I APPLICATIONS AFFINES GÉNÉRALES

1. * : Caractérisation des applications affines continues par la conservation des parallélogrammes, ou des milieux.

   Soit f une application de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{E}$ conservant les parallélogrammes. Si l'on note M' l'image par f d'un point M, cela signifie que si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$.

   (a) Montrer que cette condition équivaut à la conservation des milieux, à savoir que si I est le milieu de (A, B), alors I' est le milieu de (A', B').

   (b) Montrer que si f conserve les mileux, alors f tous les barycentres à coefficients rationnels, c'est-à-dire que f est $\mathbb{Q}$-affine.

   Remarque : grâce à l'axiome du choix, on peut fabriquer des applications $\mathbb{Q}$-affines mais pas $\mathbb{R}$-affines ; mais on ne les rencontrera jamais construites de façon "normale". On peut aussi prouver qu'une application $\mathbb{Q}$-affine continue est $\mathbb{R}$-affine.

2. :

   (a) Montrer qu'une application affine f de E dans E qui transforme toute droite en une droite qui lui est parallèle est soit une homothétie de rapport non nul soit une translation de vecteur non nul, suivant que f possède ou non un point fixe.

   (b) * Montrer qu'on a le même résultat sans supposer f affine a priori, mais uniquement pour un espace de dimension supérieure ou égale à 2. Et en dimension 1 ?

3. : Soient quatre points distincts A, B, C, D tels que $(AB) \,//\, (CD)$. On appelle J le point d'intersection de (AD) et (BC), et I le point d'intersection de (AC) et (BD).
   On désigne alors par K le point d'intersection de (IJ) et (AB) et par L le point d'intersection de (IJ) et (CD).

   (a) Montrer que K et L sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$. (Utiliser des homothéties de centres I et J).

   (b) Montrer que $\dfrac{\overline{IK}}{\overline{IL}} = -\dfrac{\overline{JK}}{\overline{JL}}$.

4. * : Le plan est rapