_{i \in I} \alpha_i} = \frac{\sum_{i \in I} \alpha_i A_i}{\sum_{i \in I} \alpha_i},$$
 puisqu'en utilisant cette notation on raisonne dans un espace vectoriel (un vectorialisé de $\mathcal{E}$).

4. Associativité : Soit $I = \bigcup_{k=1}^p I_k$ est une partition de I . On suppose que, pour tout $k = 1, 2, \dots, p$, le scalaire $\mu_k = \sum_{i \in I_k} \alpha_i$ est non nul, et on note $G_k = \text{bar}(A_i, \alpha_i)_{i \in I_k}$. Alors $\text{bar}(A_i, \alpha_i)_{i \in I} = \text{bar}(G_k, \mu_k)_{1 \leq k \leq p}$. Par conséquent, la construction d'un barycentre de $m \geq 2$ points peut se ramener, par étapes successives, à $m - 1$ constructions de barycentres de 2 points.

En effet, la notation vectoriel introduite permet d'écrire :

$$\frac{\sum_{k=1}^p \mu_k G_k}{\sum_{k=1}^p \mu_k} = \frac{\sum_{k=1}^p \left(\frac{\sum_{i \in I_k} \alpha_i A_i}{\sum_{i \in I_k} \alpha_i} \right) \mu_k}{\sum_{k=1}^p \mu_k} = \frac{\sum_{k=1}^p \sum_{i \in I_k} \alpha_i A_i}{\sum_{k=1}^p \sum_{i \in I_k} \alpha_i}, \quad (1.4.2)$$

Exemple 1.6

1. Le milieu I d'un bipoint (A, B) peut se noter $I = \frac{A+B}{2}$ (homogénéité). Comme $I = \frac{A+B}{2}$ (commutativité), I est aussi milieu de (B, A) .
2. Soit ABC un triangle non aplati. Posons $A' = \frac{B+C}{2}$, $B' = \frac{C+A}{2}$, $C' = \frac{A+B}{2}$. Alors (AA') , (BB') et (CC') sont des droites distinctes, appelées médianes du triangle ABC . Ce sont bien des droites, car si par exemple $A = A'$, cela signifie que $A \in (BC)$, ce qui est

impossible. De même, si par exemple $(AA') = (BB')$, alors en particulier $A' \in (BC)$ aussi, cela donnerait $A' = B$ et donc $B = C$, contradiction.

Soit maintenant $G = \frac{A+B+C}{3}$ le centre de gravité du triangle ABC . En utilisant la propriété d'associativité, on trouve

$$G = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}\frac{B+C}{2} = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}A'.$$

On en déduit que $G \in (AA')$ et que $\frac{1}{3}\overrightarrow{GA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{GA'} = \vec{0}$, c'est-à-dire $\frac{\overrightarrow{AG}}{\overrightarrow{AA'}} = \frac{2}{3}$. Avec d'autres calculs similaires, on obtient finalement les identités suivantes :

$$(AA') \cap (BB') \cap (CC') = \{G\}, \quad \frac{\overrightarrow{AG}}{\overrightarrow{AA'}} = \frac{\overrightarrow{BG}}{\overrightarrow{BB'}} = \frac{\overrightarrow{CG}}{\overrightarrow{CC'}} = \frac{2}{3},$$

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0} \quad G = \frac{A' + B' + C'}{3}.$$

Soient maintenant A, B, C trois points quelconques de E , et soit $G = A - 2B + 2C$. Pour déterminer G , on écrit naturellement

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} &= \vec{0} \iff \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{BC} = \vec{0} \\ &\iff \overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{BC} \\ &\iff G = A + 2\overrightarrow{BC}. \end{aligned}$$

Autrement dit, on a $A - 2B + 2C = A + 2\overrightarrow{BC}$. Puisque $C - B = \overrightarrow{BC}$, on voudrait pouvoir écrire directement $A - 2B + 2C = A + 2C - 2B = A + 2(C - B) = A + 2\overrightarrow{BC}$.

1.4.2 Coordonnées barycentriques

En général, quand on parle de « base » on parle de systèmes de coordonnées associées à cette « base » (penser aux repères cartésiens). Les repères affines ont eux aussi un système de coordonnées privilégié, les coordonnées barycentriques. Grâce aux barycentres, nous allons introduire un autre système de repérage que celui des coordonnées cartésiennes.

Proposition 1.30

Soit $\{A_0, \dots, A_p\}$ un système affinement libre de $\mathcal{E}$. Si $\text{bar}(A_i, \alpha_i)_{0 \leq i \leq p} = \text{bar}(A_i, \beta_i)_{0 \leq i \leq p}$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $\alpha_i = \lambda\beta_i$ pour tout $i \in \{0, 1, \dots, p\}$.

Observons qu'il s'agit là d'une forme de réciproque de la propriété d'homogénéité des barycentres, mais qu'elle n'est valable que pour une famille libre.

Preuve.

Posons $\Lambda = \sum_{i=0}^p \alpha_i$ et $\Gamma = \sum_{i=0}^p \beta_i$. Par hypothèse Λ et Γ sont non nuls et $\sum_{i=0}^p \frac{\alpha_i}{\Lambda} A_i = \sum_{i=0}^p \frac{\beta_i}{\Gamma} A_i$.

Dans le vectoriel $\mathcal{E}_{A_0}$, cette relation devient $\sum_{i=1}^p \frac{\alpha_i}{\Lambda} A_i = \sum_{i=1}^p \frac{\beta_i}{\Gamma} A_i$. Mais comme dans $\mathcal{E}_{A_0}$ la

famille de vecteurs $\{A_i\}_{0 \leq i \leq p}$ est libre (car $\{\overrightarrow{A_0 A_i}\}_{1 \leq i \leq p}$ est libre dans E par hypothèse), on doit avoir $\forall i \in 1, 2, 3, \dots, p$; $\frac{\alpha_i}{\Lambda} = \frac{\beta_i}{\Gamma}$, i.e. $\alpha_i = \lambda \beta_i$ avec $\lambda = \frac{\Lambda}{\Gamma} \in \mathbb{K}^*$. En outre,

$$\alpha_0 = \Lambda - \sum_{i=1}^p \alpha_i = \Lambda - \lambda \sum_{i=1}^p \beta_i = \Lambda - \lambda(\Gamma - \beta_0) = \lambda \beta_0,$$

si bien que la relation $\alpha_i = \lambda \beta_i$ est valide pour tout $i \in \{1, 2, 3, \dots, p\}$. $\blacksquare$

Corollaire 1.31

Soit $(A_i)_{0 \leq i \leq p}$ un repère affine de $\mathcal{E}$. Alors pour tout point $M \in \mathcal{E}$, il existe une famille de scalaires $(\alpha_i)_{0 \leq i \leq p}$, unique à une constante multiplicative près, telle que $M = \text{bar}(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq p}$. En particulier, si l'on impose $\sum_{i=0}^n \alpha_i = 1$, la famille $(\alpha_i)_{0 \leq i \leq p}$ est unique. On dit que les α_i sont les coordonnées barycentriques de M dans le repère affine $(A_i)_{0 \leq i \leq p}$.

Preuve.

Puisque $(A_i)_{0 \leq i \leq p}$ est une base affine, c'est une famille génératrice dans $\mathcal{E}$. Tout $M \in \mathcal{E}$ s'écrit $M = \text{bar}(A_i, \alpha_i)_{0 \leq i \leq p}$. Comme $(A_i)_{0 \leq i \leq p}$ est aussi une famille libre, les α_i sont définis à un (même) scalaire près par la proposition précédente.

Si en outre on normalise la masse totale des barycentres considérés, alors $\Lambda = 1$ dans l'énoncé de cette proposition, d'où l'unicité des α_i . $\blacksquare$

Remarque 1.32

1. Dans certains ouvrages, les scalaires de la définition sont appelés coordonnées barycentriques normalisées (par la condition $\sum_{i=0}^p \alpha_i = 1$).
2. Attention, en dimension n , tout point possède $n + 1$ coordonnées barycentriques.
3. Par définition, si $(A_i)_{0 \leq i \leq p}$ est un repère affine de E , alors les coordonnées barycentriques de point A_i sont données par le vecteur ${}^t(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, où le 1 figure à la $(i+1)$ -ième ligne.

Pour finir ce paragraphe, expliquons le passage du repérage barycentrique au repérage cartésien (et vice versa).

Proposition 1.33

On suppose que $\mathcal{E}$ est de dimension n .

1. Si $\mathcal{R} = (A_i)_{0 \leq i \leq n}$ est un repère affine de $\mathcal{E}$, alors $\mathcal{S} = (A_0; \overrightarrow{A_0 A_i})_{1 \leq i \leq n}$ est un repère cartésien de $\mathcal{E}$

Si M a pour coordonnées barycentrique $(\alpha_i)_{0 \leq i \leq n}$ dans $\mathcal{R}$, alors M aura pour coordonnées cartésiennes $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ dans $\mathcal{S}$. Il suffit donc d'« oublier » la première coordonnée.

2. Réciproquement, si $\mathcal{S} = (O; (\vec{e}_i)_{1 \leq i \leq n})$ est un repère cartésien de E , alors $\mathcal{R} = (O, O + \vec{e}_1, \dots, O + \vec{e}_n)$ est un repère affine de $\mathcal{E}$.

Si M a pour coordonnées cartésiennes $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ dans $\mathcal{S}$, alors M aura pour coordonnées barycentriques $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq n}$ dans $\mathcal{R}$, où $\lambda_0 = 1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

Preuve.

1. Si M a pour coordonnées barycentriques $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq n}$ dans $\mathcal{R}$, alors $M = \sum_{i=0}^n \lambda_i A_i$ dans tout vectorialisé de E (car $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$). En particulier on a $M = \sum_{i=1}^n \lambda_i A_i$ dans E_{A_0} , ce qui se traduit précisément par $\overrightarrow{A_0 M} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{A_0 A_i}$.
2. Réciproquement, si $\overrightarrow{A_0 M} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{A_0 A_i}$ alors $\overrightarrow{A_0 M} = \sum_{i=0}^n \lambda_i \overrightarrow{A_0 A_i}$, où l'on a posé $\lambda_0 = 1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i$. Autrement dit, $M = \text{bar}(A_i, \lambda_i)_{0 \leq i \leq n}$.



Remarque 1.34

1. Au vu des derniers résultats importants (caractérisation des sous-espaces et des morphismes, coordonnées) il apparaît clairement que la notion de barycentre joue en géométrie affine le même rôle que la notion de combinaison linéaire en géométrie vectorielle.
2. On peut bien sûr parler d'équations barycentriques pour les sous-espaces affines, c'est-à-dire d'équations traduites en coordonnées barycentriques. Nous en verrons un aperçu en Exercice.

Exemple 1.7

Soient ABC un triangle non aplati et $M = \text{bar}\left\{(A, -1), (B, 2), (C, \frac{1}{2})\right\}$

1. Justifier que $M \in \text{Aff}(A, B, C)$.
2. Donner les coordonnées cartésiennes de M dans le repère $(B, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$.
3. On considère sur ABC le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. En déduire les coordonnées barycentriques de M dans le repère affine associé à ce repère cartésien.

Lemme 1.35

Une partie non vide $\mathcal{F}$ d'un espace affine $\mathcal{E}$ est un sous-espace affine si et seulement si le barycentre (s'il existe) d'une quelconque famille de points pondérés de $\mathcal{F}$ appartient à $\mathcal{F}$.

Preuve.

Supposons que $\mathcal{F}$ soit un sous-espace affine de $\mathcal{E}$, et soit $A \in \mathcal{F}$. Soit $(A_i, \alpha_i)_i$ une famille de points pondérés de $\mathcal{F}$, avec $\sum \alpha_i \neq 0$. Alors $G = \frac{\sum_i \alpha_i A_i}{\sum_i \alpha_i}$ comme combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{E}_A$. Mais $\mathcal{F}_A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}_A$, donc $G \in \mathcal{F}$.

Réciproquement, soit $A \in \mathcal{F}$, montrons que $\mathcal{F}_A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}_A$. Si $M, N \in \mathcal{F}$ et $\alpha, \mu \in \mathbb{K}$, la combinaison linéaire $\alpha M + \mu N$ existe dans $\mathcal{E}_A$. L'astuce consiste à écrire $\alpha M + \mu N = (1 - \alpha - \mu)A + \alpha M + \mu N$ (car A est le vecteur nul de $\mathcal{E}_A$), si bien que $\alpha M + \mu N$ est barycentre de points de $\mathcal{F}$, donc reste dans $\mathcal{F}$ par hypothèse. ■

Théorème 1.36

Soit $\mathcal{A}$ une partie non vide d'un espace affine $\mathcal{E}$. Alors $\text{Aff}(\mathcal{A})$ est l'ensemble des barycentres des familles de points pondérés $(A_i, \alpha_i)_i$ où pour tout i $A_i \in \mathcal{A}$, i.e.

$$\text{Aff}(\mathcal{A}) = \left\{ \sum_i \alpha_i A_i ; \sum_i \alpha_i = 1 \text{ et } A_i \in \mathcal{A} \right\}.$$

Preuve.

Soit M un barycentre de points de $\mathcal{A}$. Alors M est en particulier barycentre de points de $\text{Aff}(\mathcal{A})$, donc reste dans $\text{Aff}(\mathcal{A})$.

Réciproquement, soit $M \in \text{Aff}(\mathcal{A})$. Fixant $A \in \mathcal{A}$, on sait que $\overrightarrow{AM} \in \text{Vect}\{\overrightarrow{AP}, P \in \mathcal{A}\}$. Dans le vectorialisé $\mathcal{E}_A$ ceci se traduit par le fait que M est une combinaison linéaire $\sum_i \alpha_i P_i$ de points de $\mathcal{A}$. Ce qui donne alors $M = \left(1 - \sum_i \alpha_i\right)A + \sum_i \alpha_i P_i$, c'est-à-dire que M est barycentre de points de $\mathcal{A}$. ■

Définition 1.37

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine et $(A_i, \alpha_i)_{i \in I}$ une famille de points pondérés de $\mathcal{E}$. On appelle fonction scalaire de Leibniz l'application souvent notée φ et définie par :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{E} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ M &\longmapsto \sum_{i \in I} \alpha_i M A_i^2. \end{aligned}$$

Proposition 1.38

1. Si $\sum_{i \in I} \alpha_i \neq 0$ alors pour tout M on a $\varphi(M) = \left(\sum_{i \in I} \alpha_i\right) M G^2 + \varphi(G)$ où G est le barycentre de $(A_i, \alpha_i)_{i \in I}$.
2. Si $\sum_{i \in I} \alpha_i = 0$ et $\vec{v} = \sum_{i \in I} \alpha_i A_i \neq \vec{0}$ alors pour tout couple de points (M, M_0) dans $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ on a : $\varphi(M) = \varphi(M_0) + 2 \overrightarrow{MM_0} \cdot \vec{v}$

1.4.3 Convexité

Soit A et B deux éléments d'un espace affine $\mathcal{E}$. On appelle **segment** d'extrémités A et B , et on note $[AB]$ l'ensemble des barycentres de (A, α) et (B, β) avec α et β tous positifs ; en particulier

$$[AB] = \left\{ \gamma A + (1 - \gamma)B ; \gamma \in [0, 1] \right\}.$$

Définition 1.39

1. Une partie $\mathcal{F}$ d'un espace affine $\mathcal{E}$ est **convexe** si pour tous $A, B \in \mathcal{F}$ le segment $[AB]$ est contenu dans $\mathcal{F}$.
2. Soit $\mathcal{F}$ une partie non vide d'un espace affine $\mathcal{E}$. On appelle **enveloppe convexe** de $\mathcal{F}$ le plus petit convexe de $\mathcal{E}$ contenant $\mathcal{F}$. C'est l'intersection de tous les convexes de $\mathcal{E}$ contenant $\mathcal{F}$, et aussi l'ensemble de tous les barycentres de points de $\mathcal{F}$ affectés de coefficients tous positifs.

Exemple 1.8

1. Tout sous-espace affine d'un espace affine (en particulier l'espace lui-même) est convexe.
2. Un segment, une demi-droite (ouverte ou fermée) sont convexes (si A est un point d'un espace affine $\mathcal{E}$ et $\vec{u}$ un vecteur non nul de E , on appelle demi-droite fermée (resp. ouverte) d'origine A et de vecteur directeur $\vec{u}$ l'ensemble $\{M \in \mathcal{E}; \overrightarrow{AM} = \alpha \vec{u}, \alpha \geq 0\}$ (resp. $\{M \in \mathcal{E}; \overrightarrow{AM} = \alpha \vec{u}, \alpha > 0\}$)).
3. Une fonction réelle f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est convexe si et seulement si son épigraphe est convexe (on appelle épigraphe de f l'ensemble $\{(x, y) \in I \times \mathbb{R}, y \geq f(x)\}$ des points situés au-dessus du graphe de f).
4. L'enveloppe convexe de deux points A et B est le segment $[AB]$; l'enveloppe convexe de 3 points A, B et C du plan est le triangle plein ABC .

Proposition 1.40

Une partie $\mathcal{F}$ d'un espace affine $\mathcal{E}$ est convexe si et seulement si tout barycentre de points de $\mathcal{F}$ affectés de coefficients positifs est dans $\mathcal{F}$.

1.4.3.1 Demi-espace – Régionnement

L'exemple des demi-droites n'est qu'un cas particulier d'un exemple fondamental de convexes : les **demi-espaces**. Si $\mathcal{E}$ est un espace affine de dimension n et $\mathcal{H}$ un hyperplan affine, $\mathcal{H}$ sépare l'espace en deux.

Proposition 1.41

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine et $\mathcal{H}$ un hyperplan affine de $\mathcal{E}$. La relation $\mathcal{R}$ définie par « $A \mathcal{R} B$ si et seulement si $[AB] \cap \mathcal{H} = \emptyset$ » est une relation d'équivalence sur le complémentaire $\mathcal{E} \setminus \mathcal{H}$ de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{E}$ qui partage $\mathcal{E} \setminus \mathcal{H}$ en exactement deux classes.

Ces classes sont appelés **demi-espaces** ouverts délimités par $\mathcal{H}$. Les demi-espaces fermés sont obtenus en prenant leurs réunions avec $\mathcal{H}$. Si deux points A et B sont en relation par $\mathcal{R}$, on dit que A et B sont du même côté de $\mathcal{H}$.

Définition 1.42

On appelle **polyèdre convexe** toute partie bornée non vide d'un espace affine qui peut s'écrire comme intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés.

Dans le plan, on retrouve la notion usuelle de polygone convexe plein. Dans l'espace de dimension 3, un polyèdre est un solide convexe d'intérieur non vide (s'il n'est pas contenu dans un plan). On remarque que cette définition exclut le cas des dièdres ou des trièdres, qui sont intersection de deux ou trois demi-espaces fermés mais ne sont pas bornés.

Proposition 1.43

Une partie d'un espace affine $\mathcal{E}$ est un polyèdre convexe si et seulement si elle est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points de $\mathcal{E}$.

Il résulte immédiatement de la définition que toute intersection d'un polyèdre convexe et d'un sous-espace affine est vide ou est un polyèdre convexe (un sous-espace affine peut s'écrire comme intersection d'un nombre fini d'hyperplans affines et un hyperplan affine est l'intersection des deux demi-espaces fermés qu'il limite). De même toute intersection d'un nombre fini de polyèdres convexes est vide ou est un polyèdre convexe.

Un exemple de polyèdre convexe en dimension quelconque est le n -simplexe

$$\Delta_n = \left\{ (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} ; \sum_{i=0}^n x_i = 1, \quad x_i \geq 0 \text{ pour tout } i = 0, \dots, n \right\}.$$

(Δ_n est une partie de $\mathbb{R}^{n+1}$, mais il est inclus dans l'hyperplan d'équation $\sum_{i=0}^n x_i = 1$, si bien que sa dimension intrinsèque est n .)

Théorème 1.44 (Structure des polyèdres convexes)

Pour tout polyèdre convexe d'intérieur non vide $\mathcal{P}$ de l'espace de dimension 3, il existe une écriture minimale (au sens du nombre de termes) $\mathcal{P} = \mathcal{P}_i^+$ de $\mathcal{P}$ comme intersection de demi-espaces fermés. Cette écriture est unique à l'ordre près. L'intersection de $\mathcal{P}$ avec chacun des plans $\mathcal{P}_i$ est un polygone convexe plein d'intérieur non vide dans $\mathcal{P}$. Ces polygones sont appelés faces du polyèdre. Les côtés de ces polygones sont appelés arêtes du polyèdre et leurs sommets sommets du polyèdre.

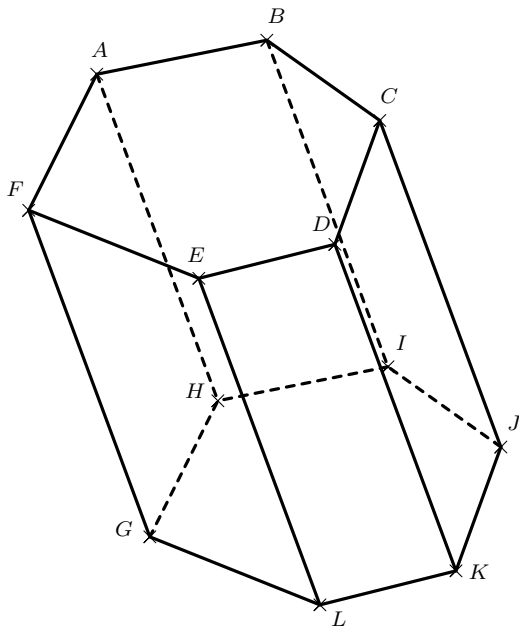
Théorème 1.45 (Formule d'Euler)

Pour tout polyèdre convexe $\mathcal{P}$ de l'espace de dimension 3, on a :

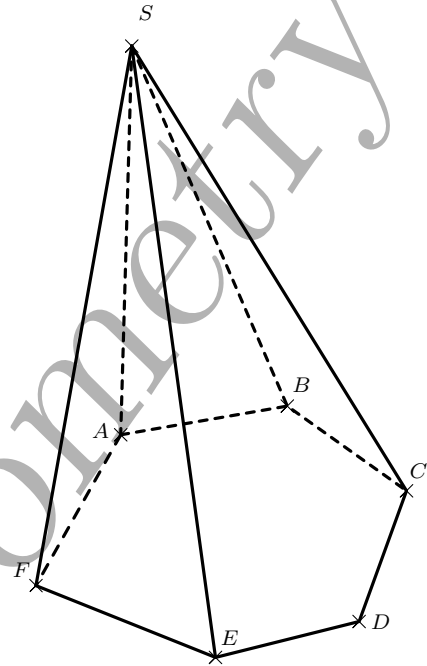
$$s - a + f = 2$$

où s est le nombre de sommets, a le nombre d'arêtes et f le nombre de faces de $\mathcal{P}$.

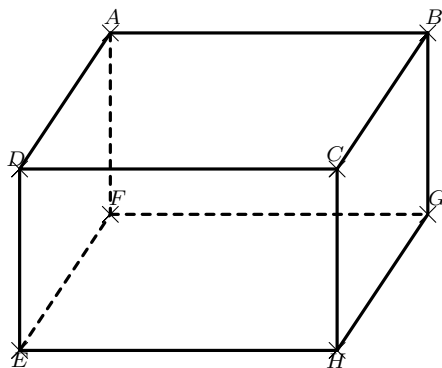
Un tétraèdre possède 4 sommets, 4 faces et 6 arêtes. Ses faces sont des triangles. Si ces triangles sont tous équilatéraux, le tétraèdre est dit régulier. Un tétraèdre est donc régulier si et seulement si toutes ses arêtes ont même longueur (cette définition, comme d'autres qui suivront, suppose l'espace affine muni d'une structure euclidienne).



(a) Prisme



(b) Pyramide



(c) Parallélépipède

Définition 1.46

Soit $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ un repère cartésien (non nécessairement orthonormé) de l'espace. On appelle *parallélépipède (plein)* construit sur ce repère l'ensemble des points de l'espace dont les trois coordonnées dans ce repère appartiennent toutes à l'intervalle $[0, 1]$.

Un **parallélépipède** a 8 sommets, 6 faces et 12 arêtes. Ses faces sont des parallélogrammes. Les sommets du parallélépipède construit sur un repère cartésien sont les points de coordonnées toutes égales à 0 ou 1 dans ce repère, ses faces sont portées par les plans d'équations $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$. Un parallélépipède dont les faces sont des rectangles est appelé **parallélépipède rectangle**.

Un cube est un parallélépipède dont les faces sont des carrés.

Une pyramide est l'enveloppe convexe d'un polygone plan convexe non aplati, appelé base de la

pyramide, et d'un point S (le sommet de la pyramide) n'appartenant pas au plan de ce polygone. Une pyramide dont la base a n sommets a $n + 1$ faces, $2n$ arêtes et $n + 1$ sommets. Un tétraèdre est une pyramide ayant pour base un triangle. Une pyramide régulière est une pyramide dont la base est un polygone régulier convexe et dont le sommet appartient à la droite perpendiculaire à la base menée par le centre de ce polygone.

Un prisme est l'enveloppe convexe de deux polygones plans convexes, appelés bases du prisme, déduits l'un de l'autre par une translation de vecteur n'appartenant pas à la direction commune de leurs plans. Le prisme est dit droit si le vecteur de la translation est orthogonal aux plans des bases. Un prisme dont les bases ont chacune n sommets a $n + 2$ faces, $3n$ arêtes et $2n$ sommets. Toutes les faces d'un prisme autres que les bases sont des parallélogrammes. Si le prisme est droit, ces faces sont des rectangles. Un parallélépipède est un prisme ayant pour base un parallélogramme.

1.5 Applications affines

En mathématiques, il est de coutume de s'intéresser aux applications qui préservent une certaine structure donnée. Ainsi dans ce cadre où nous avons introduit ce qu'est la structure d'espace affine, il apparait donc naturelle de catégoriser les applications qui en préserve.

Définition 1.47

Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces affines de directions respectives E et F . Une application $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ est dite **application affine** ou **morphisme affine** s'il existe une application $\vec{f}$ définie de $E \rightarrow F$ telle que

$$\forall M, N \in \mathcal{E}, \quad \overrightarrow{f(M)f(N)} = \vec{f}(\overrightarrow{MN}).$$

L'application $\vec{f}$ est appelée l'**application linéaire associée** à f . Elle est unique et est dite **partie linéaire** de f .

Propriétés 1.48

Soit $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ une application affine d'application linéaire associée $\vec{f}$.

1. On a

$$\forall N \in \mathcal{E}, \quad \forall \vec{u} \in E, \quad f(N + \vec{u}) = f(N) + \vec{f}(\vec{u}).$$

En effet ces deux formules sont équivalentes : soient $M, N \in \mathcal{E}$;

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f(M)f(N)} = \vec{f}(\overrightarrow{MN}) &\iff f(N) - f(M) = \vec{f}(\overrightarrow{MN}) = -\vec{f}(\overrightarrow{NM}) \\ &\iff f(M) = f(N) + \vec{f}(\overrightarrow{NM}) \\ &\iff f(N + \overrightarrow{NM}) = f(N) + \vec{f}(\overrightarrow{NM}). \end{aligned}$$

2. L'image (directe) par f d'un sous-espace de $\mathcal{E}$ est un sous-espace de $\mathcal{F}$.

En effet, soit $\mathcal{E}'$ un sous-espace de $\mathcal{E}$ de direction E' . Soit $A \in \mathcal{E}'$ donc $\mathcal{E}' = A + E'$. Soit $M \in \mathcal{E}'$. On a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f(M)f(A)} = \vec{f}(\overrightarrow{MA}) &\iff f(M) = f(A) + \vec{f}(\overrightarrow{AM}) \\ &\iff f(\mathcal{E}') = f(A) + \vec{f}(E') \end{aligned}$$

Ainsi l'image $f(\mathcal{E}')$ de $\mathcal{E}'$ par f est un espace affine de direction $\vec{f}(E')$. En particulier $\text{Im}f = f(\mathcal{E})$ est un sous-espace de $\mathcal{F}$.

3. L'image réciproque par f d'un sous-espace affine de $\mathcal{F}$ est soit vide soit un sous-espace affine de $\mathcal{E}$

En effet, soit $\mathcal{F}'$ un sous-espace de $\mathcal{F}$ de direction F' . Supposons que $f^{-1}(\mathcal{F}')$ est non vide. On a

$$\begin{aligned} \begin{cases} A \in f^{-1}(\mathcal{F}') \iff f(A) \in \mathcal{F}' \\ M \in f^{-1}(\mathcal{F}') \iff f(M) \in \mathcal{F}' \end{cases} &\iff \overrightarrow{f(A)f(M)} = \vec{f}(\overrightarrow{AM}) \in F' \\ &\iff \overrightarrow{AM} \in f^{-1}(F') \\ &\iff M \in A + \vec{f}^{-1}(F') \end{aligned} \quad (1.5.1)$$

Par suite, $f^{-1}(\mathcal{F}')$ est un sous-espace affine de $\mathcal{F}$ de direction $\vec{f}^{-1}(F')$.

4. L'application f préserve les barycentres i.e si $G = \text{bar}\{(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}\}$ alors

$$f(G) = \text{bar}\{(f(A_i), \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}\}$$

En effet

$$\begin{aligned} G = \text{bar}\{(A_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}\} &\iff \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \\ &\iff \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{f}(\overrightarrow{GA_i}) = \vec{0} \\ &\iff \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{f(G)f(A_i)} = \vec{0} \\ &\iff f(G) = \text{bar}\{(f(A_i), \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}\}. \end{aligned}$$

Proposition 1.49

Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces affines. Une application $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ est affine si et seulement si, pour tout $A \in E$, f est linéaire de $\mathcal{E}_A$ dans $\mathcal{F}_{f(A)}$.

Preuve.

Supposons que $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ est une application affine d'application linéaire $\vec{f}$ et montrons que pour tout $A \in \mathcal{E}$, $f : \mathcal{E}_A \rightarrow \mathcal{F}_{f(A)}$ est linéaire.

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et M , et N deux éléments de $\mathcal{E}$. Montrons que pour tout $A \in \mathcal{E}$ on a : $f(\alpha \cdot_A M +_A N) = \alpha \cdot_{f(A)} f(M) +_{f(A)} f(N)$.

On a

$$\begin{aligned} f(\alpha M + N) &= f(A + \alpha \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}) = \vec{f}(\alpha \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}) \\ &= \alpha \vec{f}(\overrightarrow{AM}) + \vec{f}(\overrightarrow{AN}) \end{aligned} \quad (1.5.2)$$

Proposition 1.50

Toute application qui conserve le barycentre est une application affine.

Preuve.

Soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ une application. Supposons que f préserve le barycentre et montrons que f est affine. Soit $G = \text{bar}\{(A, \alpha), (B, 1 - \alpha)\}$.

$$G = \text{bar}\{(A, \alpha), (B, 1 - \alpha)\} \iff \forall O \in \mathcal{E}, \overrightarrow{OG} = \alpha \overrightarrow{OA} + (1 - \alpha) \overrightarrow{OB} \quad (1.5.3)$$

Posons $G' = f(G) = \text{bar}\{(f(A), \alpha), (f(B), 1 - \alpha)\}$, $O' = f(O)$ puis pour tout $M \in \mathcal{E}$, $\varphi(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{O'M'} = \overrightarrow{f(O)f(M)}$. Montrons que φ ainsi définie est une application linéaire.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O'G'} = \varphi(\overrightarrow{OG}) &= \varphi(\alpha \overrightarrow{OA} + (1 - \alpha) \overrightarrow{OB}) \\ &= \alpha \overrightarrow{O'A'} + (1 - \alpha) \overrightarrow{O'B'} \\ &= \alpha \varphi(\overrightarrow{OA}) + (1 - \alpha) \varphi(\overrightarrow{OB}) \quad \text{par définition de } \varphi. \end{aligned}$$

En particulier pour $O = B$, $\varphi(\alpha \overrightarrow{BA}) = \alpha \varphi(\overrightarrow{BA})$. Donc

$$\forall \vec{u} \in E, \quad \varphi(\alpha \vec{u}) = \alpha \varphi(\vec{u}) \quad (1.5.4)$$

Soit $\vec{u}, \vec{v} \in E$ tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ et $\alpha = \frac{1}{2}$. On a

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}\right) &= \frac{1}{2}\varphi(\vec{u}) + \frac{1}{2}\varphi(\vec{v}) \\ \varphi\left(\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v})\right) &= \frac{1}{2}(\varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})) \end{aligned}$$

Or $\varphi(\alpha \vec{u}) = \alpha \varphi(\vec{u})$. Donc

$$\varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v}). \quad (1.5.5)$$

De (1.5.4) et (1.5.5) est donc linéaire. Par conséquent f est une application affine dont l'endomorphisme associé est φ . ▀

Proposition 1.51

Soit f une application affine. Alors f est injective (resp. surjective, bijective) si et seulement si $\tilde{f}$ l'est.

Preuve.

Exercice. ▀

De cette proposition et de l'analogie vectoriel on déduit immédiatement :

Corollaire 1.52

Soit f une application affine entre deux espaces affines de même dimension. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est injective ;
2. f est surjective ;
3. f est bijective.

Définition 1.53

1. Une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ s'appelle un endomorphisme affine de $\mathcal{E}$.
2. Une application affine bijective s'appelle un isomorphisme affine (ou encore, une transformation affine).
3. Deux espaces affines $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont dits isomorphes s'il existe un isomorphisme affine de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{F}$ (ils sont alors de même dimension).
4. Un endomorphisme affine bijectif s'appelle un automorphisme affine ou une transformation affine.

Proposition 1.54

Soient $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ et $g : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ deux applications affines d'applications linéaires respectives $\vec{f}$ et $\vec{g}$. Alors $g \circ f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{G}$ est une application affine d'application linéaire $\vec{g} \circ \vec{f}$.

Preuve.

Soit M et $N \in \mathcal{E}$ on a :

$$\overrightarrow{g \circ f(M)g \circ f(N)} = \vec{g}(\overrightarrow{f(M)f(N)}) = \vec{g}(\vec{f}(\overrightarrow{MN})) = (\vec{g} \circ \vec{f})(\overrightarrow{MN})$$

**Notation**

Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces affines de direction respective E et F . On note

1. $A(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ l'ensemble des applications affines de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$, c'est l'analogue de $\mathcal{L}(E, F)$ ensemble des applications linéaires de E dans F (qui soutendent les applications affines de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$);
2. $A(\mathcal{E}) = A(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ l'ensemble des endomorphismes affines de $\mathcal{E}$; c'est l'analogue de $\mathcal{L}(E)$ ensemble des endomorphismes de E ;
3. $GA(\mathcal{E})$ l'ensemble des automorphismes (endomorphismes bijectifs) affines de $\mathcal{E}$; c'est l'analogue de $GL(E)$ ensemble des automorphismes de E ; observer que muni de la composition des morphismes $(GA(\mathcal{E}), \circ)$ est un groupe.

Proposition 1.55

L'application $L : f \in GA(\mathcal{E}) \mapsto \vec{f} \in GL(E)$ est un homomorphisme surjectif du groupe affine $GA(\mathcal{E})$ dans le groupe linéaire $GL(E)$ (groupe des applications linéaires bijectives de E dans lui-même). Son noyau est le sous-groupe des translations de $\mathcal{E} : T(\mathcal{E})$.

Le groupe affine $GA(\mathcal{E})$ opère sur $\mathcal{E}$ par l'application $(f, P) \in GA(\mathcal{E}) \times \mathcal{E} \mapsto f(P) \in \mathcal{E}$. Rappelons qu'on appelle alors stabilisateur d'un point O de $\mathcal{E}$ le sous-groupe noté $\text{Stab}(O)$ de $GA(\mathcal{E})$ constitué des transformations affines f laissant fixe le point O :

$$\text{Stab}(O) = \{f \in GA(\mathcal{E}) ; f(O) = O\}.$$

Proposition 1.56 Pour tout point O de $\mathcal{E}$, la restriction de l'application $f \mapsto \vec{f}$ à $\text{Stab}(O)$ est un isomorphisme de $\text{Stab}(O)$ sur le groupe linéaire $GL(E)$.

Définition 1.57

Soit $\vec{f}$ un endomorphisme linéaire de E . On appelle **vecteur invariant** de $\vec{f}$ tout vecteur $\vec{u}$ de E qui vérifie $\vec{f}(\vec{u}) = \vec{u}$. L'ensemble des vecteurs invariants de $\vec{f}$ est noté $\text{Inv}(\vec{f})$.

Observer que $\vec{f}(\vec{u}) = \vec{u} \iff (\vec{f} - \text{id}_E)(\vec{u}) = \vec{0}$ traduit que $\vec{u}$ est un vecteur propre de $\vec{f}$ associé à la valeur propre 1. Ainsi $\text{Inv}(\vec{f}) = \ker(\vec{f} - \text{id}_E)$ est le sous-espace propre de E associé à la valeur propre 1.

Proposition 1.58

Soient $\mathcal{E}$ un espace affine et $f \in A(\mathcal{E})$. On appelle **ensemble de points invariants (fixes)** par f l'ensemble noté $\text{Inv}(f)$ défini par

$$\text{Inv}(f) = \{M \in \mathcal{E} : f(M) = M\}.$$

Proposition 1.59

Soit $f \in A(\mathcal{E})$ dont la partie linéaire est $\vec{f}$.

1. Soit $P \in \mathcal{E}$. Alors $\text{Inv}(f) \neq \emptyset$ si et seulement si $\overrightarrow{Pf(P)} \in \text{Im}(\vec{f} - \text{id}_E)$.
2. Si $\text{Inv}(f) \neq \emptyset$, $\text{Inv}(f)$ est un sous espace affine de $\mathcal{E}$ de direction $\text{Inv}(\vec{f})$.

Preuve.

1. Fixons $P \in \mathcal{E}$ et soit $M \in \mathcal{E}$, alors

$$\begin{aligned} f(P) = f(M) + \vec{f}(\overrightarrow{MP}) &\iff P + \overrightarrow{Pf(P)} = f(M) + \vec{f}(\overrightarrow{MP}) \\ &\iff \overrightarrow{Pf(P)} = \overrightarrow{Pf(M)} + \vec{f}(\overrightarrow{MP}). \end{aligned}$$

Par suite, $M \in \text{Inv}(f) \iff \overrightarrow{Pf(P)} = \overrightarrow{PM} + \vec{f}(\overrightarrow{MP}) = \vec{f}(\overrightarrow{MP}) - \overrightarrow{MP} = (\vec{f} - \text{id}_E)(\overrightarrow{MP})$.

Ainsi $\text{Inv}(f)$ est non vide si et seulement s'il existe au moins $\vec{u} \in E$ tel que $\overrightarrow{Pf(P)} = (\vec{f} - \text{id}_E)(\vec{u})$. Par conséquent $\text{Inv}(f) \neq \emptyset$ si et seulement si $\overrightarrow{Pf(P)} \in \text{Im}(\vec{f} - \text{id}_E)$.

2. Supposons $\text{Inv}(f) \neq \emptyset$. Fixons $P \in \text{Inv}(f)$ et soit $M \in \mathcal{E}$. D'après le calcul effectué en 1., $M \in \text{Inv}(f)$ si et seulement si $(\vec{f} - \text{id}_E)(\overrightarrow{MP}) = \vec{0}$ (puisque $f(P) = P$), donc si et seulement si $\overrightarrow{PM} \in \ker(\vec{f} - \text{id}_E) = \text{Inv}(\vec{f})$. On en déduit que $\text{Inv}(f) = P + \text{Inv}(\vec{f})$, c'est-à-dire que $\text{Inv}(f)$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction $\text{Inv}(\vec{f})$. ▀

Corollaire 1.60

Soit $f \in A(\mathcal{E})$. Alors f possède un point fixe et un seul si et seulement si $\text{Inv}(\vec{f}) = \{\vec{0}\}$.

Observons que pour utiliser la partie indirecte de ce corollaire, il n'est pas nécessaire de montrer d'abord que $\text{Inv}(f) \neq \emptyset$ d'où son grand intérêt.

Preuve.

La partie directe de l'assertion résulte directement du 2. de la proposition précédente. Réciproquement, si $\text{Inv}(\vec{f}) = \{\vec{0}\}$, alors $\vec{f} - \text{id}_E$ est injective, donc surjective (c'est un endomorphisme de E , espace de dimension finie) et donc $\text{Im}(\vec{f} - \text{id}) = E$. Par conséquent, le point 1. de la proposition précédente implique que $\text{Inv}(f)$ est non vide, et le point 2. dit que c'est un sous-espace de direction $\text{Inv}(\vec{f}) = \{\vec{0}\}$, c'est-à-dire un singleton. ▀

Remarque 1.61

Si $f \in GA(\mathcal{E})$ alors $\text{Inv}(f^{-1}) = \text{Inv}(f)$.

Proposition 1.62

Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces affines de direction respectives E et F , $\psi : E \rightarrow F$ une application linéaire et $(A, B) \in \mathcal{E} \times \mathcal{F}$. Alors $f : M \mapsto B + \psi(\overrightarrow{AM})$ est l'unique application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$ telle que $f(A) = B$ et dont la partie linéaire $\vec{f} = \psi$.

Autrement dit, une application affine est entièrement déterminée par la donnée de sa partie linéaire et de l'image d'un point (quelconque).

Preuve.

Il est clair que l'application f ainsi définie vérifie $f(A) = B$. D'autre part, pour tous $M, N \in \mathcal{E}$, on a :

$$\overrightarrow{f(M)f(N)} = f(N) - f(M) = (B + \psi(\overrightarrow{AN})) - (B + \psi(\overrightarrow{AM})) = \psi(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}) = \psi(\overrightarrow{MN}),$$

ce qui prouve que f est affine de partie linéaire $\vec{f} = \psi$.

Supposons maintenant qu'il existe une autre application affine g possédant les mêmes propriétés. Pour tout $M \in \mathcal{E}$,

$$g(M) = g(A + \overrightarrow{AM}) = g(A) + \vec{g}(\overrightarrow{AM}) = B + \psi(\overrightarrow{AM}) = f(M),$$

si bien que $g = f$. ▀

Théorème 1.63

Soient $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension finie et $\mathcal{F}$ un espace affine. Soit $(A_i)_{0 \leq i \leq n}$ un repère affine de $\mathcal{E}$, et soit $(B_i)_{0 \leq i \leq n}$ une famille quelconque de points de $\mathcal{F}$. Alors il existe une unique $f \in A(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ telle que $f(A_i) = B_i$ pour tout i . En outre,

1. f est injective si et seulement si $(B_i)_{0 \leq i \leq n}$ est libre dans $\mathcal{F}$;
2. f est surjective si et seulement si $(B_i)_{0 \leq i \leq n}$ est génératrice de $\mathcal{F}$;
3. f est bijective si et seulement si $(B_i)_{0 \leq i \leq n}$ est un repère affine de $\mathcal{F}$.

On retiendra donc qu'une application affine est entièrement déterminée par la donnée d'un repère (cartésien ou affine) et de son image, exactement comme dans le cas vectoriel.

Théorème 1.64

Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces affines de dimensions respectives m et n . Soient $\mathcal{R} = (O; \mathcal{B})$ et $\mathcal{S} = (P; \mathcal{C})$ deux repères cartésiens, respectivement de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$.

Pour tout $M \in \mathcal{E}$ notons $X_M \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$ la matrice colonne des coordonnées de M dans $\mathcal{R}$; pour tout $N \in \mathcal{F}$ notons $Y_N \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ la matrice colonne des coordonnées de N dans $\mathcal{S}$ et soit $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ une application.

1. Supposons que f est affine et notons $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\vec{f}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. Alors

$$\forall M \in \mathcal{E}, \quad Y_{f(M)} = AX_M + Y_{f(O)}.$$

Cette écriture s'appelle la **représentation matricielle** (on dit aussi **expression analytique**) de f relativement aux repères $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$. Concrètement, elle se traduit par une expression du type :

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m + b_1 \\ y_2 = a_{21}x_1 + \dots + a_{2m}x_m + b_2 \\ \vdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nm}x_m + b_n \end{cases}$$

2. Réciproquement, supposons qu'il existe des matrices $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telles que $Y_{f(M)} = AX_M + B$ pour tout $M \in \mathcal{E}$, alors f est affine et l'écriture précédente n'est autre que sa représentation matricielle relativement aux repères $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ (en particulier, A et B sont uniques).

Preuve.

1. est clair, puisque X_M est formé des composantes de $\overrightarrow{OM}$ dans $\mathcal{B}$, $Y_{f(M)} - Y_{f(O)}$ est formé des composantes de $\overrightarrow{Pf(M)} - \overrightarrow{Pf(O)} = \overrightarrow{f(O)f(M)}$ dans $\mathcal{C}$ et puisqu'on a $\overrightarrow{f(O)f(M)} = \vec{f}(\overrightarrow{OM})$.

2. Comme nous l'avons rappelé, la donnée de $A, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ détermine une unique $\psi \in L(E, F)$ telle que $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\psi)$. On a par ailleurs, pour tous $M, N \in \mathcal{E}$:

$$\underbrace{Y_{f(N)} - Y_{f(M)}}_{\text{composantes de } \overrightarrow{f(M)f(N)} \text{ dans } \mathcal{C}} = AX_N + B - (AX_M + B) = A \underbrace{(X_N - X_M)}_{\text{composantes de } \overrightarrow{MN} \text{ dans } \mathcal{B}},$$

d'où $\overrightarrow{f(M)f(N)} = \psi(\overrightarrow{MN})$ pour tous $M, N \in \mathcal{E}$. Par suite, f est affine de partie linéaire σ , et comme $Y_{f(O)} = AX_O + B = B$, l'écriture $Y_{f(M)} = AX_M + B$ est bien la représentation matricielle de f .



Définition 1.65 (Barycentre d'applications affines)

Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces affines. Soient $f, g \in A(\mathcal{E}, \mathcal{F})$. On appelle barycentre des applications - pondérées - (f, α) et (g, β) l'application $\alpha f + \beta g$ où α et β sont des scalaires satisfaisant $\alpha + \beta \neq 0$.

Grâce à la normalisation des coefficients, on peut écrire $\alpha + \beta = 1$ et donc poser $\beta = 1 - \alpha$ ou vice-versa.

Lemme 1.66

Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et $f, g \in A(\mathcal{E}, \mathcal{F})$. Le barycentre a des applications (f, α) et $(g, 1 - \alpha)$ qui à tout $M \in \mathcal{E}$ associe $a(M) = \alpha f(M) + (1 - \alpha)g(M)$ est une application affine dont la partie linéaire est $\alpha \vec{f} + (1 - \alpha)\vec{g}$.

Preuve.

Soit $M, N \in \mathcal{E}$. On a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a(M)a(N)} &= \overrightarrow{(\alpha f(M) + (1 - \alpha)g(M))(\alpha f(N) + (1 - \alpha)g(N))} \\ &= \alpha f(N) + (1 - \alpha)g(N) - (\alpha f(M) + (1 - \alpha)g(M)) \quad \text{grâce à l'écriture barycentrique} \\ &= \alpha(f(N) - f(M)) + (1 - \alpha)(g(N) - g(M)) \\ &= \alpha \overrightarrow{f(M)f(N)} + (1 - \alpha)\overrightarrow{g(M)g(N)} \\ &= \alpha \vec{f}(\overrightarrow{MN}) + (1 - \alpha)\vec{g}(\overrightarrow{MN}) \\ &= (\alpha \vec{f} + (1 - \alpha)\vec{g})(\overrightarrow{MN}) \\ &= \vec{a}(\overrightarrow{MN}). \end{aligned}$$



Il faut comprendre qu'en général, une combinaison linéaire d'applications affines $(\alpha f + \beta g)$ n'est pas généralement définie. La particularité ici ($\alpha + \beta = 1$) est qu'il s'agit d'un barycentre d'applications affines contrairement à une combinaison linéaire d'applications linéaires (puisque un ensemble d'applications linéaires est un espace vectoriel).

1.5.1 Quelques applications affines remarquables

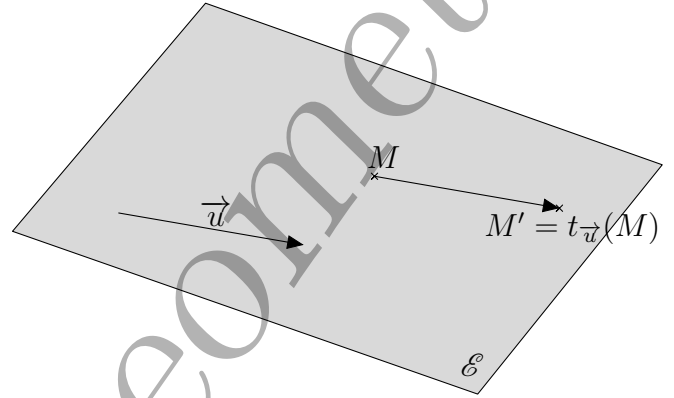
Dans toute cette section $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux sous-espace affines supplémentaires de direction respectives F et G dans un espace affine $\mathcal{E}$ de direction E .

Définition 1.67 (Translation)

Soit $\vec{u} \in E$. On appelle **translation de vecteur $\vec{u}$** l'application notée $t_{\vec{u}} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ définie par

$$\begin{aligned} t_{\vec{u}}(M) = M' &\iff \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \\ &\iff M' = M + \vec{u} \end{aligned}$$

$t_{\vec{u}}$ est une application affine de partie linéaire id_E et $Inv(t_{\vec{u}}) = \emptyset$ si $\vec{u} \neq \vec{0}$ sinon $Inv(t_{\vec{u}}) = \mathcal{E}$ et $t_{\vec{0}} = id_{\mathcal{E}}$.

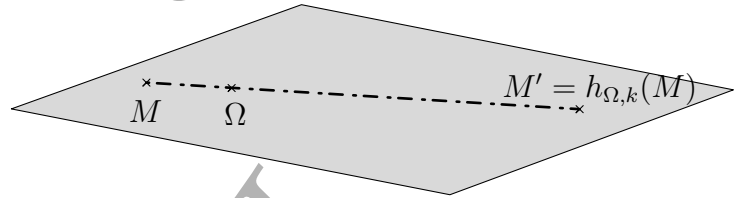


Définition 1.68 (Homothétie)

Soient $\Omega \in \mathcal{E}$ et $k \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. On appelle **homothétie de centre Ω et de rapport k** l'application notée $h_{\Omega,k} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ définie par

$$h_{\Omega,k}(M) = M' \iff \overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$$

$h_{\Omega,k}$ est une application affine de partie linéaire $\vec{h}_k$ et $Inv(h_{\Omega,k}) = \{\Omega\}$ si $k \neq 1$; sinon $Inv(h_{\Omega,1}) = \mathcal{E}$ et $h_{\Omega,1} = id_{\mathcal{E}}$.



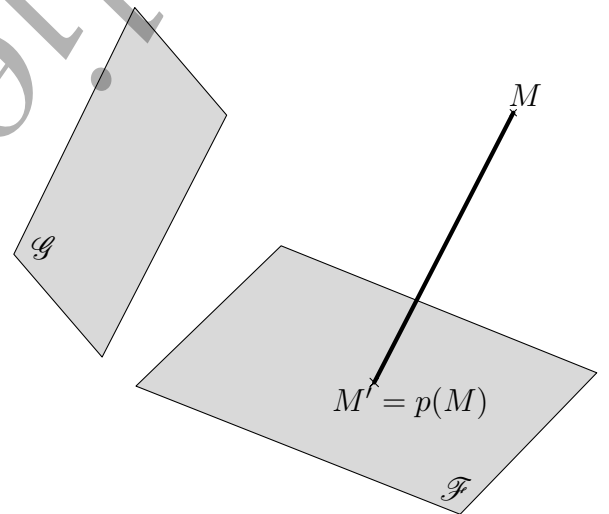
Définition 1.69 (Projection)

On appelle **projection sur $\mathcal{F}$ suivant $\mathcal{G}$** l'application

$$\begin{aligned} p : \mathcal{E} &\rightarrow \mathcal{E} \\ M &\mapsto M' = p(M) \end{aligned}$$

telle que pour tout $M \in \mathcal{E}$, $p(p(M)) = p(M)$ i.e $p^2 := p \circ p = p$.

Le sous-espace $\mathcal{G}$ est appelé **direction de la projection p** et $\mathcal{F}$ la **base de la projection p** . La projection p est une application affine de partie linéaire la projection vectorielle $\vec{p}$ sur F parallèlement à G . On a par ailleurs $Inv(p) = \mathcal{F}$, $Inv(\vec{p}) = F$, $G = \{ \overrightarrow{M'M}; M \in \mathcal{E}, p(M) = M' \}$.



Définition 1.70 (Symétrie)

On appelle **symétrie de base $\mathcal{F}$ suivant $\mathcal{G}$** l'application

$$\begin{aligned} s : \mathcal{E} &\longrightarrow \mathcal{E} \\ M &\longmapsto M' = s(M) \end{aligned}$$

telle que pour tout $M \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{Ms(M)} \in G$ et le milieu $I = \text{bar}((M, 1), (s(M), 1)) \in \mathcal{F}$ du segment $[M, s(M)]$. On a $s(M) = M' \iff s(M') = M$. Ainsi $s(M) = M' \implies s(s(M)) = M$ i.e $s^2 := s \circ s = \text{id}_{\mathcal{E}}$.

La symétrie s est une application affine caractérisée par sa base et sa direction. On dit aussi que s est une **involution** en vertu de $s^2 = \text{id}_{\mathcal{E}}$.

Proposition 1.71 (Lien entre projection et symétrie)

Soient s la symétrie de base $\mathcal{F}$ suivant $\mathcal{G}$ et p la projection sur $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ suivant $\mathcal{G}$ et $M \in \mathcal{E}$. On a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{p(M)M} + \overrightarrow{p(M)s(M)} &= \vec{0} \iff \\ 2\overrightarrow{p(M)M} + \overrightarrow{Ms(M)} &= \vec{0} \iff \\ s(M) &= 2p(M) - M \end{aligned}$$

Ainsi $\vec{s} = 2\vec{p} - \text{id}_E$. On a : $G \cap F = \{\vec{0}\}$ et
 $F = \{\vec{u} \in E ; \vec{p}(\vec{u}) = \vec{u}\} = \{\vec{u} \in E ; \vec{s}(\vec{u}) = \vec{u}\}$
 $G = \{\vec{u} \in E ; \vec{p}(\vec{u}) = \vec{0}\} = \{\vec{u} \in E ; \vec{s}(\vec{u}) = -\vec{u}\}$

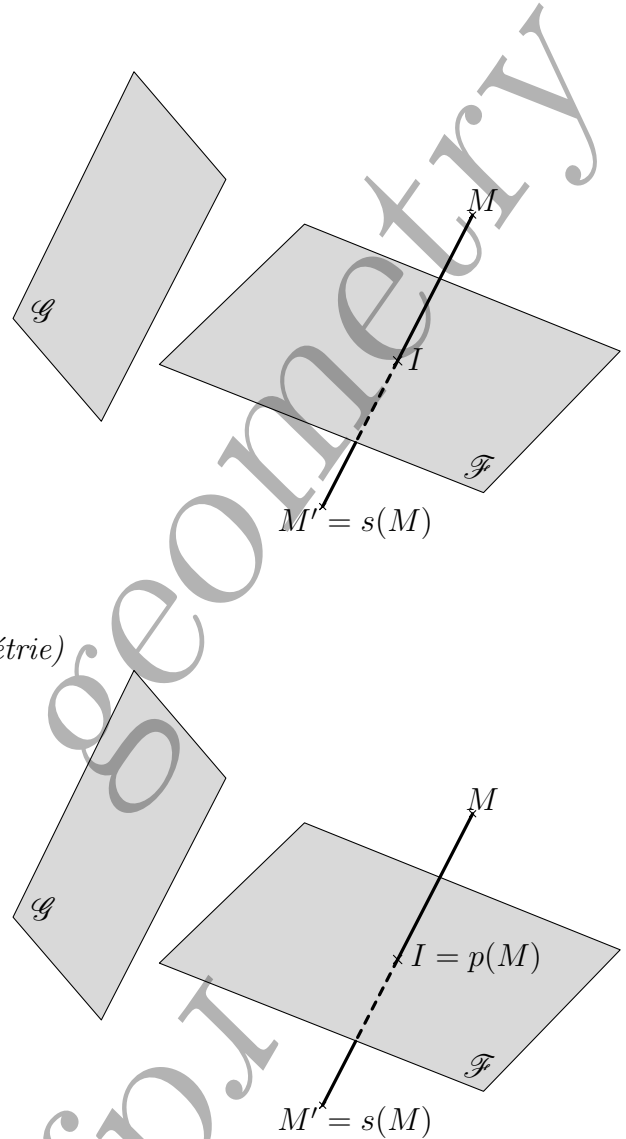
Proposition 1.72

Soit p la projection de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{F}$ parallèlement à $\mathcal{G}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Considérons $a = \alpha \text{id}_{\mathcal{E}} + (1 - \alpha)p$.

1. a est un endomorphisme affine de $\mathcal{E}$ de partie linéaire $\vec{a} = \alpha \text{id}_E + (1 - \alpha)\vec{p}$.
2. Si $\alpha = 0$ alors $a = p$; si $\alpha \neq 0$ alors $a \in \text{GA}(\mathcal{E})$ et $a^{-1} = \frac{1}{\alpha} \text{id}_{\mathcal{E}} + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)p$.
3. Si $\alpha = 1$ alors $a = \text{id}_{\mathcal{E}}$; si $\alpha \neq 1$ alors $\text{Inv}(a) = \mathcal{F}$ et $G = \ker(\vec{a} - \alpha \text{id}_E)$ (sous-espace propre associé à la valeur propre α) et aussi $G = \overrightarrow{Ma(M)}$, $M \in \mathcal{E}$.
4. Pour tout $M \in \mathcal{E}$, $a(M) = h_{p(M), \alpha}(M)$; cette formule permet de faire la représentation graphique (construction géométrique) du point $a(M)$.

5. Dans une base convenable de E , l'endomorphisme $\vec{a}$ admet pour matrice $\begin{pmatrix} I_{\dim F} & 0 \\ 0 & \alpha I_{\dim G} \end{pmatrix}$

En particulier, on a : $\det \vec{a} = \alpha^{\dim G}$.



Preuve.

1. Évident
2. Supposons que $\alpha \neq 0$. Alors $\det \vec{a} \neq 0$ donc $\vec{a} \in GL(E)$ et $a \in GA(\mathcal{E})$. En outre, en posant $b = \frac{1}{\alpha} id_{\mathcal{E}} + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) p$, on vérifie aisément que $b \circ a = a \circ b = id_{\mathcal{E}}$.
3. Supposons que $\alpha \neq 1$. Alors $\ker(\vec{a} - \alpha id_E) = \ker((1 - \alpha)\vec{p}) = \ker \vec{p} = G$. D'autre part, $\overrightarrow{Ma(M)} = (1 - \alpha)\overrightarrow{Mp(M)}$ donc $\{\overrightarrow{Ma(M)}, M \in E\} = \{\overrightarrow{Mp(M)}, M \in \mathcal{E}\} = G$. Enfin,

$$\begin{aligned} a(M) = M &\iff \alpha M + (1 - \alpha)p(M) = M \\ &\iff (1 - \alpha)p(M) = (1 - \alpha)M \quad \text{dans un vectoriel de} \\ &\iff p(M) = M \\ &\iff M \in Inv(p) = F. \end{aligned}$$
4. Il suffit d'écrire $a(M) = \alpha M + (1 - \alpha)p(M) = p(M) + \overrightarrow{ap(M)}M = h_{p(M), \alpha}(M)$.
5. Il suffit de prendre pour base de E la réunion d'une base quelconque de F et d'une base quelconque de G .

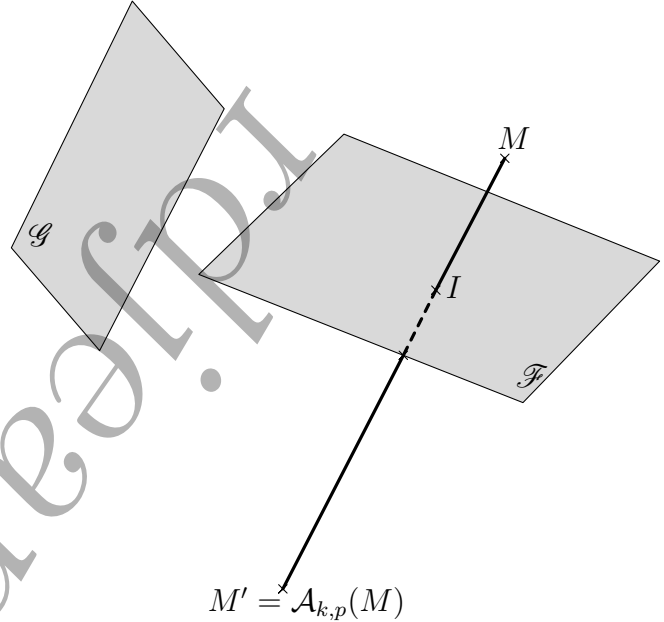


Définition 1.73 (*Affinité*)

Soient $k \in \mathbb{K}$ et p la projection sur $\mathcal{F}$ suivant $\mathcal{G}$. On appelle **affinité de rapport k** , de base $\mathcal{F}$ suivant $\mathcal{G}$ l'application notée $\mathcal{A}_{k,p} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ définie par

$$\mathcal{A}_{k,p}(M) = M' \iff \overrightarrow{p(M)M'} = k\overrightarrow{p(M)M}.$$

$\mathcal{A}_{k,p}$ est une application affine dont l'application linéaire associée est $\vec{\mathcal{A}}_{k,p} = k id_E + (1 - k)\vec{p}$.



1.5.1.1 Tableau mnémorique

1.5.2 Quelques sous groupes de $(GA(\mathcal{E}), \circ)$

1. Soit $T(\mathcal{E}) = \{t_{\vec{u}}, \vec{u} \in E\}$ l'ensemble des translations de $\mathcal{E}$.

$$\forall M \in \mathcal{E}, \quad t_{\vec{u}}(M) = M' \iff \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \iff M' = M + \vec{u}$$

- (a) Si $\vec{u} = \vec{0}$ alors $t_{\vec{u}} = id_{\mathcal{E}}$ et $\text{Inv}(t_{\vec{0}}) = \mathcal{E}$ mais si $\vec{u} \neq \vec{0}$ alors $t_{\vec{u}}$ n'a pas de point fixe.
 (b) Soient $\vec{u}, \vec{v} \in E$ et $M \in \mathcal{E}$

$$\begin{aligned} t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}(M) &= t_{\vec{u}}(t_{\vec{v}}(M)) = t_{\vec{u}}(M + \vec{v}) = M + \vec{u} + \vec{v} = t_{\vec{u}+\vec{v}}(M) \\ &= M + \vec{v} + \vec{u} = t_{\vec{v}+\vec{u}}(M) \end{aligned}$$

Ainsi $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$.

- (c) Soit $\vec{u} \in E$, on a $(t_{\vec{u}})^{-1} = t_{-\vec{u}}$

Par conséquent $(T(\mathcal{E}), \circ)$ est un sous-groupe de $(GA(\mathcal{E}), \circ)$: c'est le groupe des translations.

2. Soit $\Omega \in \mathcal{E}$ et $H(\mathcal{E}) = \{h_{\Omega,k}, k \in \mathbb{K}\}$ l'ensemble des homothéties de centre Ω et de rapport k .
 (a) Pour tout $M \in \mathcal{E}$, $h_{\Omega,1} = id_{\mathcal{E}}$
 (b) Soit $k, k' \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} h_{\Omega,k} \circ h_{\Omega,k'}(M) &= h_{\Omega,k}(M_1) = M' \iff \begin{cases} \overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M_1} \\ \overrightarrow{\Omega M_1} = k' \overrightarrow{\Omega M} \end{cases} \\ &\iff \overrightarrow{\Omega M'} = kk' \overrightarrow{\Omega M}. \end{aligned}$$

Ainsi $h_{\Omega,k} \circ h_{\Omega,k'} = h_{\Omega,kk'}$.

- (c) Soit $k \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ alors $(h_{\Omega,k})^{-1} = h_{\Omega, \frac{1}{k}}$.

Par conséquent $(H(\mathcal{E}), \circ)$ est un sous-groupe de $(GA(\mathcal{E}), \circ)$: c'est le groupe des homothéties.

3. Soit $HT(\mathcal{E}) = \{h_{\Omega,k}, t_{\vec{u}} ; \vec{u} \in E, \Omega \in \mathcal{E}, k \in \mathbb{K}\}$ l'ensemble des homothéties-translations de centre Ω et de rapport k puis de vecteur $\vec{u}$.
 (a) Soit $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$ et $h_{\Omega,k}$ l'homothétie de centre Ω et de rapport k . Soit $M \in \mathcal{E}$, on a :

$$\begin{aligned} t_{\vec{u}} \circ h_{\Omega,k}(M) &= M \iff t_{\vec{u}}(M_1) = M \text{ avec } M_1 = h_{\Omega,k}(M) \\ &\iff \begin{cases} \overrightarrow{\Omega M_1} = k \overrightarrow{\Omega M} \\ \overrightarrow{M_1 M} = \vec{u} \end{cases} \\ &\iff (1-k)\overrightarrow{\Omega M} = \vec{u} \end{aligned}$$

Ainsi si $k \neq 1$, l'application $t_{\vec{u}} \circ h_{\Omega,k}$ admet un point fixe $\Gamma = \Omega + \frac{1}{1-k}\vec{u}$ et ne peut donc être une translation.

Observons qu'un calcul intuitif donne pour tout $M \in \mathcal{E}$

$$\begin{aligned}
 M' - \left(\Omega + \frac{1}{1-k}\vec{u}\right) &= k\left(M - \left(\Omega + \frac{1}{1-k}\vec{u}\right)\right) \iff M' - \Omega - \frac{1}{1-k}\vec{u} = kM - k\Omega - \frac{k}{1-k}\vec{u} \\
 &\iff M' - \Omega = kM - k\Omega + \vec{u} \\
 &\iff \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M} + \vec{u} \\
 &\iff \overrightarrow{M_1 M'} + \overrightarrow{\Omega M_1} = k\overrightarrow{\Omega M} + \vec{u} \\
 &\iff M' = t_{\vec{u}}(M_1) \quad \text{en posant } \overrightarrow{\Omega M_1} = k\overrightarrow{\Omega M} \\
 &\iff M' = t_{\vec{u}}(h_{\Omega,k}(M)) = (t_{\vec{u}} \circ h_{\Omega,k})(M)
 \end{aligned}$$

Ainsi $t_{\vec{u}} \circ h_{\Omega,k}(M) = M' \iff \overrightarrow{\Gamma M'} = k\overrightarrow{\Gamma M}$. Par conséquent, si $k \neq 1$ alors $t_{\vec{u}} \circ h_{\Omega,k}$ est l'homothétie de centre $\Omega + \frac{1}{1-k}\vec{u}$ et de rapport k

$$t_{\vec{u}} \circ h_{\Omega,k} = h_{\Omega + \frac{1}{1-k}\vec{u}, k}.$$

Si $k = 1$ alors $h_{\Omega,1} = id_{\mathcal{E}}$ et $t_{\vec{u}} \circ h_{\Omega,k} = t_{\vec{u}}$.

- (b) Soit maintenant $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$ et $h_{\Omega,k}$ l'homothétie de centre Ω et de rapport k . Soit $M \in \mathcal{E}$, on a :

$$\begin{aligned}
 h_{\Omega,k} \circ t_{\vec{u}}(M) = M &\iff h_{\Omega,k}(M_1) = M \quad \text{avec } M_1 = t_{\vec{u}}(M) \\
 &\iff \begin{cases} \overrightarrow{\Omega M} = k\overrightarrow{\Omega M_1} \\ \overrightarrow{MM_1} = \vec{u} \end{cases} \\
 &\iff (1-k)\overrightarrow{\Omega M} = k\vec{u}
 \end{aligned}$$

Ainsi si $k \neq 1$, l'application $h_{\Omega,k} \circ t_{\vec{u}}$ admet un point fixe $\Lambda = \Omega + \frac{k}{1-k}\vec{u}$ et ne peut donc être une translation.

Observons qu'un calcul intuitif donne pour tout $M \in \mathcal{E}$

$$\begin{aligned}
 M' - \left(\Omega + \frac{k}{1-k}\vec{u}\right) &= k\left(M - \left(\Omega + \frac{k}{1-k}\vec{u}\right)\right) \iff M' - \Omega - \frac{k}{1-k}\vec{u} = kM - k\Omega - \frac{k^2}{1-k}\vec{u} \\
 &\iff M' - \Omega = kM - k\Omega + k\vec{u} \\
 &\iff \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M} + k\vec{u} \\
 &\iff \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M_1} + k(\overrightarrow{M_1 M} + \vec{u}) \\
 &\iff M' = h_{\Omega,k}(M_1) \quad \text{en posant } M_1 = t_{\vec{u}}(M) \\
 &\iff M' = h_{\Omega,k}(t_{\vec{u}}(M)) = (h_{\Omega,k} \circ t_{\vec{u}})(M).
 \end{aligned}$$

Ainsi $h_{\Omega,k} \circ t_{\vec{u}}(M) = M' \iff \overrightarrow{\Lambda M'} = k\overrightarrow{\Lambda M}$. Par conséquent si $k \neq 1$ alors $h_{\Omega,k} \circ t_{\vec{u}}$ est l'homothétie de centre $\Omega + \frac{k}{1-k}\vec{u}$ et de rapport k

$$h_{\Omega,k} \circ t_{\vec{u}} = h_{\Omega + \frac{k}{1-k}\vec{u}, k}.$$

Si $k = 1$ alors $h_{\Omega,1} = id_{\mathcal{E}}$ et $h_{\Omega,k} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}}$.

(c) Considérons à présent deux homothéties h_{Ω_1, k_1} et h_{Ω_2, k_2} . Soit $M \in \mathcal{E}$, on a :

$$\begin{aligned}
 h_{\Omega_1, k_1} \circ h_{\Omega_2, k_2}(M) = M &\iff h_{\Omega_1, k_1}(M_2) = M \text{ avec } M_2 = h_{\Omega_2, k_2}(M) \\
 &\iff \begin{cases} \overrightarrow{\Omega_1 M} = k_1 \overrightarrow{\Omega_1 M_2} \\ \overrightarrow{\Omega_2 M_2} = k_2 \overrightarrow{\Omega_2 M} \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} \overrightarrow{\Omega_1 M} = k_1 \overrightarrow{\Omega_1 M_2} \\ \overrightarrow{\Omega_2 \Omega_1} + \overrightarrow{\Omega_1 M_2} = k_2 \overrightarrow{\Omega_2 M} \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} \overrightarrow{\Omega_1 M} = k_1 \overrightarrow{\Omega_1 M_2} \\ k_1 \overrightarrow{\Omega_1 M_2} = -k_1 \overrightarrow{\Omega_2 \Omega_1} + k_1 k_2 \overrightarrow{\Omega_2 M} \end{cases} \\
 &\iff \overrightarrow{\Omega_1 M} = -k_1 \overrightarrow{\Omega_2 \Omega_1} + k_1 k_2 \overrightarrow{\Omega_2 M} \\
 &\iff (k_1 k_2 - k_1) \overrightarrow{M \Omega_2} + (k_1 - 1) \overrightarrow{M \Omega_1} = \vec{0}
 \end{aligned}$$

Observons que $k_1 k_2 - k_1 + k_1 - 1 = k_1 k_2 - 1 = 0 \iff k_1 k_2 = 1$. Ainsi on discutera suivant le cas où M est barycentre de Ω_1 et Ω_2 . D'où :

♣ si $k_1 k_2 = 1$ alors $h_{\Omega_1, k_1} \circ h_{\Omega_2, k_2}$ n'admet pas de point fixe et ne peut être une homothétie ; elle est donc la translation de vecteur $\vec{u} = (1 - k_1) \overrightarrow{\Omega_2 \Omega_1}$

$$h_{\Omega_1, k_1} \circ h_{\Omega_2, k_2} = t_{(1-k_1)\overrightarrow{\Omega_2 \Omega_1}}$$

En effet de la relation $\overrightarrow{\Omega_1 M'} = -k_1 \overrightarrow{\Omega_2 \Omega_1} + k_1 k_2 \overrightarrow{\Omega_2 M} = -k_1 \overrightarrow{\Omega_2 \Omega_1} + \overrightarrow{\Omega_2 M}$ on obtient en remplaçant $k_1 k_2 = 1$ que $\overrightarrow{M M'} = (1 - k_1) \overrightarrow{\Omega_2 \Omega_1}$

♣ si $k_1 k_2 \neq 1$ alors l'unique point $\Omega = \text{bar}\{(\Omega_1, k_1 - 1), (\Omega_2, k_1 k_2 - k_1)\}$ solution de $(k_1 k_2 - k_1) \overrightarrow{M \Omega_2} + (k_1 - 1) \overrightarrow{M \Omega_1} = \vec{0}$ est un point fixe de $h_{\Omega_1, k_1} \circ h_{\Omega_2, k_2}$. Fixons un point $P \in \mathcal{E}$ alors

$$\Omega = P + \frac{(1 - k_1)}{1 - k_1 k_2} \overrightarrow{P \Omega_1} + \frac{k_1(1 - k_2)}{1 - k_1 k_2} \overrightarrow{P \Omega_2}$$

et un calcul intuitif analogue aux précédents montre que $h_{\Omega_1, k_1} \circ h_{\Omega_2, k_2}$ est l'homothétie de centre Ω et de rapport $k_1 k_2$

$$h_{\Omega_1, k_1} \circ h_{\Omega_2, k_2} = h_{\Omega, k_1 k_2}$$

Par conséquent, $(HT(\mathcal{E}), \circ)$ est un sous groupe de $(GA(\mathcal{E}), \circ)$: c'est le groupe des homothéties-translations.

Un endomorphisme affine n'a pas nécessairement des points fixes. Le résultat suivant démontre cependant que, sous certaines hypothèses, on peut isoler dans f une « composante » qui en possède.

Théorème 1.74

Soit $f \in A(\mathcal{E})$ telle que $\text{Inv}(\vec{f}) = \ker(\vec{f} - \text{id}_E)$ et $\text{Im}(\vec{f} - \text{id}_E)$ soient supplémentaires dans E . Il existe un unique couple $(t, g) \in T(\mathcal{E}) \times A(\mathcal{E})$ tel que $f = t \circ g = g \circ t$ et $\text{Inv}(g) \neq \emptyset$. En outre, $\text{Inv}(g)$ est un sous-espace de direction $\text{Inv}(\vec{f})$ et $t = t_{\vec{u}}$ avec $\vec{u} \in \text{Inv}(\vec{f})$.

Preuve.

1. Commençons par analyser la condition $f = t \circ g = g \circ t$. Pour cela, écrivons $t = t_{\vec{u}}$ avec $\vec{u} \in E$, de sorte que

$$f = t_{\vec{u}} \circ g = g \circ t_{\vec{u}} \iff g = t_{-\vec{u}} \circ f = f \circ t_{-\vec{u}}.$$

Mais comme, pour tout $\varphi \in A(\mathcal{E})$ et tout $\vec{u} \in E$, on sait que $\varphi \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{\varphi}(\vec{u})} \circ \varphi$, on en déduit :

$$f = t_{\vec{u}} \circ g = g \circ t_{\vec{u}} \iff t_{-\vec{u}} \circ f = t_{\vec{f}(-\vec{u})} \circ f \iff \vec{f}(\vec{u}) = \vec{u} \iff \vec{u} \in \text{Inv}(\vec{f}) = \ker(\vec{f} - \text{id}_E).$$

2. Analysons maintenant la condition $\text{Inv}(g) \neq \emptyset$, pour $g = t_{-\vec{u}} \circ f$. Fixons $M \in E$. Puisque $\vec{g} = \vec{f}$ ainsi

$$\begin{aligned} \text{Inv}(g) \neq \emptyset &\iff \overrightarrow{Mg(M)} \in \text{Im}(\vec{g} - \text{id}_E) \\ &\iff (f(M) - \vec{u}) - M \in \text{Im}(\vec{f} - \text{id}_E) \\ &\iff \overrightarrow{Mf(M)} - \vec{u} \in \text{Im}(\vec{f} - \text{id}_E) \\ &\iff \overrightarrow{Mf(M)} = \vec{u} + \vec{v}, \quad \text{avec } \vec{v} \in \text{Im}(\vec{f} - \text{id}_E). \end{aligned}$$

3. D'après ce qui précède, on a simultanément $f = t_{\vec{u}} \circ g = g \circ t_{\vec{u}}$ et $\text{Inv}(g) \neq \emptyset$ si et seulement si $\overrightarrow{Mf(M)} = \vec{u} + \vec{v}$ avec $\vec{u} \in \ker(\vec{f} - \text{id}_E)$ et $\vec{v} \in \text{Im}(\vec{f} - \text{id}_E)$. Mais cette condition est bien vérifiée puisque $E = \ker(\vec{f} - \text{id}_E) + \text{Im}(\vec{f} - \text{id}_E)$. Comme en fait cette somme est aussi directe, on obtient au passage l'unicité du vecteur $\vec{u}$, donc de la translation $t = t_{\vec{u}}$ et de l'application $g = t_{-\vec{u}} \circ f$. Enfin $\vec{g} = \vec{f}$, donc $\text{Inv}(g)$ est bien un sous-espace de direction $\text{Inv}(\vec{g}) = \text{Inv}(\vec{f})$.

**Définition 1.75**

Lorsqu'elle existe, l'écriture $f = t \circ g = g \circ t$ fournie par le théorème précédent s'appelle la *décomposition canonique* de f .

On retiendra d'elle qu'elle est unique et commutative; aussi que le vecteur de la translation n'est pas anodin.

1.5.3 Forme affine**Définition 1.76**

Soit $\mathcal{E}$ un $\mathbb{K}$ -espace affine avec $\mathbb{K}$ muni de sa structure affine canonique. On appelle *forme affine* sur $\mathcal{E}$ toute application affine $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{K}$.

LES GRANDS THÉORÈMES

Dans cette section nous présentons les grands théorèmes de la géométrie affine. Ce sont les théorèmes de Désargues, Pappus, Thalès, Gergonne, Céva et Ménélaüs.

2.1 Mesure algébrique

Soit $\mathcal{D}$ une droite affine passant par $A \in \mathcal{E}$ et dirigé par $\vec{u} \in E$. Si $M, N \in \mathcal{D}$ alors il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tels que

$$\overrightarrow{AM} = \alpha \vec{u} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AN} = \beta \vec{u}.$$

On a

$$\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} = (\alpha - \beta) \vec{u} = \overrightarrow{NM} \vec{u}$$

avec $\overrightarrow{NM} = \alpha - \beta = x_M - x_N$.

Le scalaire $x_M - x_N$ est appelé la **mesure algébrique** du segment $[NM]$. Elle ne dépend pas de l'origine choisie sur $\mathcal{D}$.

Soit P, Q et R trois points de $\mathcal{D}$ avec $R \neq Q$. Le rapport $\frac{\overline{RP}}{\overline{RQ}}$ ne dépend pas du repère choisi sur $\mathcal{D}$.

Si $\frac{\overline{RP}}{\overline{RQ}} = \alpha$ où $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, on dit que le point R divise le segment $[QP]$ dans le rapport α . Si $\alpha \neq 1$ alors il existe un et un seul point divisant le segment $[QP]$ dans le rapport α .

Proposition 2.1

Soient P, Q et R trois points distincts d'une droite affine $\mathcal{D}$ d'un espace affine $\mathcal{E}$ et $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ une application affine de $\mathcal{E}$ dans un espace affine $\mathcal{E}'$. En posant $P' = f(P)$, $Q' = f(Q)$ et $R' = f(R)$, on a :

1. P', Q' et R' appartiennent à $\mathcal{D}' = f(\mathcal{D})$.
2. Si $R \neq Q$ et $R' \neq Q'$ alors $\frac{\overline{RP}}{\overline{RQ}} = \frac{\overline{R'P'}}{\overline{R'Q'}}$. On peut faire plusieurs autres permutations des points si f est injective.

NB Observer que les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ de la proposition ne sont pas nécessairement parallèles.

Définition 2.2

Soient P, Q, R et S quatre points distincts d'un espace affine $\mathcal{E}$. On appelle **birapport** de ces quatre points le rapport

$$\frac{\overline{RP}}{\overline{RQ}} \times \frac{\overline{SQ}}{\overline{SP}}$$

On l'appelle également le **rapport anharmonique**.

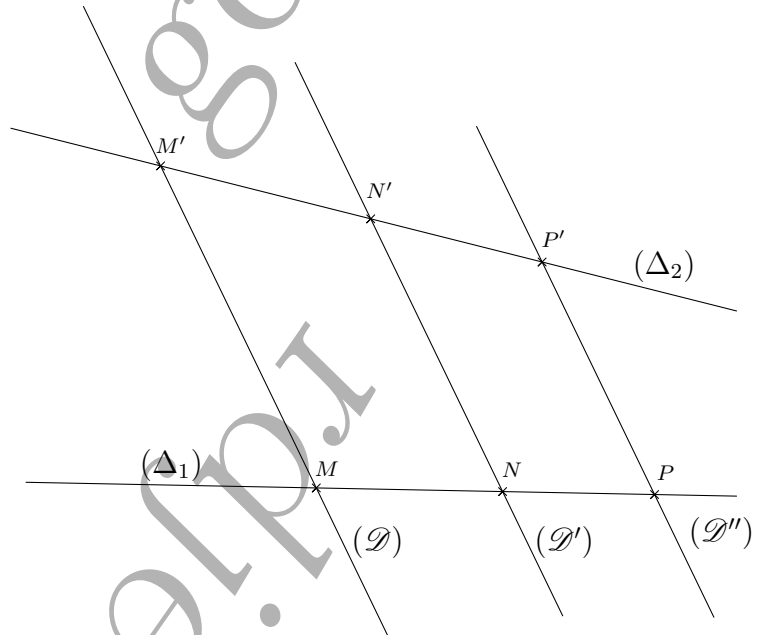
Si ce rapport est égal à -1 , on dit que les quatre points P, Q, R et S forment une division harmonique

2.2 Les théorèmes

Théorème 2.3 (Thalès $-625 \sim -524$)

Soit $(\mathcal{D}), (\mathcal{D}')$ et $(\mathcal{D}'')$ trois droites parallèles distinctes. Soit $(\Delta_1), (\Delta_2)$ deux droites non parallèles aux trois premières. On désigne par M, N et P les points d'intersection de (Δ_1) avec $(\mathcal{D}), (\mathcal{D}')$ et $(\mathcal{D}'')$ respectivement puis par M', N' et P' les points d'intersection de (Δ_2) avec $(\mathcal{D}), (\mathcal{D}')$ et $(\mathcal{D}'')$ respectivement. Alors on a :

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{MP}} = \frac{\overline{M'N'}}{\overline{M'P'}}.$$



Preuve.

Soit p la projection sur (Δ_2) parallèlement à $(\mathcal{D})$. On a

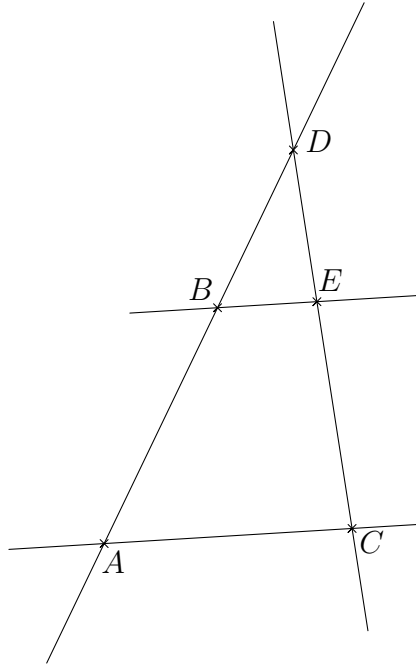
$$p(M) = M', \quad p(N) = N' \quad \text{et} \quad p(P) = P'.$$

Comme M, N et P sont alignés alors il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\overrightarrow{MP} = \alpha \overrightarrow{MN}$ i.e $\frac{\overline{MP}}{\overline{MN}} = \alpha$. Par ailleurs,

$$\overrightarrow{M'P'} = \overrightarrow{p(M)p(P)} = \overrightarrow{p}(\overrightarrow{MP}) = \overrightarrow{p}(\alpha \overrightarrow{MN}) = \alpha \overrightarrow{p(M)p(N)} = \alpha \overrightarrow{M'N'}$$

d'où $\frac{\overline{M'P'}}{\overline{M'N'}} = \alpha$. On en déduit l'égalité des rapports.



Théorème 2.4 (*Réciproque de Thalès*)

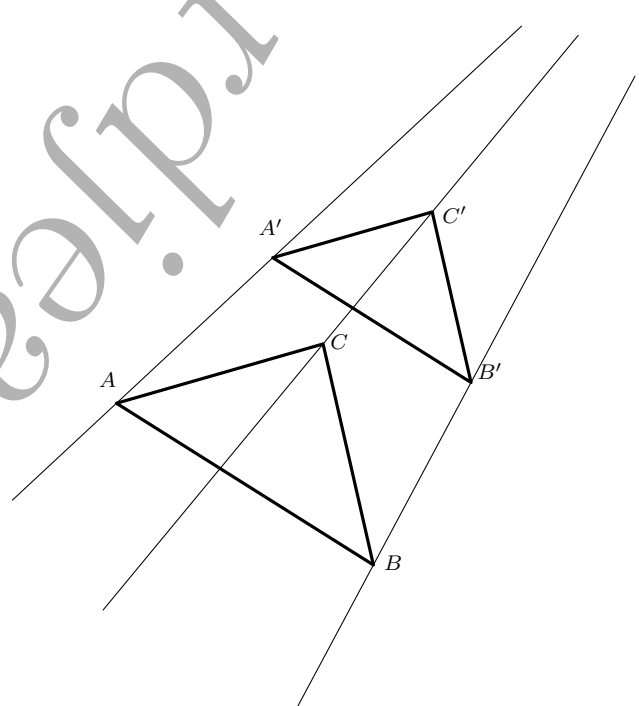
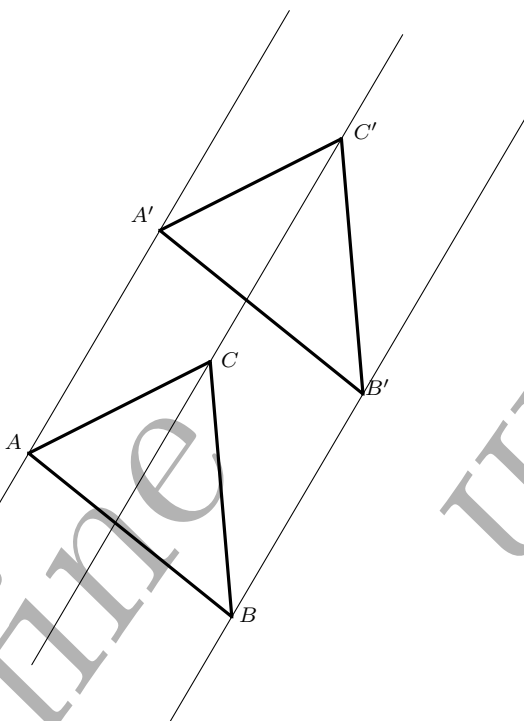
Une variante du théorème de Thalès est de supposer l'égalité des rapports

$$\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{DE}}$$

pour conclure que les droites (AC) et (BE) sont parallèles. Cette variante est souvent appelée la réciproque du théorème de Thalès.

Théorème 2.5 (*Désargues*)

Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles dans le plan affine, sans sommets communs et tels que $(AB) \parallel (A'B')$, $(BC) \parallel (B'C')$ et $(CA) \parallel (C'A')$. Alors les droites (AA') , (BB') et (CC') sont parallèles ou concourantes. Réciproquement, si $(AB) \parallel (A'B')$, $(BC) \parallel (B'C')$ et (AA') , (BB') , (CC') parallèles ou concourantes alors $(AC) \parallel (A'C')$.



Preuve.

1^{er} cas : Supposons que les droites (AA') et (BB') se coupent en O . Montrons que (CC') passe

aussi par O . Considérons l'homothétie h de centre O telle que $h(A) = A'$. $(AB) \parallel (A'B')$ donc $h(AB) = A'B'$. De plus (O, B, B') alignés, donc $h(B) = B'$. $(BC) \parallel (B'C')$ donc $h(BC) = B'C'$. $(AC) \parallel (A'C')$ donc $h(AC) = (A'C')$. L'image de l'intersection C de (AC) et de (BC) est l'intersection de $(A'C')$ et $(B'C')$ donc C' . Ainsi, O, C et $C' = h(C)$ sont donc alignés.

2^{ème} cas : Si (AA') et (BB') sont parallèles. Alors, on fait la même démonstration en prenant la translation t telle que $t(A) = A'$.

Pour la réciproque, la démonstration consiste à utiliser la même homothétie ou translation. ■

Théorème 2.6 (Désargues)

Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles dans l'espace projectif, sans sommets communs et tels que les droites (AA') , (BB') , (CC') soient distinctes. On note : $P = (BC) \cap (B'C')$, $Q = (CA) \cap (C'A')$ et $R = (AB) \cap (A'B')$. Alors P, Q et R sont alignés si et seulement si (AA') , (BB') et (CC') sont concourantes.

Preuve.

Si on est dans l'espace projectif de dimension 2, on passe du plan projectif au plan affine en choisissant la droite (PQ) comme droite de l'infini. Alors l'équivalence de l'énoncé est traduite par le théorème version affine.

Supposons l'espace projectif de dimension ≥ 3 . Si les droites (AA') , (BB') , (CC') sont concourantes, considérons les plans π défini par ABC et π' par $A'B'C'$, $\pi = \pi'$. Soit $\Delta = \pi \cap \pi'$. Alors $(AB) \subset \pi$, $(A'B') \subset \pi'$ donc $R = (AB) \cap (A'B') \in \Delta$. De même pour P et Q .

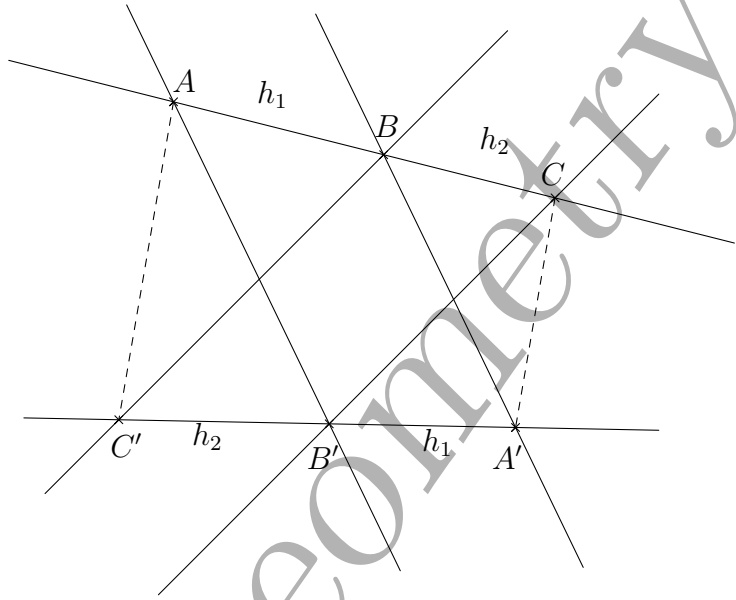
Réciproquement, si les points P, Q et R sont alignés, (RA) et (RA') déterminent un plan, dans ce plan les droites (AA') et (BB') se coupent en un point O . Considérons la perspective ω (c'est-à-dire la projection de centre O sur le plan π')

$$\omega(P) = P \quad \omega(Q) = Q \quad \omega(R) = R, \quad \omega(A) = A', \quad \omega(B) = B'.$$

Donc $\omega((AQ)) = (A'Q)$ et $\omega((BP)) = (B'P)$. Ainsi : $\omega(C) = \omega((AQ) \cap (BP)) = (A'Q) \cap (B'P) = C'$ ■

Théorème 2.7 (Pappus)

Soient $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ deux droites affines distinctes dans un plan affine, dont le corps associé est commutatif. Soient A, B, C appartenant $(\mathcal{D})$ et A', B', C' appartenant $(\mathcal{D}')$ tels que $(AB') \parallel (A'B)$ et $(BC') \parallel (B'C)$. Alors, $(CA') \parallel (C'A)$.



Preuve.

1^{er} cas : Supposons que $(\mathcal{D})$ est non parallèle à $(\mathcal{D}')$. Posons $\{O\} = (\mathcal{D}) \cap (\mathcal{D}')$. Soit h_1 l'homothétie de centre O telle que $h_1(A) = B$. Soit h_2 l'homothétie de centre O telle que $h_2(B) = C$. Alors $h_1(B') = A'$ (car $(AB') \parallel (BA')$) et $h_2(C') = B'$ car $(BC') \parallel (B'C)$. Comme $\mathbb{K}$ est un corps commutatif, $h_1 \circ h_2 = h_2 \circ h_1$. Posons h_3 cette homothétie. $h_3(A) = h_2 \circ h_1(A) = h_2(B) = C$. $h_3(C') = h_1 \circ h_2(C') = h_1(B') = A'$. Finalement (AC') a pour image $(A'C)$. L'homothétie conserve le parallélisme, d'où le résultat.

2^{ème} cas : Supposons $(\mathcal{D})$ parallèle à $(\mathcal{D}')$. On procède de la même manière en composant les translations de vecteur $AB = B'A'$ et $BC = C'B'$. On a alors : $AC = AB + BC = B'A' + C'B' = C'A'$ donc $AC = C'A'$. Finalement, $(AC') \parallel (A'C)$.



Théorème 2.8 (Pappus)

Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites projectives distinctes dans le plan projectif. Supposons que A, B et C appartiennent à $\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}'$ et A', B' et C' appartiennent à $\mathcal{D}' \setminus \mathcal{D}$, A, B et C distincts deux à deux, A', B' et C' distincts deux à deux. Alors les points $(AB') \cap (A'B)$, $(BC') \cap (B'C)$ et $(CA') \cap (C'A)$ sont alignés.

Preuve.

On note : $\alpha = (AB') \cap (A'B)$, $\beta = (BC') \cap (B'C)$, $\gamma = (CA') \cap (C'A)$. On passe du plan projectif au plan affine en choisissant la droite $(\alpha\beta)$ comme droite à l'infini. On obtient alors dans le plan affine : $(AB') \parallel (A'B)$ et $(BC') \parallel (B'C)$. On applique le théorème de Pappus dans le cas affine : $(CA') \parallel (C'A)$. On repasse à l'espace projectif par complétion projective du plan affine. Donc $\gamma = (CA') \cap (C'A)$ appartient à la droite des points de l'infini, c'est-à-dire la droite projective $(\alpha\beta)$. Finalement, α, β et γ sont alignés.



Lemme 2.9

Trois points A , B et C éléments de $\mathcal{E}$ sont alignés si et seulement si il existe un triplet de scalaires (α, β, γ) , non tous nuls tels que

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha A + \beta B + \gamma C = 0. \end{cases}$$

Preuve.

Si C appartient à la droite (AB) , il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB} \iff C - A = \lambda B - \lambda A \iff (1 - \lambda)A + \lambda B - C = 0$$

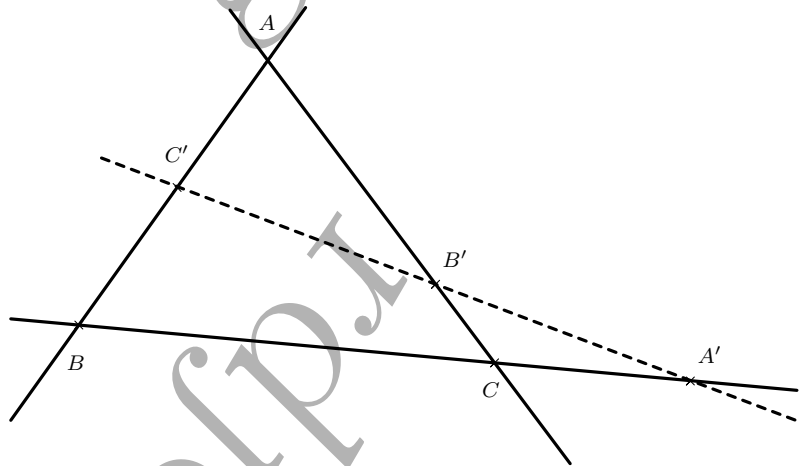
On peut alors prendre $\alpha = 1 - \lambda$, $\beta = \lambda$ et $\gamma = -1$. Réciproquement, si $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$ vérifie le système de la proposition, alors, si par exemple $\gamma \neq 0$, alors on a $C = -\frac{\alpha}{\gamma}A - \frac{\beta}{\gamma}B$. Puisque $-\frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\beta}{\gamma} = 1$ alors le point C est une combinaison affine des points A et B ; par conséquent, les points A , B , C sont alignés. $\blacksquare$

Théorème 2.10 (Menelaüs)

Soient un triangle non aplati ABC et trois points A' , B' et C' choisis respectivement sur (BC) , (CA) et (AB) et distincts des sommets du triangle ABC .

Les points A' , B' et C' sont alignés si et seulement si $\frac{\overline{BA'}}{\overline{CA'}} \frac{\overline{CB'}}{\overline{AB'}} \frac{\overline{AC'}}{\overline{BC'}} = 1$.

La droite déterminée par A' , B' et C' est appelée une *ménélienne* du triangle ABC .



Preuve.

$$A' \in (BC) \iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{K} \text{ tels que } \alpha \overrightarrow{A'B} + \beta \overrightarrow{A'C} = \vec{0} \iff \frac{\overline{BA'}}{\overline{CA'}} = -\frac{\beta}{\alpha}$$

$$B' \in (AC) \iff \exists \gamma, \kappa \in \mathbb{K} \text{ tels que } \gamma \overrightarrow{B'A} + \kappa \overrightarrow{B'C} = \vec{0} \iff \frac{\overline{AB'}}{\overline{CB'}} = -\frac{\kappa}{\gamma}$$

$$C' \in (AB) \iff \exists \mu, \nu \in \mathbb{K} \text{ tels que } \mu \overrightarrow{C'A} + \nu \overrightarrow{C'B} = \vec{0} \iff \frac{\overline{AC'}}{\overline{BC'}} = -\frac{\nu}{\mu}$$

Par ailleurs, en raisonnant dans le repère affine (A, B, C) on a :

$$A' \in (BC) \iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{K} \text{ tels que } A' = \alpha B + \beta C \iff A' \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix},$$

$$B' \in (AC) \iff \exists \gamma, \kappa \in \mathbb{K} \text{ tels que } B' = \gamma A + \kappa C \iff B' \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \\ \kappa \end{pmatrix},$$

$$C' \in (AB) \iff \exists \mu, \nu \in \mathbb{K} \text{ tels que } C' = \mu A + \nu B \iff A' \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il s'en suit que

$$A', B' \text{ et } C' \text{ sont alignés} \iff \begin{vmatrix} 0 & \gamma & \mu \\ \alpha & 0 & \nu \\ \beta & \kappa & 0 \end{vmatrix} = \alpha\kappa\mu + \beta\gamma\nu = 0 \iff \alpha\kappa\mu = -\beta\gamma\nu.$$

Or

$$-\frac{\beta\gamma\nu}{\alpha\kappa\mu} = \frac{\overline{BA'} \overline{CB'} \overline{AC'}}{\overline{CA'} \overline{AB'} \overline{BC'}} \quad (2.2.1)$$

donc

$$A', B' \text{ et } C' \text{ sont alignés} \iff \frac{\overline{BA'} \overline{CB'} \overline{AC'}}{\overline{CA'} \overline{AB'} \overline{BC'}} = 1$$



Proposition 2.11

Soient un triangle non aplati ABC et trois points A' , B' et C' choisis respectivement sur (BC) , (CA) et (AB) et distincts des sommets du triangle ABC . Alors les points A' , B' et C' sont alignés

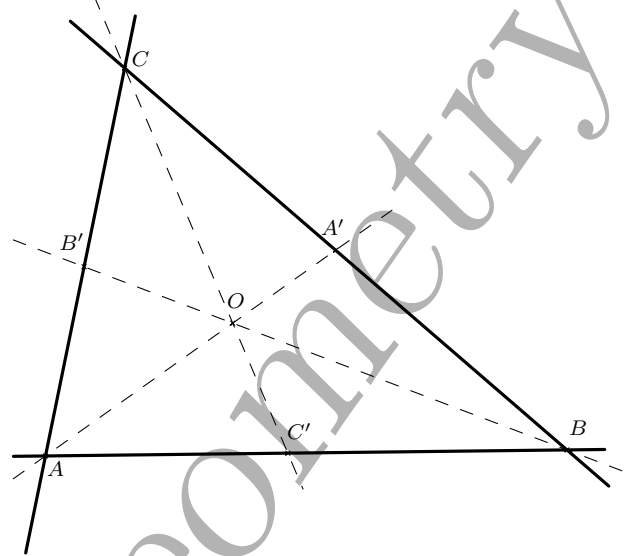
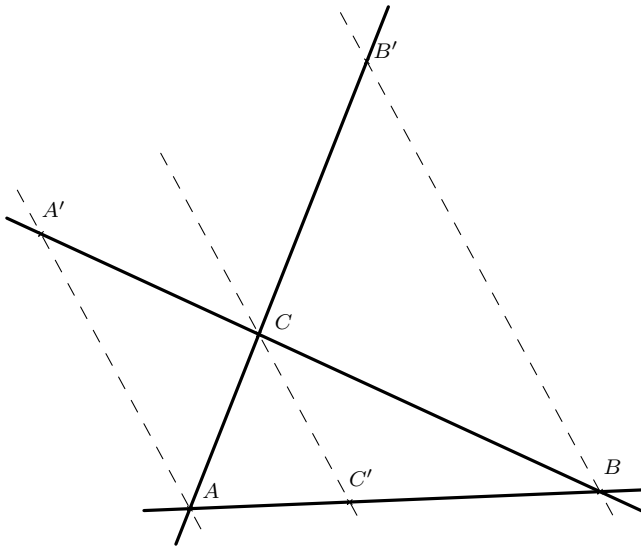
$$\sigma_{A,B}(C')\sigma_{B,C}(A')\sigma_{C,A}(B') = -1$$

$$\text{où } \sigma_{A,B}(C') = \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}}$$

Théorème 2.12 (Ceva 1647 ~ 1734)

Soient un triangle non aplati ABC et trois points A' , B' et C' choisis respectivement sur (BC) , (CA) et (AB) et distincts des sommets du triangle ABC . Alors les droites (AA') , (BB') et (CC') sont parallèles ou concourantes si et seulement si

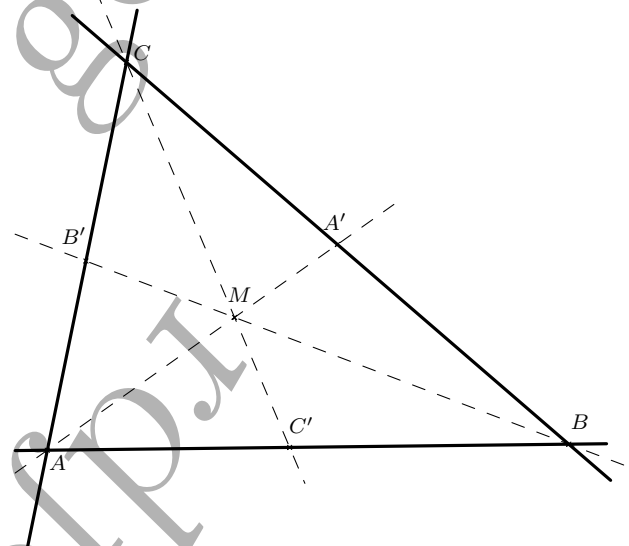
$$\frac{\overline{BA'} \overline{CB'} \overline{AC'}}{\overline{CA'} \overline{AB'} \overline{BC'}} = -1.$$



Théorème 2.13 (Gergonne)

Soient un triangle non aplati ABC et trois points A' , B' et C' choisis respectivement sur (BC) , (CA) et (AB) et distincts des sommets du triangle ABC . Si les droites (AA') , (BB') et (CC') sont concourantes en M alors

$$\frac{\overline{MA'}}{\overline{AA'}} + \frac{\overline{MB'}}{\overline{BB'}} + \frac{\overline{MC'}}{\overline{CC'}} = 1$$



2.3 Quelques exercices

Exercice 2.1

Soit $(A_0, \dots, A_n)$ un repère affine d'un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension n et A'_0 un point de $\mathcal{E}$ n'appartenant pas à l'hyperplan affine H engendré par $A_1, \dots, A_n$.

1. Montrer qu'il existe une transformation affine f de $\mathcal{E}$ et une seule qui laisse fixe tout point de $\mathcal{H}$ et transforme A_0 en A'_0 .
2. On suppose que A'_0 n'appartient pas à l'hyperplan affine $\mathcal{H}'$ parallèle à $\mathcal{H}$ passant par A_0 . Montrer que f est une affinité de base $\mathcal{H}$ dont on précisera la direction.
3. On suppose que A'_0 appartient à l'hyperplan affine $\mathcal{H}'$ parallèle à $\mathcal{H}$ passant par A_0 . Montrer qu'il existe une fonction (forme) affine φ sur $\mathcal{E}$ qui est nulle sur $\mathcal{H}$ telle que $\overrightarrow{Mf(M)} = \varphi(M)\overrightarrow{A_0A'_0}$ pour tout point M de $\mathcal{E}$.

4. On suppose que $\mathcal{E}$ est un plan. Donner, dans chacun des deux cas précédents, une construction géométrique de l'image $M' = f(M)$ d'un point M de $\mathcal{E}$ par f .

Exercice 2.2

Soit $A = (6, 0, 1)$, $B = (5, 1, 1)$ et $C = (7, -1, 1)$.

GROUPE CLASSE

3.1 Groupes linéaires – Groupes spéciaux linéaires

Soit $\mathbb{K}$ un corps ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$) et soit E un $\mathbb{K}$ -e.v de dimension finie n .

3.1.1 Dilatations et transvections

Soit H un hyperplan de E ; i.e H est un s.e.v de E de dimension $n - 1$. On s'intéresse aux endomorphismes de E qui préservent H . Les résultats suivants affirment qu'il y en a de deux sortes.

Théorème 3.1

Soit $f \in \text{End}(E)$, $f \neq \text{id}_E$ qui fixe les vecteurs de H . Alors

1. soit f est diagonalisable, de valeurs propres 1 et $\lambda \neq 1$;
2. soit f est non diagonalisable et admet 1 pour seule valeur propre.

Preuve.

Puisque f fixe des vecteurs de H , i.e qu'il existe des vecteurs $u \in H \subset E$ avec $f(u) = u$ alors 1 est une valeur propre de f . Et comme H est formé de vecteurs invariants par f , le sous espace propre E_1 associé à la valeur propre 1 est au moins de dimension $n - 1$ et $(x - 1)^{n-1}$ est un facteur du polynôme caractéristique $P_f(x)$ de f . On a donc,

$$P_f(x) = (-1)^n (x - 1)^{n-1} (x - \lambda).$$

Ainsi, si $\lambda \neq 1$, il existe une droite propre E_λ et dans ce cas f est diagonalisable; par suite $E = H \oplus E_\lambda$.

Si par contre $\lambda = 1$ alors on a deux cas :

- $E_1 = E$ alors $f = \text{id}_E$ et par conséquent f est diagonalisable;
- $E_1 = H$ alors f est non diagonalisable.



Définition 3.2

Soit $f \in \text{End}(E)$ qui fixe les vecteurs de H et $f \neq \text{id}_E$.

- Si f est diagonalisable de valeurs propres 1 et $\lambda \neq 1$, on dit que f est une dilatation de rapport λ d'hyperplan H et de direction E_λ .
- Si f est non diagonalisable et n'admet que 1 comme valeur propre, on dit que f est une transvection.

3.1.1.1 Représentations matricielles

- Si f est une *dilatation* différente de l'identité, on note $(e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$ une base de H et e_n une base de E_λ . Dans la base $(e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, e_n)$ de $E = H \oplus E_\lambda$, la matrice de f s'écrit :

$$\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (3.1.1)$$

où I_{n-1} désigne la matrice unité d'ordre $n-1$.

Généralement, si on désigne par $\mathcal{B}$ la base canonique obtenue en complétant une base de H par le vecteur propre de la valeur propre λ (on pourra recourir au procédé d'orthogonalisation de Gram Schmidt) on a relativement à $\mathcal{B}$ la matrice représentative d'une dilatation

$$D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)M_{ii} \quad (3.1.2)$$

où M_{ii} est la matrice élémentaire ayant 1 à la ligne i et colonne i .

- Si f est une *transvection*, $H = E_1$ est de dimension $n-1$, donc $\dim \operatorname{Im}(f - id_E) = 1$. Soit $a \in \operatorname{Im}(f - id_E)$, alors $a = f(b) - b$ avec $b \notin H$ et

$$f(a) = f(f(b) - b) = f(f(b)) - f(b) = (f - id_E)(f(b)) \in \operatorname{Im}(f - id_E).$$

Puisque $\dim \operatorname{Im}(f - id) = 1$, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(a) = \lambda a$. Comme 1 est la seule valeur propre, on doit donc avoir $\lambda = 1$ et par suite $a \in H$. Il apparaît donc que $\operatorname{Im}(f - id) \subset H = \ker(f - id_E)$. Prenons $a = e_{n-1}$, $b = e_n$ et $(e_1, \dots, e_{n-2})$ de sorte que $(e_1, \dots, e_{n-1})$ soit une base de H . La matrice de f dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} I_{n-2} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Généralement, si on désigne par $\mathcal{B}$ la base canonique de E toute matrice de la forme

$$T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda M_{ij} \quad (3.1.3)$$

où M_{ij} est la matrice élémentaire ayant 1 à la ligne i et colonne j avec $1 \leq i \neq j \leq n$ est la matrice d'une transvection.

Toutes les formes linéaires sur E de noyau H sont proportionnelles, on choisit celle qui prend la valeur 1 en b , disons $\varphi : \varphi(b) = 1$. Tout $x \in E = H \oplus \operatorname{Vect}(b) = \mathbb{K}b \oplus H$ peut s'écrire $x = x_1 + \alpha b$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$. Comme $\varphi(x) = \varphi(x_1) + \alpha\varphi(b) = 0 + \alpha * 1 = \alpha$, on a $x = x_1 + \varphi(x)b$. Il suit donc

$$f(x) = f(x_1) + \varphi(x)f(b) = x_1 + \varphi(x)(a + b) = x + \varphi(x)a.$$

Réciproquement, si φ est une forme linéaire nulle pour le vecteur a non nul, la transformation définie par $\mathcal{T}_{\varphi,a}(x) = x + \varphi(x)a$ est une transvection d'hyperplan le noyau H de φ . Il n'y a pas unicité de cette écriture

$$(\mathcal{T}_{\varphi_1,a_1} = \mathcal{T}_{\varphi_2,a_2}) \iff \left(\exists \alpha \in \mathbb{K}^* ; \varphi_2 = \alpha\varphi_1 \quad \text{et} \quad a_2 = \frac{1}{\alpha}a_1 \right).$$

3.1.2 Groupe spécial linéaire

On rappelle que les automorphismes linéaires de E forment un groupe noté $GL(E)$. C'est le groupe linéaire général.

Définition 3.3

On appelle *groupe spécial linéaire*, le sous ensemble noté $SL(E)$ de $GL(E)$ et formé des automorphismes de déterminant égal à 1.

Proposition 3.4

$SL(E)$ est un sous groupe distingué de $GL(E)$. Le quotient $GL(E)/SL(E)$ est isomorphe à $(\mathbb{K}^*, \times)$

Théorème 3.5

- $SL(E)$ est engendré par les transvections
- $GL(E)$ est engendré par les transvections et les dilatations.

Proposition 3.6

1. Le conjugué d'une transvection de E par un automorphisme de E est une transvection.
2. Toute les transvections de E sont conjuguées.

Rappelons qu'une homothétie de E est un endomorphisme φ de E qui est proportionnelle à id_E : $\varphi = k id_E$ avec $k \in \mathbb{K}$.

Proposition 3.7

Le centre de $GL(E)$ est formé des homothéties : $Z(GL(E)) = \{\text{homothéties de } E\}$

3.2 Groupe orthogonal ou groupe des isométries

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n i.e un espace vectoriel muni d'un produit scalaire disons $\langle \cdot, \cdot \rangle$, de dimension finie n . On s'intéresse à l'ensemble des automorphismes (endomorphismes bijectifs) de E qui préservent le produit scalaire.

3.2.1 Généralités

Définition 3.8

On appelle *transformation orthogonale ou isométrie* de E tout élément $f \in GL(E)$ tel que

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in E.$$

On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des isométries de E .

Théorème 3.9

Les conditions suivantes sont équivalentes.

1. $f \in \mathcal{O}(E)$
2. $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$ où $\|\cdot\|$ est la norme induite par le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
3. L'image par f d'une base orthonormale est une base orthonormale.

Preuve.

1° $\implies$ 2° évident car si f préserve le produit scalaire, elle préserve la norme aussi.

2° $\implies$ 1° Supposons que f préserve la norme. Alors pour tous $x, y \in E$, on a :

$$\begin{aligned}
 \langle f(x), f(y) \rangle &= \frac{1}{4} \left(\|f(x) + f(y)\|^2 - \|f(x) - f(y)\|^2 \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left(\|f(x+y)\|^2 - \|f(x-y)\|^2 \right) \text{ car } f \text{ est linéaire} \\
 &= \frac{1}{4} \left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \right) \text{ car } f \text{ préserve la norme} \\
 &= \langle x, y \rangle \text{ formule de polarisation}
 \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

1° $\implies$ 3° Si f préserve le produit scalaire et la norme, alors f transforme une base orthonormée en une base orthonormée.

3° $\implies$ 1° ou 2° Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base orthonormée de E et f une application linéaire de E telle que $(f(e_i))_{1 \leq i \leq n}$ soit une base orthonormée. Alors, pour tout $x \in E$

$$\|f(x)\|^2 = \left\| f \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i \right) \right\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) \right\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \|x\|^2.$$

■

Proposition 3.10

L'ensemble $\mathcal{O}(E)$ est un sous groupe de $GL(E)$.

Preuve.

En effet, si $f, g \in \mathcal{O}(E)$ alors $\forall x \in E$

- $\|f \circ g(x)\| = \|f(g(x))\| = \|g(x)\| = \|x\|$;
- $\|f^{-1}(x)\| = \|f(f^{-1}(x))\| = \|f \circ f^{-1}(x)\| = \|x\|$;

■

Soit $f \in \mathcal{O}(E)$ et O la matrice de M_f la matrice de f dans une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E . La matrice M_f est alors une matrice orthogonale i.e. ${}^t M_f M_f = I_n$. Puisque M_f est une matrice carrée, on a donc

$$\det({}^t M_f M_f) = \det({}^t M_f) \times \det M_f = (\det M_f)^2 = \det I_n = 1$$

on en déduit donc que $\det M_f = \pm 1$.

Il est facile vérifier que l'ensemble des transformations orthogonales de déterminant égal à 1 est un sous-groupe distingué de $\mathcal{O}(E)$.

Définition 3.11

On appelle **groupe spécial orthogonal** et on note $SO(E)$, le sous-groupe de $\mathcal{O}(E)$ formé des transformations orthogonales (isométries) de déterminant égal à 1.

Un élément de $SO(E)$ est appelé une **isométrie vectorielle directe** ou **transformation orthogonale directe**.

Exemple 3.1

Si $\dim(E) = 1$, $\mathcal{O}(E) = \{\pm id_E\}$ et $SO(E) = \{id_E\}$

3.2.2 Images de sous-espaces vectoriels

Une propriété particulière utile des transformations orthogonales est la suivante permettant de décrire une isométrie en se restreignant à des sous-espaces.

Soient F est un sous-espace vectoriel de E et f une transformation de E . On appelle **supplémentaire orthogonal** de F ou simplement **l'orthogonal** de F (par rapport au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$) et on note $F^\perp$ le sous espace de E défini par $F^\perp = \{x \in E ; \langle x, y \rangle = 0 \forall y \in F\}$. On dit que F est stable par f si $f(F) = F$.

Proposition 3.12

Soit $f \in \mathcal{O}(E)$ et F un s.e.v de E . Si F est stable par f alors son supplémentaire orthogonal est aussi stable par f .

Preuve.

On a

$$0 = \langle F, F^\perp \rangle = \langle f(F), f(F^\perp) \rangle = \langle F, f(F^\perp) \rangle$$

donc $f(F^\perp) \subset F^\perp$. Comme f est bijective, on a $f(F^\perp) = F^\perp$. ▀

Proposition 3.13

Si $f \in \mathcal{O}(E)$ alors $\ker(f - id_E) \perp \text{Im}(f - id_E) = E$ (somme orthogonale).

Preuve.

Soit $x \in \ker(f - id_E)$ et $y \in \text{Im}(f - id_E)$. Il existe $z \in E$ tel que $y = f(z) - z$ et

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \langle x, f(z) - z \rangle = \langle x, f(z) \rangle - \langle x, z \rangle \\ &= \langle f(x), f(z) \rangle - \langle x, z \rangle \quad \text{car } x \in \ker(f - id_E) \text{ i.e } x = f(x) \\ &= \langle x, z \rangle - \langle x, z \rangle \quad \text{car } f \text{ est orthogonal} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Ainsi $\ker(f - id_E)$ et $\text{Im}(f - id_E)$ sont orthogonaux. De plus, le théorème du rang permet de conclure qu'ils sont supplémentaires. ▀

3.3 Réflexions vectorielles

Soit E un espace vectoriel.

Définition 3.14

On appelle *symétrie de E* tout endomorphisme s de E tel que $s \circ s = id_E$ i.e tout endomorphisme involutif de E .

Considérons deux s.e.v supplémentaires F et G de E i.e tels que $E = F \oplus G$. Alors tout $x \in E$ s'écrit de façon unique comme $x = y + z$, avec $y \in F$ et $z \in G$.

Définition 3.15

On appelle *symétrie de E par rapport à F parallèlement à (dans la direction de) G* ou encore *symétrie de E de base F et de direction G* , l'application souvent noté s_F

$$\begin{aligned} s_F : \quad E &\longrightarrow E \\ x = y + z &\longmapsto y - z \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

On suppose désormais que E est un espace vectoriel euclidien de structure euclidienne $\langle \cdot, \cdot \rangle$: produit scalaire sur E .

On appelle *symétrie orthogonale de E par rapport à F* toute symétrie de E par rapport à F parallèlement à $F^\perp$.

Définition 3.16

On appelle *symétrie orthogonale de E par rapport à F* toute symétrie de E par rapport à F parallèlement à $F^\perp$.

Proposition 3.17

1. Un automorphisme involutif de E est une isométrie ssi il est une symétrie par rapport à un s.e.v F parallèlement à son orthogonal $F^\perp$.
2. Une symétrie par rapport à un s.e.v F parallèlement à $F^\perp$ est un élément de $SO(E)$ lorsque $\text{codim} F$ est paire.

Preuve.

1. Posons $E = F \oplus F'$ et considérons la symétrie s par rapport à F parallèlement à F' . Alors pour tout $x = x_1 + x_2 \in F \oplus F'$, on a

$$\|s(x)\|^2 - \|x\|^2 = \|x_1 - x_2\|^2 - \|x_1 + x_2\|^2 = -4 \langle x_1, x_2 \rangle.$$

Ainsi, s sera une transformation orthogonale ssi $\langle x_1, x_2 \rangle = 0$ pour tous $x_1 \in F$ et $x_2 \in F'$ c'est-à-dire si $F' = F^\perp$.

2. L'écriture de s dans une base de diagonalisation prouve que le déterminant de s est $(-1)^{n-\dim F}$. En effet, dans une telle base (orthonormée), la matrice de s s'écrit :

$$\begin{pmatrix} I_{\dim F} & 0 \\ 0 & -I_{n-\dim F} \end{pmatrix}.$$



Définition 3.18

- On appelle **réflexion** toute symétrie s par rapport à un hyperplan F suivant $F^\perp$.
- On appelle **retournement** toute symétrie par rapport à un s.e.v. F de codimension 2 suivant $F^\perp$.

Remarque 3.19

- De la proposition précédente, on tire que
- les réflexions sont des éléments de $\mathcal{O}^-(E)$
 - les retournements sont des éléments de $SO(E)$.

Théorème 3.20

1. Le groupe $\mathcal{O}(E)$ est engendré par les réflexions ; et toute isométrie f peut s'écrire comme composée de k réflexions avec $k = n - \dim(\ker(f - id_E))$.
2. Le groupe $SO(E)$ est engendré par les retournement quand $\dim E \geq 3$

3.4 Dimension 2

On a vu que si E est de dimension 1, le groupe orthogonal est $\mathcal{O}(E) = \{-id_E, id_E\}$. En dimension 2, il contient plus d'éléments.

Soit donc E un espace vectoriel de dimension 2.

3.4.1 Rotations et réflexions planes

Théorème 3.21

- Le groupe $SO(E)$ est abélien ; ses éléments sont appelés les rotations
- $\mathcal{O}^-(E)$ est formé de toutes les réflexions.

3.4.2 Matrices orthogonales

Proposition 3.22

1. Les éléments de $SO(E)$ sont représentées dans une base orthonormale par la matrice de la forme

$$M = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

2. Les éléments de $\mathcal{O}^-(E)$ sont représentées dans une base orthonormale par la matrice de la forme

$$M = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Preuve.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base orthonormée de E . On note $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ la matrice de $f \in \mathcal{O}(E)$ dans $\mathcal{B}$.

Puisque f préserve la norme, le vecteur $f(e_1)$ est unitaire et donc $a^2 + b^2 = 1$. On peut donc écrire $a = \cos \alpha$ et $b = \sin \alpha$ pour un certain α . Comme $f(e_1)$ et $f(e_2)$ sont orthogonaux on doit avoir $ac + bd = \begin{vmatrix} a & -d \\ b & c \end{vmatrix} = 0$; donc le vecteur (a, b) est proportionnel au vecteur $(-d, c)$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(a, b) = \lambda(-d, c)$. Comme le vecteur (c, d) est unitaire alors le vecteur $(-d, c)$ est aussi unitaire; donc $\lambda = \pm 1$. Précisément, on a $(a, b) = (-d, c)$ ou $(a, b) = (d, -c)$ que l'on peut encore écrire :

1. $(d, c) = (-a, b) = (-\cos \alpha, \sin \alpha)$
2. ou bien $(d, c) = (a, -b) = (\cos \alpha, -\sin \alpha)$

Dans le premier cas, la matrice est de déterminant égal à 1, c'est la matrice d'un élément de $\mathcal{SO}(E)$; dans le second cas, la matrice d'une réflexion. ▀

$$\text{On note } \mathcal{SO}(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\} \text{ et } \mathcal{O}^-(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

3.4.3 Orientation du plan

Soit M la matrice d'une rotation r dans une base orthonormée et M' sa matrice dans une autre base orthonormée aussi. La matrice de passage P entre les deux bases est orthogonale et $M' = P^{-1}MP$.

- Si P est orthogonale directe, alors P et M commutent et donc $M = M'$
- Si par contre P est indirecte, on montre que $M' = M^{-1} = {}^tM$

Définition 3.23

Une orientation du plan est la donnée d'une base orthonormée.

Étant donnée une orientation du plan, les bases qui s'en déduisent par un élément de $\mathcal{SO}(E)$ seront dites directes. Les autres seront dites indirectes.

On peut donc associer à chaque rotation une matrice orthogonale unique de la forme $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$; celle qui la représente dans toute base directe.

Pour une réflexion, la situation n'est pas la même si s est une réflexion, sa matrice en base orthonormée est orthogonale indirecte; mais change lorsqu'on change de base orthonormale. En

particulier, il existe une base orthonormée telle que la matrice de s soit de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (une base de diagonalisation).

Proposition 3.24

L'application

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}, +) &\longrightarrow (SO(E), \circ) \\ \alpha &\longmapsto \text{rot}_\alpha \end{aligned}$$

où rot_α est la rotation dont la matrice dans une base orthonormée directe est $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ est un morphisme surjectif de groupes de noyau $2\pi\mathbb{Z}$. On dit que α (ou sa classe modulo 2π) est l'angle de la rotation. On a : $\text{rot}_\alpha \circ \text{rot}_\beta = \text{rot}_{\alpha+\beta}$.

3.4.4 Angle de vecteurs

Théorème 3.25

Étant donnée deux vecteurs unitaires du plan, il existe une et une seule rotation qui transforme l'un en l'autre. On dit alors que le groupe des rotations agit simplement et transitivement sur l'ensemble des vecteurs unitaires du plan.

Si u et v sont deux vecteurs unitaires du plan, il existe une unique rotation r telle que $v = r(u)$. Si le plan est orienté, on a :

Définition 3.26

Si u et v sont deux vecteurs unitaires du plan et si la rotation qui transforme u en v est d'angle α , on dit que α est l'angle du couple (u, v) et on écrit $\alpha = \widehat{(u, v)}$.

On note 0 l'angle nul, angle de la rotation identité de E . L'angle plat est l'angle de la rotation $-id_E = \text{rot}_\pi$.

Proposition 3.27

1. Relation de Chasles

$$\widehat{(u, v)} + \widehat{(v, w)} = \widehat{(u, w)} \quad \forall u, v, w \in E.$$

2. $\widehat{(u, v)} = -\widehat{(v, u)}$ pour tous $u, v \in E$;

3. $\widehat{(u, v)} = \widehat{(u', v')} \iff \widehat{(u, u')} = \widehat{(v, v')}$ pour tous $u, v, u', v' \in E$.

Proposition 3.28 (Effet de transformations orthogonales)

Les rotations conservent les angles tandis que les réflexions les contrarient.

Remarque 3.29

Pour les angles, on confond souvent un élément de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ avec un de ses représentants que l'on appelle une de ses mesures.

Le représentant qui est dans $] -\pi, \pi[$ s'appelle mesure principale de l'angle.

Proposition 3.30 (*Angles orientés de vecteurs non nul du plan*)

Soit u et v deux vecteurs non nuls du plan muni d'une base orthonormale directe $\mathcal{B}$. On appelle **angle orienté** entre les vecteurs u et v l'angle orienté des vecteurs unitaires $\frac{u}{\|u\|}$ et $\frac{v}{\|v\|}$. Un tel angle (confondu avec une mesure principale α) est caractérisé par son cosinus et son sinus :

$$\begin{cases} \cos \alpha &= \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \times \|v\|} \\ \sin \alpha &= \frac{\det_{\mathcal{B}}(u, v)}{\|u\| \times \|v\|} \end{cases} \quad (3.4.1)$$

Plus généralement, étant donné deux vecteurs non colinéaires d'un espace vectoriel euclidien de dimension quelconque, le réel

$$\widehat{(u, v)} = \text{Arcos} \left(\frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \times \|v\|} \right)$$

définit l'angle non orienté entre les vecteurs u et v . Il est dans $[0, \pi]$. Si u et v sont non colinéaires, et si le plan qu'ils engendrent est orienté, il existe une mesure de l'angle orienté dans $] - \pi, \pi[$; et l'angle non orienté est la valeur absolue de cette mesure. On a ainsi $\widehat{(u, v)} = \widehat{(v, u)}$ (à cause de la commutativité du produit scalaire et du produit des réels), ce qui justifie le vocabulaire **angles non orienté**. L'ensemble des angles non orienté ne peut être muni d'une structure de groupe de sorte que la relation de Chasles soit satisfaite.

ISOMÉTRIES ET SIMILITUDES AFFINES

Définition 4.1

Un espace affine euclidien est un espace affine dont l'espace vectoriel associé est muni d'un produit scalaire (forme bilinéaire symétrique définie positive).

On notera dans la suite $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ (ou simplement $\langle \cdot, \cdot \rangle$ si aucune confusion n'est permise) le produit scalaire sur E , direction de $\mathcal{E}$. Ce produit scalaire induit une norme euclidienne sur E qu'on notera $\| \cdot \|_E$ (ou simplement $\| \cdot \|$) dont la distance associée d_E (ou simplement d) permet de définir une distance $d_{\mathcal{E}}$ (ou simplement d) sur $\mathcal{E}$ par la donnée :

$$d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| \quad A, B \in \mathcal{E}.$$

Exercice 4.1

Vérifier qu'il s'agit bien d'une distance et étudier le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire.

4.0.1 Groupe orthogonal

On rappelle qu'une isométrie vectorielle est une application linéaire qui préserve la norme (ou de manière équivalente) le produit scalaire. On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles, et $Is(\mathcal{E})$ l'ensemble des isométries affines. L'inverse de $f \in \mathcal{O}(E)$ est son adjoint f^* .

Les isométries vectorielles étant bijectives, il en est de même des isométries affines. Comme $\mathcal{O}(E)$ est un groupe, $Is(\mathcal{E})$ est un groupe.

On note $SO(E)$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{O}(E)$ dont le déterminant vaut 1. Pour $n \geq 1$, on note $\mathcal{O}(n)$ l'ensemble des matrices A d'ordre n telles que ${}^tAA = Id$ (ou de manière équivalente $A^tA = Id$). Cette condition dit exactement que les vecteurs colonnes de A (ou de manière équivalente ses vecteurs lignes) forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Le déterminant de $A \in \mathcal{O}(n)$ est égal à ± 1 . On vérifie que $\mathcal{O}(n)$ est un groupe.

On rappelle que $\mathcal{O}(n)$ coïncide avec l'ensemble des matrices représentant un élément de $\mathcal{O}(E)$ dans une base orthonormée de E . Se donner une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E revient à se donner un isomorphisme de $\mathcal{O}(n)$ sur $\mathcal{O}(E)$ (qui à une matrice $A \in \mathcal{O}(n)$ associe l'application linéaire dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A).

On note $SO(n)$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{O}(n)$ dont le déterminant est positif, c'est-à-dire vaut 1.

Dans tout ce chapitre, $\mathcal{E}$ désigne un espace affine euclidien (orienté) de dimension $n \geq 1$.

4.1 Isométries affines

Définition 4.2

Une application affine $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ est une isométrie affine si f préserve les distances, i.e :

$$d(f(A), f(B)) = d(A, B), \quad \forall A, B \in \mathcal{E}.$$

Remarque 4.3

En fait, on montre que si $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ est une application qui préserve les distances, alors elle est affine.

Exemple 4.1

Il est aisé de voir que les translations et les symétries orthogonales (donc aussi centrales) sont des isométries, mais pas les projections (non banales) ni les homothéties de rapport différent de ± 1 .

Exercice 4.2

Montrer qu'une application affine est une isométrie affine si et seulement si sa partie linéaire est une isométrie vectorielle.

Théorème 4.4

Soit $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ une application. Alors f est une isométrie de $\mathcal{E}$ si et seulement si f est affine et $\vec{f}$ est une isométrie vectorielle de E .

Preuve.

Soit f une isométrie. Fixons $O \in \mathcal{E}$, et définissons $\psi : E \rightarrow E$ par $\psi(\vec{x}) = \overrightarrow{f(O)f(O+\vec{x})}$. Alors, pour tous $\vec{x}, \vec{y} \in E$, on a $\psi(\vec{x}) - \psi(\vec{y}) = \overrightarrow{f(O+\vec{y})f(O+\vec{x})}$, donc aussi

$$\|\psi(\vec{x}) - \psi(\vec{y})\| = \|\overrightarrow{f(O+\vec{y})f(O+\vec{x})}\| = \|(O+\vec{x}) - (O+\vec{y})\| = \|\vec{x} - \vec{y}\|.$$

Comme il est clair que $\psi(0) = 0$, on déduit que ψ est une isométrie vectorielle. Ainsi, f est affine de partie linéaire ψ , donc $f \in GA(\mathcal{E})$ et $\vec{f} \in \mathcal{O}(E)$. Réciproquement, si f est affine de partie linéaire $\vec{f}$ qui conserve la norme, alors pour tous $M, N \in \mathcal{E}$:

$$f(M)f(N) = \|\overrightarrow{f(M)f(N)}\| = \|\vec{f}(\overrightarrow{MN})\| = \|\overrightarrow{MN}\| = MN$$

donc f est une isométrie. ▀

Corollaire 4.5

Une isométrie de $\mathcal{E}$ est automatiquement affine et bijective, et l'ensemble $Is(\mathcal{E})$ des isométries de $\mathcal{E}$ est un sous-groupe du groupe affine $GA(\mathcal{E})$.

Proposition 4.6

1. L'application naturelle $L : Is(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{O}(E)$, $f \mapsto \vec{f}$ est un morphisme de groupes surjectif, appelé morphisme canonique de $Is(\mathcal{E})$ dans $\mathcal{O}(E)$.

2. Pour tout $O \in E$, l'ensemble $Is_O(\mathcal{E})$ des isométries de $\mathcal{E}$ fixant O est un sous-groupe de $Is(\mathcal{E})$, isomorphe au groupe orthogonal $\mathcal{O}(E)$.

Preuve.

1. Il est clair que L est un morphisme (c'est la restriction à $Is(\mathcal{E})$ du morphisme étudié dans la référence citée), montrons qu'il est surjectif. Soit donc $\sigma \in \mathcal{O}(E)$. Soient $A, B \in \mathcal{E}$ choisis arbitrairement, alors on sait qu'il existe une (unique) f affine telle que $f(A) = B$ et $f = \sigma$. Comme $f \in \mathcal{O}(E)$, on déduit du théorème 4.4 que $f \in Is(\mathcal{E})$.
2. Soit $O \in \mathcal{E}$. Il est facile de constater que $Is_O(\mathcal{E})$ est un sous-groupe de $Is(\mathcal{E})$. Considérons la restriction L' de L à $Is_O(E)$. Comme on l'a vu dans le 1), pour toute $\sigma \in \mathcal{O}(E)$, il existe une unique f affine telle que $f(O) = O$ et $\vec{f} = \sigma$. Autrement dit, pour toute $\sigma \in \mathcal{O}(E)$, il existe une unique $f \in Is_O(\mathcal{E})$ telle que $L(f) = \sigma$.

■

Corollaire 4.7

1. L'ensemble $Is^+(\mathcal{E})$ des isométries directes de $\mathcal{E}$ est un sous-groupe distingué de $Is(\mathcal{E})$.
2. L'ensemble $Is^-(\mathcal{E})$ des isométries indirectes de $\mathcal{E}$ n'est pas un groupe.

Preuve.

C'est immédiat, puisque $Is^+(\mathcal{E}) = L^{-1}(SO(E))$ et $SO(E) \triangleleft \mathcal{O}(E)$.

■

Remarque 4.8

On peut énoncer un résultat analogue à la Proposition 4.6 en changeant $Is(\mathcal{E})$ en $Is^+(\mathcal{E})$ et $\mathcal{O}(E)$ en $SO(E)$.

Définition 4.9

Tout élément de $Is^+(\mathcal{E})$ (resp. de $Is^-(\mathcal{E})$) s'appelle un **déplacement** (resp. un **antidéplacement**) de $\mathcal{E}$. En particulier, $Is^+(\mathcal{E})$ est appelé **groupe des déplacements** de $\mathcal{E}$ et $Is^-(\mathcal{E})$ l'ensemble des **antidéplacements** (car n'étant pas un groupe).

Proposition 4.10

Le groupe $Is(\mathcal{E})$ (resp. $Is^+(\mathcal{E})$) agit simplement transitivement sur l'ensemble des repères orthonormés (resp. sur l'ensemble des repères orthonormés de même sens) de $\mathcal{E}$.

En dehors des notions affines préservées par toute bijection affine, les isométries préservent un certain nombre de notions euclidiennes.

Théorème 4.11

1. Toute isométrie affine conserve la perpendicularité des sous-espaces comme sa partie linéaire préserve la notion d'orthogonalité; plus généralement, elle conserve les notions d'angles non orientés entre les droites comme sa partie linéaire préserve la notion d'angle non orienté entre les vecteurs.
2. Dans un plan affine euclidien orienté, tout déplacement conserve les notions d'angles orientés, tout antidéplacement les contrarie.

4.1.1 Premiers exemples

Tout d'abord, en considérant le noyau du morphisme L de la Proposition 4.6, on obtient :

Proposition 4.12

Le groupe $T(\mathcal{E})$ des translations est un sous-groupe distingué de $Is(\mathcal{E})$ et aussi de $Is^+(\mathcal{E})$.

En ce qui concerne les symétries orthogonales particulières, on conserve les définitions du chapitre précédent. On obtient ainsi :

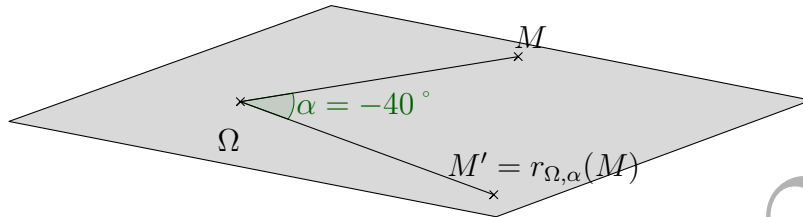
Proposition 4.13

Une symétrie orthogonale $s_{\mathcal{F}}$ d'axe un sous-espace $\mathcal{F}$ est un déplacement si et seulement si $\text{codim } \mathcal{F}$ est paire. En particulier :

1. une réflexion est toujours un antidéplacement ;
2. un renversement est toujours un déplacement (rappel : en dimension 3, les renversements sont appelés demi-tours) ;
3. une symétrie centrale est un déplacement si et seulement si n est pair.

Rappel Dans un plan affine euclidien orienté $\mathcal{E}$, soient $A \in \mathcal{E}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Définition 4.14 (Rotation)



La rotation de centre Ω et d'angle α est l'application $r_{\Omega, \alpha}$ définie par :

- $r_{\Omega, \alpha}(\Omega) = \Omega$;
- si $M \neq \Omega$, $r_{\Omega, \alpha}(M)$ est l'unique M' tel que $\Omega M = \Omega M'$ et $(\widehat{\Omega M, \Omega M'}) = \alpha \pmod{2\pi}$.

Proposition 4.15

1. Toute rotation $r_{\Omega, \alpha}$ est un déplacement, de partie linéaire la rotation vectorielle r_α .
2. $r_{\Omega, \alpha} = \text{id}$ si et seulement si $\alpha = 0 \pmod{2\pi}$;
3. $r_{\Omega, \alpha} = s_\Omega$ si et seulement si $\alpha = \pi \pmod{2\pi}$;
4. si $\alpha = 0 \pmod{2\pi}$, alors Ω est l'unique point fixe de $r_{\Omega, \alpha}$;
5. $r_{\Omega, \alpha} \circ r_{\Omega, \alpha'} = r_{\Omega, \alpha + \alpha'}$; en particulier, l'ensemble des rotations de centre Ω fixé est un groupe pour la composition, isomorphe au groupe des angles orientés de vecteurs.

Preuve.

1. Nous savons déjà que $r_{\Omega,\alpha}$ est un déplacement, en tant que composée de deux réflexions (donc de deux antidéplacements). Mais la preuve qui suit le redémontre au passage. Soient donc $M, N \in E$ et M', N' leurs images par la rotation $r_{\Omega,\alpha}$. L'application vectorielle qui à $\vec{u} = \overrightarrow{\Omega M}$ associe $\vec{u}' = \overrightarrow{\Omega M'}$ est caractérisée par les conditions $\|\vec{u}\| = \|\vec{u}'\|$ et $(\vec{u}, \vec{u}') = \alpha \bmod (2\pi)$, c'est donc la rotation vectorielle r_α définie au chapitre précédent. On obtient ainsi :

$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{\Omega N'} - \overrightarrow{\Omega M'} = \vec{r}_\alpha(\overrightarrow{\Omega N}) - \vec{r}_\alpha(\overrightarrow{\Omega M}) = \vec{r}_\alpha(\overrightarrow{\Omega N} - \overrightarrow{\Omega M}) = \vec{r}_\alpha(\overrightarrow{MN})$$

ce qui prouve que $r_{\Omega,\alpha}$ est affine, de partie linéaire $\vec{r}_\alpha$; c'est donc bien un déplacement du plan $\mathcal{E}$.

2. On a : $\alpha = 0 \bmod (2\pi) \iff r_\alpha = id \iff r_{\Omega,\alpha} \iff id$ la dernière équivalence résultant du fait que les deux applications affines considérées ont même partie linéaire et coïncident en un point Ω .
3. Preuve similaire.
4. $\alpha \neq 0[2\pi]$, alors r_α n'admet pas la valeur propre 1. Par conséquent, $Inv(r_\alpha) = \ker(r_\alpha - id)$ et $r_{\Omega,\alpha}$ admet un et un seul point fixe, qui ne peut être que Ω .
5. L'identité voulue résulte encore de légalité des parties linéaires et de la coïncidence en Ω .



On déduit immédiatement du premier point de la proposition précédente une conséquence géométrique essentielle.

Corollaire 4.16

Soit r une rotation d'angle θ . Soient M, N deux points de $\mathcal{E}$, Δ une droite de $\mathcal{E}$, $M' = r(M)$, $N' = r(N)$ et $\Delta' = r(\Delta)$. Alors

$$(\widehat{\overrightarrow{MN}}, \widehat{\overrightarrow{M'N'}}) = \theta[2\pi] \quad \text{et} \quad (\widehat{\Delta}, \widehat{\Delta'}) = \theta[\pi]$$

Définissons maintenant les rotations affines en dimension 3. Rappelons (cf. chapitre IV) que le choix d'une orientation sur E ne détermine pas une orientation sur ses sous-espaces, mais que si F est un sous-espace lui-même orienté, alors tout supplémentaire de F dans E possède automatiquement une orientation induite.

Définition 4.17

Dans un espace affine euclidien orienté $\mathcal{E}$ de dimension 3, soient une droite orientée et $\alpha \in \mathbb{R}$. On appelle rotation d'axe $\mathcal{D}$ et d'angle α l'application $r_{\mathcal{D},\alpha} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, qui à tout point M associe le point M' défini comme suit : soit $\mathcal{P}_M$ le plan $M + D^\perp$, et soit $A = \mathcal{P}_M \cap \mathcal{D}$ l'unique point d'intersection de $\mathcal{P}_M$ et de $\mathcal{D}$ (ces deux sous-espaces sont en effet supplémentaires). Alors M' est par définition l'image de M par la rotation $r_{A,\alpha}$ dans le plan orienté $\mathcal{P}_M$.

Proposition 4.18

On conserve les notations de la définition.

1. Toute rotation $r_{\mathcal{D},\alpha}$ est un déplacement, de partie linéaire $\vec{r}_{\mathcal{D},\alpha}$ (rotation vectorielle définie au chapitre précédent).
2. $r_{\mathcal{D},\alpha} = \text{id}$ si et seulement si $\alpha = 0[2\pi]$.
3. $r_{\mathcal{D},\alpha} = s_{\mathcal{D}}$ si et seulement si $\alpha = \pi[2\pi]$.
4. si $\alpha \neq 0[2\pi]$, alors $\text{Inv}(r_{\mathcal{D},\alpha}) = \mathcal{D}$.
5. L'ensemble des rotations d'axe fixé est un groupe pour la composition, isomorphe au groupe des angles orientés de vecteurs.

Définition 4.19

Dans un espace affine euclidien orienté $\mathcal{E}$ de dimension 3, soient une droite orientée $\mathcal{D}$, $A \in \mathcal{D}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha \not\equiv 0 \pmod{\pi}$. On appelle antirotation de centre A , d'axe $\mathcal{D}$ et d'angle α la composée commutative $s_{\mathcal{P}} \circ r_{\mathcal{D},\alpha} = r_{\mathcal{D},\alpha} \circ s_{\mathcal{P}}$ où $\mathcal{P}$ est le plan $A + \mathcal{D}^\perp$.

Proposition 4.20

On conserve les notations de la définition.

1. Toute antirotation $s_{\mathcal{P}} \circ r_{\mathcal{D},\alpha}$ est un antidéplacement, de partie linéaire l'antirotation vectorielle $\vec{s}_P \circ \vec{r}_{D,\alpha}$.
2. $\text{Inv}(s_{\mathcal{P}} \circ r_{\mathcal{D},\alpha}) = \{A\}$;
3. $s_{\mathcal{P}} \circ r_{\mathcal{D},\alpha} = r_{\mathcal{D},\alpha} \circ s_{\mathcal{P}}$ (commutativité de l'écriture).

Preuve.

1) découle de la proposition 4.18. Pour 2), il suffit de constater que $A \in \text{Inv}(s_{\mathcal{P}} \circ r_{\mathcal{D},\alpha})$ et de se rappeler que $s_{\mathcal{D}} \circ r_{\mathcal{D},\alpha}$. Pour 3), on constate que les deux membres de légalité ont même partie linéaire (propriété des antirotations vectorielles) et coïncident en A . ■

Enfin, il sera bon d'avoir à l'esprit les deux résultats suivants

Proposition 4.21

(Ici, E est de dimension quelconque.)

1. Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont deux sous-espaces strictement parallèles de $\mathcal{E}$, il existe un unique vecteur $\vec{u} \in F^\perp = (F')^\perp$ tel que $F' = t_{\vec{u}}(F)$, et alors $s_{\mathcal{F}'} \circ s_{\mathcal{F}} = t_{2\vec{u}}$.
2. Réciproquement, toute translation $t_{\vec{u}}$ peut s'écrire (d'une infinité de façons) comme composée de deux symétries orthogonales d'axes strictement parallèles (par exemple, comme composée de deux réflexions ou de deux renversements) : on choisit un sous-espace F tel que $\vec{u} \in F^\perp$ et on pose $F' = t_{\vec{u}/2}(F)$.

Proposition 4.22

Supposons E orienté de dimension 2.

1. Si Δ, Δ' , sont deux droites sécantes en A , avec $(\widehat{\Delta}, \widehat{\Delta'}) = \theta[\pi]$, alors $s_{\Delta'} \circ s_{\Delta} = r_{A,2\theta}$.

2. Réciproquement, toute rotation peut s'écrire (d'une infinité de façons) comme composée de deux réflexions, dont les axes sont définis comme en 1).

Remarque 4.23

En réalité, ce dernier résultat reste valable en dimension 3, mais il faut d'abord définir la notion d'angle orienté de deux plans.

4.2 Décomposition canonique des isométries et classification en petite dimension

Dans ce paragraphe, nous allons expliquer comment classer les isométries affines en dimension ≤ 3 partir de la classification des isométries vectorielles du chapitre précédent. Il faut cependant noter que d'autres méthodes sont possibles, par exemple en raisonnant sur l'ensemble des points fixes ou en utilisant le théorème de Cartan-Dieudonné affine (cf. paragraphe suivant). Nous étudierons ces autres approches dans les Exercices.

Théorème 4.24

Toute $f \in Is(E)$ admet une décomposition canonique, c'est-à-dire, il existe un unique couple $(t, g) \in T(E) \times Is(E)$ tel que :

1. $f = t \circ g = g \circ t$ (et donc $\vec{f} = \vec{g}$)
2. $Inv(g) \neq \emptyset$;
3. $t = t_{\vec{u}}$ avec $Inv(\vec{g}) = Inv(\vec{f})$;

Preuve.

Il suffit de prouver que $Ker(\vec{f} - id)$ et $Im(\vec{f} - id)$ sont supplémentaires dans E . D'après la formule du rang, cela revient à prouver qu'ils sont en somme directe. En fait, nous allons montrer un peu mieux : ils sont orthogonaux. En effet, soit $\vec{x} \in Ker(\vec{f} - id)$, i.e. $\vec{x} = \vec{f}(\vec{x})$, et soit $\vec{y} \in Im(\vec{f} - id)$, i.e. $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x}) - \vec{z}$ pour un $\vec{z} \in \vec{E}$. Alors

$$(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \vec{f}(\vec{y})) - (\vec{x}, \vec{z}) = (\vec{f}(\vec{x}), \vec{f}(\vec{y})) - (\vec{x}, \vec{z})$$

puisque $\vec{f}$ préserve le produit scalaire. ▀

Définition 4.25

Si f admet pour décomposition canonique $f = t_{\vec{u}} \circ g = g \circ t_{\vec{u}}$ avec $Inv(g) \neq \emptyset$, $\vec{u} \in Inv(\vec{g}) = Inv(\vec{f})$ et $t_{\vec{u}} \neq id$, on dit que f est la glissée de g par $t_{\vec{u}}$. En particulier,

1. si g est une réflexion, on dit que f est une réflexion glissée ;
2. en dimension 3, si g est un demi-tour (renversement), on dit que f est un demi-tour glissé ;
3. en dimension 3, si g est une rotation, on dit que f est un vissage.

Le résultat précédent est fondamental, car il permet de classer les isométries affines (il permettra aussi plus loin de trouver les générateurs des groupes d'isométries). Nous allons expliquer ce point, en commençant par une remarque.

Lemme 4.26

Soit $f = t \circ g = g \circ t$ la décomposition canonique de l'isométrie f . Alors $\text{codim } \text{Inv}(g)$ est pair si et seulement si f est un déplacement.

Preuve.

En effet, on a

$$\text{codim } \text{Inv}(g) = \text{codim } \text{Inv}(g) = \text{codim } \text{Inv}(f)$$

. Or nous savons (corollaire ?? du chapitre VI) que la condition « $\text{codim } \text{Inv}(f)$ est paire » ; équivaut $\vec{f} \in \text{SO}(E)$. $\blacksquare$

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de classification des isométries en petite dimension.

Théorème 4.27

1. Supposons $\dim \mathcal{E} = 1$. Alors :
 - (a) les déplacements de $\mathcal{E}$ sont les translations ;
 - (b) les antidéplacements de $\mathcal{E}$ sont les symétries centrales.
2. Supposons $\dim \mathcal{E} = 2$. Alors :
 - (a) les déplacements de $\mathcal{E}$ sont les translations, les symétries centrales et les rotations ;
 - (b) les antidéplacements de $\mathcal{E}$ sont les réflexions et les réflexions glissées.
3. Supposons $\dim \mathcal{E} = 3$. Alors :
 - (a) les déplacements de $\mathcal{E}$ sont les translations, les demi-tours, les demi-tours glissés, les rotations et les vissages ;
 - (b) les antidéplacements de $\mathcal{E}$ sont les symétries centrales, les réflexions, les réflexions glissées et les antirotations.

Pour plus d'informations, notamment pour une classification en fonctions des points fixes de f , on consultera le tableau distribué en polycopié.

Preuve.

L'idée générale de la preuve est la suivante : soit $f \in \text{Is}(E)$, dont on écrit la décomposition canonique $f = t_{\vec{u}} \circ g$.

- On commence par déterminer les g possibles, sachant que
- $\vec{g}$ est une isométrie vectorielle (donc connue par la classification du chapitre précédent),
- $\text{Inv}(g) = \emptyset$,
- on connaît la parité de la dimension de $\text{Inv}(g)$ par le lemme 4.26.
- Ensuite, on utilise le fait que $\vec{u} \in \text{Inv}(g)$ pour en déduire les possibilités pour f .

1. Supposons d'abord $\dim \mathcal{E} = 1$.

- (a) Si $f \in Is^+(E)$, alors $\vec{g} \in SO(E)$, donc $\vec{g} = id$. Par conséquent g est une translation, mais comme elle possède au moins un point fixe, $g = id$. On en déduit que f est une translation.
- (b) Si $f \in Is^-(E)$, alors $\vec{g} \in O^-(\vec{E})$, donc $\vec{g} = -id$. Ainsi, g est une homothétie de rapport -1 , c'est-à-dire une symétrie centrale. Mais $\vec{u} \in Inv(\vec{g}) = \{0\}$, donc $t_{\vec{u}} = id$ et $f = g$.

2. Supposons maintenant $\dim E = 2$.

- (a) Si $f \in Is^+(E)$, alors $\vec{g} \in SO(E)$, donc $\vec{g}$ est une rotation plane r_θ . Examinons plusieurs cas :
 - si $\theta = 0[2\pi]$ alors $\vec{g} = id$, donc $g = id$ et f est une translation, comme en 1)
 - si $\theta = \pi[2\pi]$ alors $\vec{g} = -id$, donc $f = g$ est une symétrie centrale, comme en 1) également.
 - si $\theta \neq 0[\pi]$ alors $\vec{g} \neq \pm id$. Comme $Inv(g)$ est de dimension 0 ou 2 par le lemme 4.26, et qu'il ne peut être de dimension 2 (sinon $g = id$, donc $\theta = 0[2\pi]$), c'est un singleton $\{A\}$. Par conséquent g est la rotation $r_{A,\theta}$. Enfin, comme $\vec{u} \in Inv(\vec{g}) = \{0\}$, on obtient finalement $f = g$.
- (b) Si $f \in Is^-(\vec{E})$, alors $g \in O^-(\vec{E})$, donc $\vec{g}$ est une réflexion $s_{\vec{\Delta}}$. Comme $\dim Inv(g) = 1$ par le lemme 4.26, on voit que g est une réflexion s_{Δ} où Δ est une droite de direction $\vec{\Delta}$. On en conclut que f est une réflexion ou une réflexion glissée.



Le cas de la dimension 3 est similaire et sera traité en exercice.

4.3 Génération du groupe des isométries et du groupe des déplacements

Comme dans le cas vectoriel, on va exhiber un système de générateurs des groupes $Is(E)$ et $Is^+(E)$. On se replace ici en dimension $n \geq 1$ quelconque.

Théorème 4.28 (Cartan - Dieudonné)

Le groupe $Is(E)$ est engendré par les réflexions. Plus précisément, soit $f \in Is(E)$, et soit $p = \dim Inv(f)$.

1. Si $Inv(f) \neq \emptyset$, alors f s'écrit comme produit de $n - p \leq n$ réflexions.
2. Si $Inv(f) = \emptyset$ alors f s'écrit comme produit de $n - p + 2 \leq n + 1$ réflexions.

Preuve.

Si $Inv(f) \neq \emptyset$, il existe $A \in E$ tel que $f(A) = A$. Le résultat découle donc de l'isomorphisme $Is_A(E) \simeq O(E)$ (proposition ??) et de la version vectorielle du théorème de Cartan-Dieudonné (théorème ?? du chapitre VI).

Supposons donc $Inv(f) = \emptyset$, et soit $f = t \circ g$ la décomposition canonique de f . Comme $Inv(g) \neq \emptyset$, g s'écrit comme composée de $n - p$ réflexions d'après le premier cas. D'autre part, t s'écrit comme composée de deux réflexions d'après la proposition 4.21, d'où l'assertion voulue. Observons de plus que $p \geq 1$ (sinon $Inv(\vec{f}) = \{\vec{0}\}$, donc $Inv(f) \neq \emptyset$ d'après le corollaire ?? du chapitre II), ce qui explique l'inégalité $n - p + 2 \leq n + 1$ dans l'énoncé du théorème. ■

Remarque 4.29

Comme dans le cas vectoriel, on peut démontrer que les valeurs $n - p$ et $n - p + 2$ sont optimales (i.e. minimales).

Théorème 4.30

Supposons $n \geq 3$. Le groupe $Is^+(E)$ est engendré par les renversements. Plus précisément, soit $f \in Is^+(E)$ et soit $p = \dim Inv(\vec{f})$ (rappel : $n - p$ est pair). Alors :

1. si $p = n$, i.e. si f est une translation, f s'écrit comme produit de deux renversements ;
2. sinon, f s'écrit comme produit de $n - p \leq n$ renversements.

Preuve.

La première assertion résulte encore de la proposition 4.21. Examinons donc l'autre cas.

Si $Inv(f) \neq \emptyset$, le résultat découle comme dans le théorème précédent de son analogue vectoriel (théorème ?? du chapitre VI) et de la proposition 4.6. Supposons donc $Inv(f) = \emptyset$, et soit $f = t_{\vec{u}} \circ g$ la décomposition canonique de f . Comme $Inv(g) \neq \emptyset$, d'après le premier cas il existe $n - p$ renversements $r_1, \dots, r_{n-p}$ tels quelconque

$$g = r_1 \circ \dots \circ r_{n-p}$$

D'autre part, on sait que $u \in Inv(\vec{g})$ est non nul (sinon $f = g$ a des points fixes). Si l'on note $F_1 = Inv(r_1)$, d'après la proposition ?? du chapitre VI, on peut donc supposer que F_1 est tel que $u \in \vec{f}^\perp$. Posons alors $F'_1 = t_{\vec{u}/2}(F_1)$ et notons r'_1 le renversement d'axe F'_1 . Par la proposition 4.21, on obtient

$$t_{\vec{u}} = r'_1 \circ r_1$$

Mais alors

$$f = t_{\vec{u}} \circ g = r'_1 \circ r_1 \circ r_1 \circ r_2 \circ \dots \circ r_{n-p} = r'_1 \circ r_2 \circ \dots \circ r_{n-p}$$

est une décomposition de f en produit de $n - p$ renversements. ■

Remarque 4.31

Le théorème est faux en dimension ≤ 2 . En effet, en dimension 1, $Is^+(E) = T(E)$ ne peut être engendré par les renversements, qui ne sont même pas définis ! Par ailleurs, en dimension 2 un renversement n'est autre qu'une symétrie centrale, de partie linéaire $-id$. Donc les renversements engendrent dans $Is^+(E)$ un sous-groupe formé des f telles que $f = \pm id$, donc constitué des translations et des symétries centrales. Ce sous-groupe n'est pas $Is^+(E)$ tout entier, puisqu'il manque les rotations.

4.4 Similitude affines

Définition 4.32

Une application (ensembliste) $f : E \longrightarrow E$ est une similitude s'il existe $k > 0$ (nécessairement unique) tel que $f(M)f(N) = kMN$ pour tous $M, N \in E$. Ce réel k sera appelé le rapport de la similitude f .

Exemple 4.2

Une isométrie est une similitude de rapport 1. Une homothétie de rapport λ est une similitude de rapport $k = |\lambda|$.

Bien entendu, cette notion est la version analogue de la notion vectorielle :

Théorème 4.33

f est une similitude de rapport k si et seulement si $f \in GA(E)$ et $\vec{f}$ est une similitude vectorielle de rapport k .

Preuve. Soit f une similitude de rapport $k > 0$. Soient $A \in E$, $h = h_{A,k^{-1}}$ et $g = h \circ f$. On a, pour tout $M \in E$: $g(M) = h(f(M)) = A + k^{-1}\overrightarrow{Af(M)}$. D'où, pour tous $M, N \in E$,

$$g(M)g(N) = \|k^{-1}\overrightarrow{Af(N)} - k^{-1}\overrightarrow{Af(M)}\| = k^{-1}\|\overrightarrow{f(M)f(N)}\| = MN.$$

Ainsi, g est une isométrie, i.e. $g \in GA(E)$ et $\vec{g} \in \mathcal{O}(E)$ d'après le théorème 4.4, donc $\vec{f} = h^{-1} \circ g \in GA(E)$ et $\vec{f} = k^{-1}\vec{g}$ est une similitude vectorielle.

La réciproque est claire. ▀

En raisonnant comme pour le cas des isométries, on obtient :

Corollaire 4.34

1. L'ensemble $Sim(\mathcal{E})$ des similitudes de $\mathcal{E}$ est un sous-groupe de $GA(\mathcal{E})$.
2. L'ensemble $Sim^+(\mathcal{E})$ des similitudes directes de $\mathcal{E}$ est un sous-groupe distingué de $Sim(\mathcal{E})$.
3. L'ensemble $Sim^-(\mathcal{E})$ des similitudes indirectes de $\mathcal{E}$ n'est pas un groupe.

Proposition 4.35 Soit f une similitude qui n'est pas une isométrie, c'est-à-dire une similitude de rapport $k \neq 1$. Alors f possède un unique point fixe, qu'on appellera le centre de f .

Preuve.

Par hypothèse, pour tout $\vec{x} \in \vec{E}$, $\|\vec{f}(\vec{x})\| = k\|\vec{x}\| \neq \|\vec{x}\|$. Donc 1 n'est pas valeur propre de $\vec{f}$, i.e. $Inv(\vec{f}) = \{0\}$, et on sait que cela implique l'existence d'un unique point fixe A . Autre méthode : quitte à remplacer f par f^{-1} , on peut supposer $0 < k < 1$, de sorte que f est contractante. On conclut alors grâce au théorème du point fixe. ▀

Définition 4.36

On appelle similitude à centre toute similitude qui possède un et un seul point fixe, c'est-à-dire

- toute similitude qui n'est pas une isométrie (cf. proposition 4.35);
- toute isométrie qui possède un et un seul point fixe, comme par exemple les symétries centrales, les rotations en dimension 2, les antirotations en dimension 3 ...

Théorème 4.37 (Décomposition canonique d'une similitude à centre)

Si f est une similitude de centre A et de rapport k , alors il existe une unique $g \in \text{Is}_A(E)$ telle que $f = h_{A,k} \circ g = g \circ h_{A,k}$.

Preuve.

Notons $h = h_{A,k}$. Alors $g = h^{-1} \circ f$ est une isométrie fixant A , et c'est évidemment la seule telle que $f = h \circ g$. D'autre part, $h \circ g$ et $g \circ h$ coïncident en A et ont même partie linéaire $k\vec{g}$, d'où le résultat. ■

Malgré le vocabulaire, on prendra garde à ne pas confondre cette décomposition canonique de la similitude f avec la décomposition canonique de l'endomorphisme affine f , au sens général donné dans le théorème ?? du chapitre II et employé de nouveau dans l'étude des isométries (cette décomposition-là donnerait une trivialité ici, puisqu'il y a un point fixe).

Corollaire 4.38

1. Le groupe $\text{Sim}(\mathcal{E})$ est engendré par les isométries et les homothéties (de rapport positif), donc par les réflexions et les homothéties (de rapport positif).
2. Si $n \geq 3$, le groupe $\text{Sim}^+(\mathcal{E})$ est engendré par les déplacements et les homothéties (de rapport positif), donc par les renversements et les homothéties (de rapport positif).

Preuve.

Cela provient du théorème 4.37 et des résultats du paragraphe précédent. Les caractérisations suivantes des similitudes affines découlent de leur analogue vectoriel. ■

Théorème 4.39

Supposons $n \geq 2$ (pour parler d'angles). Pour $f \in A(\mathcal{E})$ injective, les conditions suivantes sont équivalentes :

1. f est une similitude ;
2. f conserve les angles non orientés (de vecteurs, de demi-droites, de droites) ;
3. f conserve l'orthogonalité, au sens où : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0 \Rightarrow (\overrightarrow{f(A)f(B)}, \overrightarrow{f(C)f(D)}) = 0$.

Remarque 4.40

On a en fait une caractérisation plus forte des similitudes. En effet, en utilisant notamment le théorème fondamental de la géométrie affine (cf. chapitre II, théorème ??), on peut démontrer que si f est une bijection (non supposée affine a priori) de E , on a les équivalences :

1. f est une similitude affine ;
2. f conserve l'orthogonalité ;

3. f conserve les angles non orientés ;
4. f envoie toute sphère sur une sphère.

Dans le reste de ce paragraphe, nous allons examiner en détail le cas de la dimension 2.

Théorème 4.41

Soit E un plan affine euclidien orienté.

1. Le groupe $\text{Sim}^+(\mathcal{E})$ est constitué :
 - (a) des translations,
 - (b) des rotations (y compris les symétries centrales),
 - (c) des homothéties (de rapport positif ou négatif),
 - (d) et des composées commutatives $h_{A,\lambda} \circ r_{A,\theta} = r_{A,\theta} \circ h_{A,\lambda}$ d'une homothétie de centre A et de rapport $\lambda > 0$ avec une rotation de même centre A .
2. L'ensemble $\text{Sim}^-(\mathcal{E})$ est constitué :
 - (a) des réflexions,
 - (b) des réflexions glissées,
 - (c) et des composées commutatives $h_{A,\lambda} \circ s_\Delta = s_\Delta \circ h_{A,\lambda}$ d'une homothétie de centre A et de rapport $\lambda > 0$ avec une réflexion d'axe contenant A .

Preuve.

Soit f une similitude du plan. Si f est une isométrie, alors on sait déjà (théorème 4.27) que f est une translation, une rotation, une réflexion ou une réflexion glissée. Supposons donc que f n'est pas une isométrie, c'est-à-dire qu'elle est de rapport $k \neq 1$. D'après la proposition 4.5 elle possède un centre A et le théorème 4.7 nous dit qu'elle s'écrit alors comme composée commutative $f = h_{A,k} \circ g = g \circ h_{A,k}$ pour une unique $g \in \text{Is}_A(\mathcal{E})$. Or on a clairement

$$\text{Is}_A^+ = \{r_{A,\theta} ; \theta \in \mathbb{R}\}$$

d'où le résultat. ▀

Définition 4.42

Soit f une similitude plane à centre. D'après le théorème 4.41 elle peut être de deux types :

1. Si f s'écrit sous la forme $f = h_{A,\lambda} \circ r_{A,\theta} = r_{A,\theta} \circ h_{A,\lambda}$, avec $A \in E, \lambda > 0, \theta \in \mathbb{R}$, on dira que f est la similitude directe de centre A , de rapport λ et d'angle θ .
2. Si f s'écrit sous la forme $f = h_{A,\lambda} \circ s_\Delta = s_\Delta \circ h_{A,\lambda}$, avec $A \in \Delta$ et $\lambda > 0$, on dira que f est la similitude indirecte de centre A , de rapport λ et de droite Δ .

Remarque 4.43

On remarquera qu'en dimension 2, toute homothétie, même de rapport négatif, est une similitude directe. En fait, si $\lambda > 0$, l'homothétie $h_{A,\lambda}$ est la similitude directe de centre A , de rapport $-\lambda > 0$ et d'angle π (au sens de la définition précédente), c'est-à-dire la composée $h_{A,-\lambda} \circ s_A$.

Voici une caractérisation essentielle des similitudes planes.

Théorème 4.44

Soit $\mathcal{E}$ un plan euclidien orienté.

- 1. Les similitudes directes conservent les angles orientés (de vecteurs, de demi-droites ou de droites), et ce sont les seules applications affines injectives possédant cette propriété.*
- 2. Les similitudes indirectes contrarient les angles orientés de vecteurs (de vecteurs, de demi-droites ou de droites), et ce sont les seules applications affines injectives possédant cette propriété.*

Proposition 4.45

Soit E un plan euclidien orienté. Etant donnés quatre points $A \neq B$ et $A' \neq B'$ de E , il existe une unique similitude directe (resp. indirecte) f envoyant A sur A' et B sur B' .

Preuve.

Les conditions $f(A) = A'$ et $\vec{f} = \sigma$ déterminent alors complètement l'unique similitude directe (resp. indirecte) f qui convient. $\blacksquare$

4.5 Recapitulation des isométries

4.5.1 En dimension 2

Noms et notations de f	Partie linéaire $\vec{f}$	Inv f
Déplacement		
Identité de $\mathcal{E}$ $id_{\mathcal{E}}$	id_E	$\mathcal{E}$
Translation de vecteur $\vec{u}$ ($\vec{u} \neq \vec{0}$) de $\mathcal{E}$ $t_{\vec{u}}$	id_E	$\{\}$
Rotation de centre Ω de $\mathcal{E}$ et d'angle α ($\alpha \in \mathbb{R}^*$), $r_{\Omega, \alpha}$	$\vec{r}_{\alpha}$	$\{\Omega\}$
Antidéplacement		
Réflexion d'axe $\mathcal{D}$ $s_{\mathcal{D}}$	$\vec{s}_D$	$\mathcal{D}$
Symétrie glissée d'axe $\mathcal{D}$ et de vecteur $\vec{u}$ ($\vec{u} \in D \setminus \{\vec{0}\}$) de $\mathcal{E}$ $t_{\vec{u}} \circ s_{\mathcal{D}} = s_{\mathcal{D}} \circ t_{\vec{u}}$	$\vec{s}_D$	$\{\}$

4.5.2 En dimension 3

Noms et notations de f	Partie linéaire $\vec{f}$	Inv f
Déplacement		
Identité de $\mathcal{E}$ $id_{\mathcal{E}}$	id_E	$\mathcal{E}$
Translation de vecteur $\vec{u}$ ($\vec{u} \neq \vec{0}$) de $\mathcal{E}$ $t_{\vec{u}}$	id_E	$\{\}$
Rotation d'axe $\mathcal{D}$ et d'angle α ($\alpha \in \mathbb{R}^*$), $r_{\mathcal{D}, \alpha}$	$\vec{r}_{D, \alpha}$	$\mathcal{D}$
Vissage d'axe $\mathcal{D}$, d'angle α ($\alpha \in \mathbb{R}^*$) et de vecteur $\vec{u}$ ($\vec{u} \in D \setminus \{\vec{0}\}$), $t_{\vec{u}} \circ r_{\mathcal{D}, \alpha} = r_{\mathcal{D}, \alpha} \circ t_{\vec{u}}$	$\vec{r}_{D, \alpha}$	$\{\}$
Antidéplacement		
Réflexion d'axe $\mathcal{P}$ $s_{\mathcal{P}}$	$\vec{s}_P$	$\mathcal{P}$
Symétrie glissée d'axe $\mathcal{P}$ et de vecteur $\vec{u}$ ($\vec{u} \in P \setminus \{\vec{0}\}$) de $\mathcal{E}$ $t_{\vec{u}} \circ s_{\mathcal{P}} = s_{\mathcal{P}} \circ t_{\vec{u}}$	$\vec{s}_P$	$\{\}$
Antirotoation d'axe $\mathcal{D}$ de centre A ($A \in \mathcal{D}$) et d'angle α $r_{\mathcal{D}, \alpha} \circ s_{A+D^\perp} = s_{A+D^\perp} \circ r_{\mathcal{D}, \alpha}$	$\vec{r}_D \circ \vec{s}_{D^\perp} = \vec{s}_{D^\perp} \circ \vec{r}_{D, \alpha}$	$\{A\} = (A + D^\perp) \cap \mathcal{D}$

4.6 my exams

Exercice 4.3

Soit ABC un triangle non aplati, I le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[BC]$ et K le milieu de $[AC]$.

- Montrer que l'orthocentre du triangle IJK est le centre O du cercle circonscrit à ABC .
- Soit G le centre de gravité de ABC et h l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$.
 - Quelle est l'image par h de
 - A , B et C ?
 - la hauteur de ABC passant par A ?
 - l'orthocentre H du triangle ABC ?
 - En déduire que $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OJ}$.
- Soit AB la corde d'un cercle $\mathcal{C}$. Montrer que le lieu de l'orthocentre du triangle ABM , lorsque M décrit $\mathcal{C}$, est le cercle $\mathcal{C}'$ symétrique orthogonal de $\mathcal{C}$ par rapport à (AB) .

Exercice 4.4

Soient l'espace affine $\mathbb{R}^3$ dont la direction est munie de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Considérons la transformation f de $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$f : (x, y, z) \mapsto (x', y', z') \quad \text{où} \quad \begin{cases} x' = \frac{9}{11}x + \frac{2}{11}y - \frac{6}{11}z + \frac{38}{11} \\ y' = \frac{2}{11}x + \frac{9}{11}y + \frac{6}{11}z + \frac{17}{11} \\ z' = -\frac{6}{11}x + \frac{6}{11}y - \frac{7}{11}z - \frac{29}{11} \end{cases}$$

- Justifier que f est une transformation affine dont on précisera la matrice $M_{\vec{f}}$ de sa partie linéaire $\vec{f}$.
- Démontrer que $\vec{f}$ est une application orthogonale puis en déduire que f est une isométrie affine.
- L'application f admet-elle un point fixe ?
- Démontrer que le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x - y + 3z + 3 = 0$ est stable par f et que la restriction $f|_{\mathcal{P}}$ de f à $\mathcal{P}$ est une translation de vecteur $\vec{u}$ à préciser.
- Déterminer l'ensemble des points fixes de l'application $g = t_{-\vec{u}} \circ f$. Que peut-on conclure sur la nature de la transformation g ?
- On considère $\vec{v} = (-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Déterminer l'expression analytique de la symétrie glissée d'axe $\mathcal{P}$ et de vecteur $\vec{v}$.

7. Soit $\mathcal{D} = B + \mathbb{R} \vec{w}$ où $\vec{w} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et $B = (-1, 0, \frac{1}{2})$. Donner l'expression analytique de la rotation d'axe $\mathcal{D}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
8. En déduire celle de l'antirotation d'axe $\mathcal{D}$, d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de centre B .
9. Déterminer le point $\mathcal{V}(Q)$ où $\mathcal{V} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est le vissage d'axe $\mathcal{D}$ d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de vecteur $\vec{a} = (\frac{5}{6}, \frac{5}{6}, \frac{5}{2})$.

Exercice 4.5

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ une matrice de type (m, n) à coefficients réels et $B \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ une matrice de type $(m, 1)$ à coefficients réels. On considère

$$\mathcal{F} = \left\{ X \in \mathbb{R}^n ; AX = B \right\}.$$

1. Donner la définition d'un espace affine.
2. Justifier que $\mathcal{F}$ est un espace affine tout en précisant sa direction.
3. Quand est-ce que $\mathcal{F}$ est vide ?
4. Discuter suivant le rang de la matrice A la dimension de $\mathcal{F}$.

Exercice 4.6

Soient A et B deux points d'un espace affine $\mathcal{E}$ euclidien de direction E et φ l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui à M de $\mathcal{E}$ associe le point $\varphi(M)$ défini par :

$$2\overrightarrow{M\varphi(M)} = 7\overrightarrow{AM} - \frac{10}{3}\overrightarrow{BM}$$

1. Justifier que φ est une application affine et préciser sa partie linéaire $\vec{\varphi}$.
2. En déduire la nature géométrique de φ . (On la caractérisera par son nom et ses éléments géométriques).
3. On suppose que $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ muni de ses structures affine et euclidienne canoniques. Soit le repère cartésien $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de $\mathcal{E}$. On considère le point $G = \text{bar}\left((A, \frac{7}{2}); (B, -\frac{5}{3})\right)$ et on donne $A = \left(-1, \frac{1}{2}, 2\right)$, $B = \left(3, -\frac{1}{2}, 1\right)$, $C = \left(\frac{3}{2}, -1, 4\right)$ et $\alpha = \frac{\pi}{6}$.
 - (a) Reconnaître l'endomorphisme affine $t_{\vec{GC}} \circ \varphi$ de $\mathcal{E}$ et donner son expression analytique.
 - (b) Déterminer la nature géométrique de l'application $r_{G,\alpha} \circ \varphi$, où $r_{G,\alpha}$ est la rotation de centre G et d'angle α .
 - (c) Déterminer l'équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ perpendiculaire à (AB) et passant par G .
 - (d) Donner l'écriture matricielle de $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, la projection orthogonale sur $\mathcal{P}$.
 - (e) En déduire l'expression analytique de l'antirotation $\mathcal{V}_{G,\alpha}$ de centre G et d'angle α . Déterminer le point $\mathcal{V}(D)$ où $D = \left(-\frac{1}{2}, 0, 1\right)$.

Exercice 4.7

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction l'espace vectoriel E de dimension n .

1. (**Question de cours**) Rappeler les définitions des notions suivantes :

- (a) endomorphisme affine de $\mathcal{E}$,
- (b) similitude de $\mathcal{E}$,
- (c) similitude indirecte de $\mathcal{E}$,
- (d) réflexion de $\mathcal{E}$.

2. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -3x - 4y \\ -4x + 3y - 1 \end{pmatrix}$.

- (a) Montrer que f est une similitude dont on précisera le rapport.
- (b) Montrer que f se décompose sous la forme $f = h \circ u = u \circ h$, où h est une similitude simple dont on précisera la nature et u est une isométrie dont on précisera la nature et les éléments caractéristiques.
- (c) Déterminer l'équation cartésienne de l'ensemble des point invariants de u .

Exercice 4.8

On suppose que $\mathcal{E}$ est euclidien de dimension 3 et E est rapporté à une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère la rotation f d'axe D dirigée et orientée par $\vec{e}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ et d'angle $\frac{\pi}{3} \bmod (2\pi)$.

- 1. Soit $\vec{w} \in E$. On pose $\vec{w} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$, où $\vec{w}_2 \in D^\perp$ et $\vec{w}_1 \in D$.
 - (a) Calculer $f(\vec{w}_2)$ en fonction de $\vec{w}_2$, $\vec{e}_0 \wedge \vec{w}_2$.
 - (b) Calculer $f(\vec{w})$ en fonction de $\vec{w}$, $\vec{w}_2$ et $\vec{e}_0 \wedge \vec{w}_2$.
 - (c) Ecrire $\vec{w}_2$ en fonction de $\vec{e}_0$ et des coordonnées de $\vec{w}$.
- 2. Déterminer l'expression analytique de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
- 3. Ecrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4.9

Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ les droites de l'espace affine usuel $\mathbb{R}^3$ d'équations

$$\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ -x + 4y + z = 5 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 2x + 2y + z = 2 \\ 2x - 4y + 3z = -2 \end{cases}$$

- 1. Montrer que les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas parallèles.
- 2. Trouver un vecteur directeur de la perpendiculaire commune aux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.
- 3. Déterminer les points d'intersection H et H' de cette perpendiculaire commune avec les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

Exercice 4.10

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3.

1. (Question de cours)

- (a) Soit F un sous-espace vectoriel de E . Rappeler la définition de $F^\perp$ le supplémentaire orthogonal de F .
- (b) Montrer que si F est stable par une transformation f de E alors son supplémentaire orthogonal $F^\perp$ est aussi stable par f .
2. Soit $r \in SO(E)$. Montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ telle que la matrice de r dans cette base soit de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

3. Soit A une matrice orthogonale directe en dimension 3. Montrer que c'est la matrice en base orthonormale d'un retournement si et seulement si sa trace est -1 .
4. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 3 de direction E , $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ un repère de $\mathcal{E}$. Reconnaitre la transformation φ d'expression analytique

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{4}(2x - \sqrt{6}y - \sqrt{6}z) \\ y' = \frac{1}{4}(\sqrt{6}x + 3y - z) + 1 \\ z' = \frac{1}{4}(\sqrt{6}x - y + 3z) + 1. \end{cases}$$

Exercice 4.11

Dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on considère les points $A(-2, 3)$, $B(3, -2)$, $C(2, -3)$, $D(-3, 2)$ et h l'homothétie de centre A et de rapport $-\frac{1}{2}$. On note $A' = h(A)$, $B' = h(B)$, $C' = h(C)$ et $D' = h(D)$.

1. (a) Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme dont on précisera le centre.
 (b) En déduire que $A'B'C'D'$ est un parallélogramme.
2. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = k \quad (k > 0 \text{ fixé}).$$

3. Quel est l'ensemble des points M du plan tels que

$$\|\vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC} - \vec{MD}\| = \|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD}\|.$$

Le construire

4. Quel est l'ensemble des points M du plan tels que

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = MA'^2 + MB'^2 + MC'^2 + MD'^2.$$

Exercice 4.12

Dans le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère l'ensemble Γ des points $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vérifiant $x^2 + \sqrt{3}xy + x - 2 = 0$.

1. Justifier que Γ est une courbe conique à centre dont on précisera la nature et le centre S .
2. On donne les vecteurs $\vec{e}_1 = \frac{1}{2}(\vec{i} - \sqrt{3}\vec{j})$ et $\vec{e}_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\vec{i} + \vec{j})$.
 - (a) Justifier que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base orthonormale du plan vectoriel associé à $\mathcal{P}$.
 - (b) Ecrire une équation de Γ dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
 - (c) En déduire une équation de Γ dans $(S, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
3. Représenter dans $(S, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ la courbe d'équation

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{\frac{4}{3}} = -1.$$

4.7 New series

Exercice 4.13

On suppose que $\mathcal{E}$ est un plan muni d'un repère cartésien $\mathcal{R}$. Donner la représentation matricielle de l'affinité d'axe $\mathcal{D}$ d'équation $x + 2y - 1 = 0$ de direction D' d'équation $3y - x = 0$.

Exercice 4.14

On suppose que $\mathcal{E}$ est de dimension 3 et muni repère cartésien $\mathcal{R}$. Montrer que l'application $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ de représentation matricielle

$$\begin{cases} x' = & -y - z + 1 \\ y' = -2x - y - 2z + 2 \\ z' = x + y + 2z - 1 \end{cases}$$

dans $\mathcal{R}$ est une symétrie dont on précisera les éléments caractéristiques.

Exercice 4.15

On suppose que $\mathcal{E}$ est euclidien de dimension 3 et E est rapporté à une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Déterminer la matrice dans $\mathcal{B}$ de la rotation d'axe dirigée et orientée par $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ et d'angle $\frac{\pi}{3} \bmod (2\pi)$.

Exercice 4.16

On considère l'espace euclidien orienté usuel $\mathbb{R}^3$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que f est une rotation de $\mathbb{R}^3$.
2. Préciser l'axe et la mesure.

Exercice 4.17

Reconnaître les endomorphismes affines de $\mathbb{R}^3$ suivantes :

$$1. \varphi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x + 2y - 2z - 1 \\ 3y + 2z + 6 \\ -4y + 3z + 6 \end{pmatrix}$$

$$2. \varphi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z + \frac{2}{3} \\ -x + \frac{3}{2}y - \frac{1}{2}z + \frac{2}{3} \\ -x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z + \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Exercice 4.18

Quelle est l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $\varphi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -3x - 4y \\ -4x + 3y - 1 \end{pmatrix}$

Exercice 4.19

Démontrer que les représentations paramétriques suivantes définissent le même plan :

$$\begin{cases} x = 2 + s + 2t \\ y = 2 + 2s + t \\ z = 1 - s - t \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 1 + 3u - v \\ y = 3 + 3u + v \\ z = 1 - 2u \end{cases}.$$

Exercice 4.20

On considère les deux droites

$$(\mathcal{D}_1) : \begin{cases} 3 = y - z \\ -1 = -x - y + z \end{cases} \quad \text{et} \quad (\mathcal{D}_2) : \begin{cases} 1 = -x + 3z \\ 2 = -x - 3y \end{cases}.$$

1. Donner les vecteurs directeurs de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.
2. Déterminer une équation paramétrique de $\mathcal{D}_2$.
3. On fixe un point M_α de $\mathcal{D}_2$ dépendant du paramètre α où α est l'abscisse du point M_α . Donner une équation du plan $\mathcal{P}_\alpha$ passant par M_α et contenant $\mathcal{D}_1$.
4. Parmi tous ces plans, y en a-t-il un qui soit perpendiculaire à $\mathcal{D}_2$? Donner son équation le cas échéant.

Exercice 4.21

1. Soit f la transformation de l'espace définie analytiquement par

$$\begin{cases} x' = 4 - 3x + 2y - 2z \\ y' = 8 - 8x + 5y - 4z \\ z' = 4 - 4x + 2y - z \end{cases}$$

- (a) Déterminer les ensembles des points invariants par f .
- (b) Démontrer que pour tout M d'image M' , le milieu de M et M' est dans le plan $\mathcal{P}$ et que (MM') est parallèle à une direction fixe.

- (c) En déduire une caractérisation simple de f .
2. Reconnaître la transformation φ de l'espace affine $\mathbb{R}^3$ d'expression analytique

$$\begin{cases} x' &= \frac{1}{3}(2x - y - z + 1) \\ y' &= \frac{1}{3}(-x + 2y - z + 1) \\ z' &= \frac{1}{3}(-x - y + 2z + 1) \end{cases}$$

Exercice 4.22

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, soit la transformation du plan définie par

$$\begin{cases} x' &= \frac{1}{\sqrt{5}}(x + 2y - 1) \\ y' &= \frac{1}{\sqrt{5}}(-2x + y + 2) \end{cases}$$

1. Calculer les coordonnées de $O' = f(O)$, $I' = f(I)$ et $J' = f(J)$.
2. Montrer que $(O', \overrightarrow{O'I'}, \overrightarrow{O'J'})$ est un repère orthonormé du plan. Est-il direct ?
3. En déduire que f est une isométrie. Est-elle directe ?
4. Déterminer l'ensemble des points invariants par f et reconnaître de f .
5. Donner l'expression analytique de la réciproque f^{-1} de f .
6. Calculer l'image par f de la droite d'équation $2x - y + 1 = 0$.

Exercice 4.23

(A, B, C) est un repère affine du plan affine $\mathcal{P}$; A' , B' et C' les milieux des côtés $[BC]$ et $[CA]$ et $[AB]$ respectivement. Soit α un réel différent de 1, on désigne par I le barycentre de $(B, 1)$ et $(C, -\alpha)$. Déterminer les coordonnées barycentriques

1. de I dans le repère (A', B', C') ;
2. du milieu M de $[AI]$ dans le repère (A', B', C') .

Exercice 4.24

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère orthonormal direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A = (3, \sqrt{3}, 3)$, $B = (3, -\sqrt{3}, 3)$ et $C = (4, 0, 0)$.

1. (a) Démontrer que les 3 points O , A et B déterminent un plan $\mathcal{P}$ dont on précisera une équation cartésienne dans le repère $\mathcal{R}$.
(b) Calculer les distances OA , OB et AB . En déduire la nature OAB .
(c) Les points O , A , B et C sont-ils coplanaires ?
(d)
2. Soit G l'isobarycentre de O , A , B et C
(a) Déterminer l'isobarycentre G dans $\mathcal{R}$.
(b) Démontrer que (GC) est perpendiculaire à $\mathcal{P}$.

- (c) Calculer les coordonnées de D , intersection de $\mathcal{P}$ et (GC) .
3. (a) Démontrer que la transformation de l'espace affine définie par $(x, y, z) \mapsto (x, -y, z)$ est une isométrie.
- (b) Quels sont ses points fixes ?
- (c) Déterminer les images par f de O , A , B et C . Que remarque-t-on ?

Exercice 4.25

Soit $k > 0$ un réel fixé, A et B deux points du plan. Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant $MA = kMB$.

Exercice 4.26

Soit A , B et C les sommets d'un triangle équilatéral de côté 1. Déterminer l'ensemble des points M du plan qui vérifient $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 1$.

Exercice 4.27

Dans le plan euclidien, on donne deux parallélogrammes $ABCD$ et $A'B'C'D'$ de centres respectifs O et O' .

1. Quel est l'ensemble des points M du plan tels que

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = k \quad (k > 0 \text{ fixé}).$$

2. Quel est l'ensemble des points M tels que

$$AM^2 + BM^2 + CM^2 + DM^2 = A'M^2 + B'M^2 + C'M^2 + D'M^2 ?$$

3. Quel est l'ensemble des points M du plan tels que

$$\|\vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC} - \vec{MD}\| = \|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD}\| ?$$

Exercice 4.28

On donne un triangle non aplati ABC . Quel est l'ensemble des points M du plan tels que $MB^2 - MC^2 = AB^2 - AC^2$? En déduire que les hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point D qui vérifie

$$AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2 = CA^2 + BD^2.$$

Exercice 4.29

La bissectrice de l'angle en A du triangle ABC coupe en D . Calculer la distance AD en fonction de $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$.

Exercice 4.30

L'espace est reporté au repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x + y - 2z + 4 = 0$ et les points $A(3, 2, 6)$, $B(1, 2, 4)$ et $C(4, -2, 5)$.

1. (a) Vérifier que les points A , B et C définissent un plan.
(b) Vérifier que ce plan est le plan $\mathcal{P}$.
2. (a) Démontrer que ABC est un triangle rectangle.
(b) Écrire un système d'équations paramétriques de la droite $\mathcal{D}$ passant par O et perpendiculaire à $\mathcal{P}$.
(c) Soit K le projeté orthogonal de O sur $\mathcal{P}$. Calculer OK .
(d) Calculer le volume du tétraèdre $OABC$.
3. On considère dans cette question le système de points pondérés $S = \{(O, 3), (A, 1), (B, 1), (C, 1)\}$
(a) Vérifier que ce système admet un barycentre qu'on notera G .
(b) On note I le centre de gravité de ABC . Démontrer que le point G appartient à (OI) .
(c) Déterminer la distance de G au plan $\mathcal{P}$.
4. Soit Γ l'ensemble des points des points M de l'espace tels que

$$\|3\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 5.$$

Déterminer Γ est la nature de l'ensemble des points communs à Γ et $\mathcal{P}$?

4.8 algebra training + others

Exercice 4.31

1. Rappeler la définition d'un espace vectoriel E sur K , d'un sous-espace vectoriel de E .
2. L'intersection, la réunion, la somme d'une famille (finie ou non) de sous-espaces vectoriels de E est-elle encore un sous-espace vectoriel ? Même question pour le complémentaire d'un sous-espace vectoriel. Qu'est-ce que la « formule de Grassmann » ?

Exercice 4.32

Soit A une partie de E .

1. Rappeler la définition du sous-espace vectoriel engendré par A , que l'on notera $\text{Vect}A$.
2. Comment décrire explicitement $\text{Vect}A$ lorsque A est non vide ? Que vaut par ailleurs $\text{Vect}(\emptyset)$?
3. Soit B une autre partie de E . Que peut-on dire de $\text{Vect}(A \cup B)$?
4. Soient $x, y \in E$. A-t-on $\text{Vect}(x + y) = \text{Vect}x + \text{Vect}y$?

Exercice 4.33

On suppose que E est de dimension 3, et on considère les sous-ensembles suivants :

$$F = \{(x, y, z) \in E : 2x - y + 3z = 0\},$$

$$G = \{(x, y, z) \in E : \exists \lambda \in K : x = \lambda, y = \lambda, z = -2\lambda\},$$

$$H = \{(x, y, z) \in E : \exists \lambda, \mu \in K : x = \lambda, y = \mu, z = -3\lambda + \mu\}.$$

1. Vérifier que F, G , et H sont des sous-espaces vectoriels de E , puis calculer leur dimension.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E .
3. Montrer que $G \subset H$. La somme $F + H$ est-elle directe ?
4. Déterminer $F \cap G \cap H$. La somme $F + G + H$ est-elle directe ?

Exercice 4.34

On note $n = \dim E$.

1. Rappeler les définitions d'une famille libre, d'une famille génératrice, d'une base de vecteurs de E . Que peut-on dire sur le nombre d'éléments de telles familles ?
2. Qu'est-ce que le rang d'une famille de vecteurs ? d'une matrice ? d'une application linéaire ? Qu'est-ce que la « formule du rang » ?
3. On suppose que $n = 3$ et on munit E d'une base. Déterminer, en fonction du paramètre $a \in K$, le rang de la famille de vecteurs $(a, 1, 1)$, $(1, a, 1)$, $(1, 1, a)$. [Plusieurs méthodes sont possibles.]

Exercice 4.35

On note $n = \dim E$, et E^* le dual algébrique de E , c'est-à-dire l'espace vectoriel $L(E, K)$ des formes linéaires sur E .

1. Soit $x \neq 0$ dans E . Prouver qu'il existe $f \in E^*$ telle que $f(x) \neq 0$.
2. Notons $E^{**} = (E^*)^*$ le bidual de E . Soit alors $\varphi : E \rightarrow E^{**}$ définie par $x \mapsto (\varphi(x) : f \mapsto f(x))$.
 - (a) Montrer que φ est linéaire et injective.
 - (b) Soit $(e_i)_{i=1}^n$ une base de E . Pour tout $i \in [1, n]$, on pose $e_i^* : x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \mapsto x_i$. Montrer que e_i^* est une forme linéaire, qu'elle est caractérisée par la relation $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$, et qu'elle constitue une base de E^* (qui est donc de dimension n), appelée base duale de la base (e_i) .
 - (c) Dédurre des résultats précédents que φ est bijective, puis que si $(f_i)_{i=1}^n$ est une base de E^* , alors il existe une base $(e_i)_{i=1}^n$ telle que $e_i^* = f_i$ pour chaque i .
3. Soit (e_i) une base de E , (e_i^*) sa base duale, $p \in [1, n]$ et $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$. Montrer que si $x \in E$, alors $x \in F \iff e_i^* = 0$ pour tout $i \in [p+1, n]$.
4. Soient F une partie non vide de E et $p \in [0, n-1]$. Montrer l'équivalence :
 - (a) F est un sous-espace de dimension p de E ;
 - (b) il existe des formes linéaires $f_1, \dots, f_{n-p}$ linéairement indépendantes dans E^* telles que $F = \bigcap_{i=1}^{n-p} \text{Ker } f_i$.
5. Soit $(e_i)_{i=1}^n$ une base de E . Soit H une partie non vide de E . Établir l'équivalence :
 - (a) H est un hyperplan de E ;

- (b) il existe une forme linéaire non nulle f sur E , définie à un facteur multiplicatif non nul près, telle que $H = \text{Ker } f$;
- (c) il existe un n -uplet $(a_1, \dots, a_n)$ de scalaires non tous nuls, défini à un facteur multiplicatif non nul près, tel que pour tout $x = \sum_i x_i e_i \in E$, on ait $x \in H \iff a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$.
On dit alors que l'équation $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$ est une équation cartésienne de l'hyperplan H (dans la base (e_i)).
6. Prouver que, dans l'implication précédente $(a) \implies (b)$, on peut prendre pour f l'application définie par $f(x) = \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_{n-1}, x)$, où $(u_i)_{i=1}^{n-1}$ est une base de H et $\mathcal{B}$ une base de E .
Application : dans E de dimension 3, muni d'une base, déterminer une équation cartésienne du plan engendré par $u = (2, -3, 1)$ et $v = (1, -1, 2)$.
7. Soit F un sous-espace de dimension $p \leq n-1$. Prouver qu'il existe une matrice $A = (a_{ij}) \in M(n-p, n; K)$, de rang $n-p$, telle que F soit l'ensemble des solutions du système $AX = 0$. Ce système est alors appelé système d'équations cartésiennes du sous-espace F .
Application : dans E de dimension 3, muni d'une base, déterminer un système d'équations cartésiennes de la droite engendrée par $u = (2, -3, 1)$.
8. Réciproquement, démontrer que l'ensemble F des solutions d'un système du type $AX = 0$, avec $A \in M(n-p, n; K)$ est un sous-espace de dimension $\geq p$, et que c'est un sous-espace de dimension exactement p si et seulement si A est de rang $n-p$.
Application : dans E de dimension 3, muni d'une base, trouver l'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + 7y - 2z = 0 \\ -x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

Exercice 4.36

- Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires dans E .
 - Rappeler la définition de la projection p de E sur F parallèlement à G .
 - Montrer que p est linéaire, déterminer alors son noyau et son image. Est-elle injective, surjective ?
 - Vérifier que $p \circ p = p$.
 - Montrer qu'il existe une base naturelle de E dans laquelle la matrice de p est diagonale.
 - Soit q la projection de E sur G parallèlement à F . Quel lien existe-t-il entre p et q ?
- Soit f un endomorphisme de E tel que $f \circ f = f$. Prouver que $E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$ et que f est la projection sur $\text{Im } f$ parallèlement à $\text{Ker } f$.

Exercice 4.37

Avec les notations de l'exercice précédent, l'application $s = 2p - \text{id}$ s'appelle la symétrie par rapport à F parallèlement à G .

Si $x = y + z$ avec $(y, z) \in F \times G$, prouver que $s(x) = y - z$, puis établir les analogues des résultats de l'exercice précédent.

4.8.1 Espaces affines, applications affines

N.B. Sauf mention explicite du contraire, dans tous les exercices de ce paragraphe, E désigne un espace affine de dimension finie sur un corps K , avec $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 4.38

Démontrer les assertions suivantes :

- Pour tous $A, B, C, D \in E$, les propriétés suivantes sont équivalentes :
 - $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$;
 - $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$;
 - $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.
- La relation de Chasles (A1) se traduit par : $\forall A \in E, \forall \vec{x}, \vec{y} \in \vec{E}, (A + \vec{x}) + \vec{y} = A + (\vec{x} + \vec{y})$.
- Pour tout $A \in E$ et tous $\vec{x}, \vec{y} \in \vec{E}$, $A + \vec{x} = A + \vec{y} \iff \vec{x} = \vec{y}$.
- Pour tous $A, B \in E$ et tous $\vec{x}, \vec{y} \in \vec{E}$, $(B + \vec{y}) - (A + \vec{x}) = \overrightarrow{AB} + \vec{y} - \vec{x}$.

Exercice 4.39

Soit F un K -espace affine, et soit $f \in A(E, F)$. Alors f est injective (resp. surjective, bijective) si et seulement si $\vec{f}$ l'est.

Exercice 10

Soit F un K -espace affine. Pour tout $A \in E$ et tout $B \in F$, on note respectivement $\psi_{A,E} : \vec{E} \rightarrow E_A$ et $\psi_{B,F} : \vec{F} \rightarrow F_B$ les isomorphismes linéaires induits par la vectorialisation de E en A et de F en B . Dans ce qui suit, on fixe une application $f : E \rightarrow F$.

- Pour $\sigma \in L(\vec{E}, \vec{F})$, prouver l'équivalence entre les deux conditions suivantes :
 - $\forall A \in E, \forall \vec{x} \in \vec{E}, f(A + \vec{x}) = f(A) + \sigma(\vec{x})$;
 - $\forall A \in E, f = \psi_{f(A),F} \circ \sigma \circ \psi_{A,E}^{-1}$.
- En déduire l'équivalence des conditions :
 - f est affine ;
 - pour tout $A \in E$, f est linéaire de E_A dans $F_{f(A)}$.

Exercice 4.40

- Démontrer les propriétés suivantes des translations :
 - Pour tous $\vec{x}, \vec{y} \in \vec{E}$, $t_{\vec{x}} \circ t_{\vec{y}} = t_{\vec{x} + \vec{y}} = t_{\vec{y}} \circ t_{\vec{x}}$;
 - Pour tout $\vec{x} \in E$, $t_{\vec{x}}$ est bijective, d'inverse $t_{\vec{x}}^{-1} = t_{-\vec{x}}$.
 - Pour tout $f \in A(E)$, pour tout $\vec{x} \in \vec{E}$, $f \circ t_{\vec{x}} = t_{\vec{f}(\vec{x})} \circ f$.
 - Pour tout couple $(A, B) \in E \times E$, il existe une unique translation t telle que $t(A) = B$.

2. Soit $h = h_{A,\lambda}$ une homothétie de E . Démontrer les résultats suivants.

- (a) Si $h' = h_{A,\lambda'}$ est une autre homothétie de centre A , alors la composée $h \circ h'$ est encore une homothétie de centre A , et cette composée est commutative.
- (b) h est bijective, d'inverse $h^{-1} = h_{A, \frac{1}{\lambda}}$.

Exercice 4.41

Rappelons qu'une homothétie de centre A et de rapport $\lambda = -1$ s'appelle symétrie de centre A . On note alors $s_A = h_{A,-1}$.

Soient A, B deux points de E (distincts ou non). Prouver : $s_B \circ s_A = t_{2\overrightarrow{AB}}$.

Exercice 4.42

Dans cet exercice, E et F désignent deux K -espaces vectoriels, munis de leur structure affine canonique. On note O le vecteur nul $\vec{O}_E$ de E , vu comme point de E , et O' le vecteur nul $\vec{O}_F$ de F , vu comme point de F .

1. Soient $\vec{u} \in F$ et $\sigma \in L(E, F)$. Montrer que $f = t_{\vec{u}} \circ \sigma$ est une application affine de E dans F .
2. Réciproquement, soit $f \in A(E, F)$. Montrer que f s'écrit $f = t_{\vec{u}} \circ \sigma$, avec $\vec{u} = \overrightarrow{O'f(O)}$ et $\sigma = \vec{f}$ (en particulier, $\vec{u}$ et σ sont uniques).
3. En déduire une caractérisation des applications linéaires parmi l'ensemble des applications affines de E dans F .
4. En déduire également une description des ensembles $A(K)$ et $GA(K)$.

Exercice 4.43

Soit $f \in A(E)$ telle que $\vec{f} = \lambda \text{id}_{\vec{E}}$ pour un $\lambda \in K^*$. Démontrer :

1. si $\lambda \neq 1$, f est une homothétie [prouver d'abord l'existence d'un unique point fixe];
2. si $\lambda = 1$, f est une translation.

Exercice 4.44

Écrire la représentation matricielle d'une homothétie, d'une translation, dans un repère cartésien donné de E .

Exercice 4.45

1. Montrer que l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes possède une structure de plan affine sur $\mathbb{R}$. (Dans la suite de cet exercice, c'est ainsi qu'on le considérera.)
2. Démontrer : pour toute $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, f est affine si et seulement s'il existe $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que $f(z) = az + b\bar{z} + c$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
3. Parmi les endomorphismes affines du plan $\mathbb{C}$, caractériser ceux qui sont bijectifs.
4. Comparer les résultats précédents avec ceux de l'exercice 13.

Exercice 4.46

Soient G un groupe (noté multiplicativement) et E un ensemble. On appelle action (ou opération) de G sur E toute application $\psi : G \times E \longrightarrow E$ vérifiant

1. pour tout $x \in E$, $\psi(1, x) = x$;
2. pour tout $x \in E$ et tous $g_1, g_2 \in G$, $\psi(g_1, g_2, x) = \psi(g_1, \psi(g_2, x))$.

En outre, on dira que cette action est simplement transitive si, pour tous $x, y \in E$ il existe un et un seul $g \in G$ vérifiant $\psi(g, x) = y$.

Démontrer qu'un espace affine n'est autre qu'un ensemble non vide sur lequel agit simplement transitivement un espace vectoriel $\vec{E}$ (vu comme groupe abélien).

4.8.2 Sous-espaces affines

N.B. Sauf mention explicite du contraire, dans tous les exercices de ce paragraphe, E désigne un espace affine de dimension finie sur un corps K , avec $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 4.47

1. Soient F, G deux sous-espaces de E . Démontrer les résultats suivants.
 - (a) Si $F \subset G$, alors $\vec{F} \subset \vec{G}$ et $\dim F \leq \dim G$.
 - (b) Si $F \subset G$ et $\dim F = \dim G$, alors $F = G$.
 - (c) Si $\vec{F} \subset \vec{G}$ et $F \cap G \neq \emptyset$, alors $F \subset G$.
2. Soit F un sous-espace de dimension p de E . Montrer : si $p \leq d \leq \dim E$, il existe au moins un sous-espace G de dimension d de E qui contient F .
3. La réunion de deux sous-espaces affines, le complémentaire d'un sous-espace affine, sont-ils encore des sous-espaces affines ?

Exercice 4.48

Dans cet exercice, E désigne un espace vectoriel, muni de sa structure d'espace affine canonique. On note O le vecteur nul $\vec{O}$ de E , vu comme point de E .

1. Montrer que tout translaté $t_{\vec{u}}(V)$ d'un sous-espace vectoriel V de E est un sous-espace affine de E , de direction V .
2. Réciproquement, montrer que tout sous-espace affine de E est le translaté d'un sous-espace vectoriel de E .
3. Prouver l'équivalence, pour un sous-espace affine F de E :
 - (a) F est un sous-espace vectoriel de E ;
 - (b) $O \in F$;
 - (c) $F = \vec{F}$.

Exercice 4.49

Les relations de parallélisme, de strict parallélisme entre sous-espaces affines sont-elles des relations d'équivalence ? Si F, G, H sont des sous-espaces de E , a-t-on le droit d'écrire $F \parallel G \parallel H$?

Exercice 4.50

Soient A, B, C, D quatre points non alignés de E . Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $(AB) \parallel (CD)$ et $(AD) \parallel (BC)$.

Exercice 4.51

En utilisant le théorème d'incidence, démontrer les résultats suivants.

1. Deux points distincts engendrent une droite.
2. Un point et un sous-espace de dimension p ne passant pas par ce point engendrent un sous-espace de dimension $p + 1$.
3. Deux droites parallèles distinctes engendrent un plan.
4. Deux droites sécantes distinctes se coupent en un point et un seul, et engendrent un plan.
5. Deux droites non parallèles et non sécantes engendrent un sous-espace de dimension 3.
6. Deux droites sont coplanaires si et seulement si elles sont parallèles ou bien sécantes en un point.
7. Si une droite et un plan se coupent, et si la droite n'est pas dans le plan, leur intersection est réduite à un point et ils engendrent un sous-espace de dimension 3.
8. Si une droite est parallèle à un plan et n'est pas contenue dans ce plan, la droite et le plan engendrent un sous-espace de dimension 3.
9. Si une droite n'est pas parallèle à un plan et ne le rencontre pas, la droite et le plan engendrent un sous-espace de dimension 4.
10. Dans un espace affine de dimension 3, une droite qui n'est pas parallèle à un plan le coupe en un point et un seul.
11. Dans un espace affine de dimension 3, deux plans non parallèles se coupent suivant une droite.

Exercice 4.52

Déduire de l'exercice précédent :

1. les positions relatives possibles pour deux droites d'un plan ;
2. les positions relatives possibles pour deux plans d'un espace de dimension 3 ;
3. les positions relatives possibles pour deux droites d'un espace de dimension 3 ;
4. les positions relatives possibles pour une droite et un plan d'un espace de dimension 3.

Exercice 4.53

On suppose $\dim E = 3$. Soient P_1, P_2 deux plans de E sécants selon une droite D . Soient $A \in P_1, B, C \in P_2$ avec $B \neq C$, tels que A, B, C ne soient pas situés sur D .

1. Vérifier que A, B, C sont non alignés, donc engendrent un plan noté (ABC) .
2. Déterminer la nature de l'intersection $P_1 \cap (ABC)$.
3. Construire géométriquement cette intersection.

Exercice 4.54

Supposons $\dim E = 3$. Soient D_1, D_2 deux droites parallèles, soient P_1 un plan contenant D_1 et P_2 un plan contenant D_2 tels que P_1 et P_2 soient sécants selon une droite. Démontrer que Δ est parallèle à D_1 et à D_2 : c'est le **théorème du toit**.

Exercice 4.55

On suppose $\dim E = 3$. Soient P et P' deux plans sécants selon une droite Δ . Soit O un point n'appartenant ni à P , ni à P' . Soient D_1, D_2, D_3 trois droites non coplanaires, concourantes en O et coupant P (resp. P') en A, B, C (resp. A', B', C').

1. Vérifier que A, B, C (resp. A', B', C') sont distincts et non alignés.
2. (a) Montrer que (BC) et $(B'C')$ sont sécantes ou parallèles.
(b) Montrer que si ces droites sont parallèles, elles sont également parallèles à Δ .
(c) Montrer que si ces droites sont sécantes, leur point commun est situé sur Δ .
3. On suppose que $(AB), (AC), (BC)$ coupent Δ en I, J, K , respectivement. Prouver que I, J, K sont sur $(A'B'), (A'C'), (B'C')$, respectivement.

Exercice 4.56

Prouver les assertions suivantes.

1. Si h est une homothétie de centre A et de rapport λ , alors $M, M' = h(M)$ et A sont alignés et $\frac{\overline{AM'}}{\overline{AM}} = \lambda$.
2. Réciproquement, si A, B, C sont alignés avec $A \neq B$ et $A \neq C$, alors il existe une unique homothétie de centre A telle que $h(B) = C$: celle dont le rapport vaut $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$.

Exercice 4.57

Soit F un autre K -espace affine et soit $f \in A(E, F)$. Démontrer les résultats suivants.

1. Si G est un sous-espace affine de E , alors $f(G)$ est un sous-espace affine de F , de direction $\overrightarrow{f(G)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{G})$. En outre, $\dim f(G) \leq \dim G$, avec égalité si f est injective.
2. Si H est un sous-espace affine de F , alors $f^{-1}(H)$ est soit vide, soit un sous-espace affine de E , de direction $\overrightarrow{f^{-1}(H)} = \overrightarrow{f}^{-1}(\overrightarrow{H})$.

Exercice 4.58

Soit σ une application linéaire entre deux espaces vectoriels E et F . On fixe $\overrightarrow{b} \in F$. Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $\sigma(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{b}$ est soit vide, soit un sous-espace affine de E , de direction à préciser.

Exercice 4.59

1. Soit $f \in GA(E)$. Vérifier que f envoie tout sous-espace de E sur un sous-espace de même dimension.
2. Réciproquement, prouver que si F et G sont des sous-espaces de même dimension de E , alors il existe $f \in GA(E)$ tel que $f(F) = G$. Ce f est-il unique ?

Exercice 4.60

On suppose E de dimension ≥ 2 . Soient H un hyperplan de E , D une droite supplémentaire de H dans E , et p la projection sur H parallèlement à $\vec{D}$.

1. Déterminer l'image réciproque par p d'un point H , puis d'une droite de H .
2. Déterminer les images par p :
 - (a) d'une droite,
 - (b) de trois points alignés distincts,
 - (c) de deux droites parallèles distinctes, dont la direction commune n'est pas $\vec{D}$.

Dans chacun des cas, caractériser les différentes situations possibles.

Exercice 4.61

Soit f un endomorphisme affine de E . Démontrer que f est une projection si et seulement si $f \circ f = f$.

Exercice 4.62

Démontrer le « théorème de Thalès (et réciproque) dans un triangle ».

Exercice 4.63

On suppose E de dimension $n \geq 1$, muni d'un repère cartésien $\mathcal{R} = (O; \mathcal{B})$, avec $\mathcal{B} = (\vec{e}_i)_{i=1}^n$.

1. Soit $f : E \rightarrow K$ une application (ensembliste). Prouver l'équivalence des assertions :
 - (a) f est une forme affine sur E ;
 - (b) il existe des scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ et β tels que :

$$\text{si } M = (x_i)_{i=1}^n \text{ dans } \mathcal{R}, \text{ alors } f(M) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i + \beta.$$

2. En déduire les résultats suivants :

- (a) Tout hyperplan H de E possède une équation de la forme $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i + \beta = 0$, où les scalaires α_i sont non tous nuls. On l'appelle équation cartésienne de H dans $\mathcal{R}$. En outre, toute autre équation cartésienne de H dans $\mathcal{R}$ est de la forme $\sum_{i=1}^n (\lambda \alpha_i) x_i + \lambda \beta = 0$, avec $\lambda \in K^*$.
- (b) Réciproquement, toute équation de la forme $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i + \beta = 0$, où les scalaires α_i sont non tous nuls, est une équation cartésienne d'un hyperplan H de E dans $\mathcal{R}$.

- (c) Si $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i + \beta = 0$ est une équation cartésienne d'un hyperplan H , alors $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0$ est une équation cartésienne de sa direction $\vec{H}$ dans la base $\mathcal{B}$.
- (d) Deux hyperplans H et H' , d'équations cartésiennes respectives $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i + \beta = 0$ et $\sum_{i=1}^n \alpha'_i x_i + \beta' = 0$, sont parallèles si et seulement s'il existe $\lambda \in K^*$ tel que $\alpha'_i = \lambda \alpha_i$ pour tout i .
- (e) En dimension 2, toute droite D admet une équation cartésienne du type $ax + by + c = 0$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$. Un vecteur directeur de D est alors donné par $\vec{u} = (-b, a)$, et le scalaire $m = \frac{-b}{a}$ s'appelle la pente de D (on dit que la pente est infinie si $a = 0$).
3. Soit H un hyperplan de E défini par un repère cartésien $(A; (\vec{u}_j)_{j=1}^n)$. Après l'avoir justifiée, montrer que l'équivalence

$$M \in H \iff \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{n-1}, \vec{AM}) = 0$$

fournit une équation cartésienne de H dans $\mathcal{R}$.

4. (a) Soit F un sous-espace affine de dimension $p \leq n - 1$. Montrer qu'il existe une matrice $A = (\alpha_{ij}) \in M(n - p, n; K)$ de rang $n - p$ et une matrice $B = (\beta_i) \in M(n - p, 1; K)$ telles que F soit l'ensemble des solutions du système

$$AX = B, \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \dots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \dots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n-p,1}x_1 + \dots + \alpha_{n-p,n}x_n = \beta_{n-p} \end{cases}$$

appelé systèmes d'équations cartésiennes de F . Montrer qu'alors $\vec{F}$ est l'ensemble des solutions du système homogène $AX = 0$.

- (b) Réciproquement, prouver que l'ensemble F des solutions d'un système du type $AX = B$, avec $A \in M(n - p, n; K)$ et $B \in M(n - p, 1; K)$ est soit vide, soit un sous-espace affine de dimension $\geq p$, et que c'est un sous-espace de dimension p si et seulement si A est de rang $n - p$.

Exercice 4.64

On fixe un repère cartésien $\mathcal{R} = (O; (\vec{e}_i)_{i=1}^n)$ de E .

1. Soit F un sous-espace de dimension p de E , de repère cartésien $(A; (\vec{u}_i)_{i=1}^n)$. On note $(a_i)_{i=1}^n$ les coordonnées de A dans $\mathcal{R}$ et $(b_{ij})_{i=1}^n$ les composantes de $\vec{u}_j$ dans la base $(\vec{e}_i)_{i=1}^n$, pour chaque $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

Démontrer : si M est un point de E , de coordonnées $(x_i)_{i=1}^n$ dans $\mathcal{R}$, alors

$$M \in F \iff \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in K^p : \begin{cases} x_1 = a_1 + \sum_{j=1}^p b_{1,j} \lambda_j \\ x_2 = a_2 + \sum_{j=1}^p b_{2,j} \lambda_j \\ \vdots \\ x_n = a_n + \sum_{j=1}^p b_{n,j} \lambda_j. \end{cases}$$

Un tel système d'équations s'appelle un paramétrage (ou représentation paramétrique) de F dans $\mathcal{R}$.

2. Application. On suppose E de dimension 3, muni d'un repère, et on considère la droite $D = A + K\vec{u}$, où $A = (2, 3, -1)$ et $\vec{u} = (-1, 4, -2)$.

(a) Donner un paramétrage de D .

(b) En déduire un système d'équations cartésiennes de D .

(c) Inversement, supposant connu le système d'équations de la question précédente, retrouver un paramétrage de D .

Exercice 4.65

On suppose $\dim E = 2$. Soient D, D' deux droites d'équations cartésiennes respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ dans un repère cartésien donné (avec évidemment $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(a', b') \neq (0, 0)$).

1. On note $S = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$. Prouver : $D \parallel D'$ si et seulement si $\det S = 0$ (donc D et D' sont sécantes si et seulement si $\det S \neq 0$).

Application. Donner une autre preuve du théorème de Thalès en dimension 2.

2. Soit D'' une autre droite, d'équation cartésienne $a''x + b''y + c'' = 0$ (avec $(a'', b'') \neq (0, 0)$).

On note $S = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$. Démontrer : D, D', D'' sont parallèles ou concourantes si et seulement si $\det S = 0$.

Application. Démontrer le **Théorème de Ceva** [Giovanni Ceva, 1648 – 1734], dont voici l'énoncé :

Soit ABC un triangle non aplati d'un plan affine, et soient $P \in (BC)$, $Q \in (CA)$, $R \in (AB)$ trois points distincts de A, B, C . Alors

$$(AP), (BQ), (CR) \text{ sont parallèles ou concourantes } \iff \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -1.$$

Exercice 4.66

On suppose E de dimension 3, muni d'un repère cartésien $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit D une droite non parallèle au plan $O + \text{Vect}(\vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer qu'il existe $a, b, p, q \in K$ tels que D admette

$$\begin{cases} x &= az + p \\ y &= bz + q \end{cases}$$

pour système d'équations cartésiennes dans $\mathcal{R}$.

2. Déterminer un système d'équations cartésiennes (dans $\mathcal{R}$) de la projection de D sur $(O; \vec{i}, \vec{j})$ parallèlement à $\text{Vect}(\vec{k})$.

Exercice 4.67

Soit X une partie non vide de E .

1. Soit F un sous-espace de E . Prouver l'équivalence : $X \subset F \iff \text{Aff } X \subset F$.
2. Démontrer : X est génératrice dans E si et seulement si X n'est contenue dans aucun hyperplan de E .
3. On suppose que $X = \{A_0, \dots, A_p\}$ est une famille finie de $p+1$ points de E , et que E est de dimension n . Démontrer les assertions suivantes :
 - (a) X est libre si et seulement si $p \leq n$ et X n'est contenue dans aucun sous-espace de dimension $p-1$ de E ;
 - (b) X est génératrice si et seulement si $p \geq n$ et X n'est contenue dans aucun hyperplan de E ;
 - (c) X est une base affine si et seulement si $p = n$ et X n'est contenue dans aucun hyperplan de E .

4.8.3 Barycentres et convexité

N.B. Dans tous les exercices de ce paragraphe, E désigne un espace affine de dimension finie sur un corps K , avec $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 4.68

Soient $A, B \in E$, soient $\lambda, \mu \in K$ non nuls et de somme non nulle. Compléter les assertions :

$$G = \text{bar}((A, \lambda), (B, \lambda)) \iff \frac{\overline{GA}}{\overline{GB}} = \dots \iff \frac{\overline{AG}}{\overline{AB}} = \dots \iff \frac{\overline{BG}}{\overline{BA}} = \dots$$

Exercice 4.69

Soient A, B, C trois points de E , soient $P = \text{bar}((A, 1), (B, 2), (C, -4))$ et $Q = \text{bar}((A, -2), (B, 3), (C, 1))$. Calculer $\overline{PQ}$ de deux façons :

1. en revenant à la définition d'un barycentre ;
2. en utilisant la notation introduite en cours (« combinaisons de points »).

Exercice 4.70

Soit $ABCD$ un tétraèdre non aplati de E . On note A', B', C', D' les centres de gravité respectifs de BCD, ACD, ABD, ABC .

1. Vérifier que (AA') , (BB') , (CC') et (DD') sont des droites, et qu'elles sont distinctes.
2. Soit G le centre de gravité de $ABCD$. Démontrer :

$$(AA') \cap (BB') \cap (CC') \cap (DD') = \{G\}, \quad \frac{\overline{AG}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{BG}}{\overline{BB'}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{CC'}} = \frac{\overline{DG}}{\overline{DD'}} = \frac{3}{4},$$

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DD'} = \vec{0}.$$

3. On pose $M = \frac{A+B}{2}$, $N = \frac{C+D}{2}$, $P = \frac{D+A}{2}$, $Q = \frac{B+C}{2}$, $R = \frac{A+C}{2}$, $S = \frac{B+D}{2}$.
Prouver que G est le milieu de (M, N) , de (P, Q) et de (R, S) .

Exercice 4.71

Soit F une partie non vide de E . Prouver que F est un sous-espace de E si et seulement si toute droite joignant deux points de F reste dans F .

Exercice 4.72

On suppose que E est un plan, muni d'un repère affine $\mathcal{R} = (A, B, C)$.

1. Démontrer : trois points de E sont alignés si et seulement si le déterminant de leurs coordonnées barycentriques dans $\mathcal{R}$ est nul.
2. Soit D une droite de E . Montrer qu'il existe $a, b, c \in K$, non tous égaux, tels que pour tout point $M \in D$, de coordonnées barycentres (x, y, z) dans $\mathcal{R}$, on ait $ax + by + cz = 0$. On dit alors que $ax + by + cz = 0$ est une équation barycentrique de la droite D dans le repère $\mathcal{R}$, et que a, b, c sont les coordonnées tangentielles de D dans $\mathcal{R}$.
3. Réciproquement, prouver que toute équation du type $ax + by + cz = 0$, avec $a, b, c \in K$ non tous égaux et $x + y + z = 1$, est l'équation barycentrique d'une droite D de E .
4. Montrer que deux triplets de coordonnées tangentielles (a, b, c) et (a', b', c') représentent la même droite de E si et seulement s'ils sont proportionnels.
5. Déterminer une équation barycentrique dans $\mathcal{R}$ de :
 - (a) (AB) , (BC) , (CA) ;
 - (b) la médiane de ABC issue de A ;
 - (c) la parallèle à (BC) passant par A .

Exercice 4.73

En utilisant l'exercice précédent, démontrer le **théorème de Ménélaüs** [Ménélaüs d'Alexandrie, I^{er} siècle], dont l'énoncé est le suivant : Soit ABC un triangle non aplati d'un plan affine, et soient $P \in (BC)$, $Q \in (CA)$, $R \in (AB)$ trois points distincts de A, B, C . Alors

$$P, Q, R \text{ sont alignés} \iff \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1.$$

Exercice 4.74

On considère l'espace vectoriel $X = \vec{E} \times K$, qu'on munit, ainsi que K lui-même, de sa structure affine canonique.

1. On définit l'application $\varphi : X \longrightarrow K, (\vec{x}, \lambda) \longmapsto \lambda$. Prouver que φ est une forme linéaire non nulle sur X . En déduire que $H = \varphi^{-1}(1) = \vec{E} \times \{1\}$ est un hyperplan affine de X , de direction $\vec{H} = \text{Ker}\varphi = \vec{E} \times \{0\}$.
2. Soient $\sigma : \vec{E} \longrightarrow \vec{H}, \vec{x} \longmapsto (\vec{x}, 0)$ et, pour tout $A \in E, f_A : E \longrightarrow H, M \longmapsto (\overrightarrow{AM}, 1)$. Montrer que σ est un isomorphisme linéaire de $\vec{E}$ sur $\vec{H}$, et en déduire que f_A est un isomorphisme affine de E sur H , quel que soit $A \in E$.
On dit qu'on a plongé E dans X via f_A . Faire un dessin pour comprendre.
3. Soit $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ un système de points pondérés de E . On fixe $A \in E$ et on pose $A'_i = f_A(A_i)$ pour tout $i \in I$. Les A'_i étant des éléments de H , donc des vecteurs de X , on peut parler de la combinaison linéaire $\sum \lambda_i A'_i$ pour n'importe quelles valeurs des λ_i . Démontrer les assertions suivantes :
 - (a) $\sum \lambda_i A'_i \in H \iff \sum \lambda_i = 1$, et si ces conditions sont réalisées, on a $f_A^{-1}(\sum \lambda_i A'_i) = \text{bar}(A_i, \lambda_i)$;
 - (b) $\sum \lambda_i A'_i \in \vec{H} \iff \sum \lambda_i = 0$ et si ces conditions sont réalisées, on a $\sigma^{-1}(\sum \lambda_i A'_i) = \vec{v}$, où $\vec{v}$ est la valeur constante de $\sum \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$ pour $M \in E$.
4. On identifie E avec H de $\vec{E}$ avec $\vec{H}$ grâce aux isomorphismes de 2. Quelle formulation obtient-on alors pour les résultats de la question précédente ?

Exercice 4.75

Soit F un autre K -espace affine. Prouver qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est affine si et seulement si elle conserve tout barycentre de deux points (c'est-à-dire si et seulement si la restriction de f à toute droite affine de E est affine).

Exercice 4.76

On suppose que $K = \mathbb{R}$. Prouver que tout segment de E est convexe.

Exercice 4.77

On suppose que $K = \mathbb{R}$. Soient X, Y deux convexes de E . Démontrer que l'ensemble Z des milieux de segments $[AB]$, avec $A \in X$ et $B \in Y$, est convexe.

Exercice 4.78

On suppose que $K = \mathbb{R}$. Démontrer que si X est une partie de E , alors $\text{Conv}X$ est exactement l'ensemble des combinaisons convexes de points de X .

Exercice 4.79

On suppose que $K = \mathbb{R}$. Soit H un hyperplan de E , soit $A \in E \setminus H$, et soit H_A le demi-espace ouvert de E contenant A . Démontrer que $H_A = \{M \in E : [AM] \cap H = \emptyset\}$. [Raisonnement par contraposée.]

Exercice 4.80

Soient $\mathcal{E}$ un affine de dimension 3 et de direction espace vectoriel de dimension $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + 3z = 0\}$ et $A = (-1, 1, 0)$

1. Justifier que F est un sous espace vectoriel de E dont on proposera une base.
2. Déterminer une équation cartésienne du sous espace affine $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ de direction F et passant par $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
3. Sans utiliser l'équation cartésienne de $\mathcal{F}$, proposer une équation paramétrique de $\mathcal{F}$.
4. Proposer une équation paramétrique du supplémentaire $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{E}$.
5. Déterminer l'expression analytique de la projection p sur $\mathcal{F}$ suivant $\mathcal{G}$.
6. En déduire celle de la symétrie par rapport à $\mathcal{F}$ suivant $\mathcal{G}$.
7. L'affinité $\mathcal{A}_{3,p} = 3\text{id}_{\mathcal{E}} - 2p$ admet-elle de points fixes ?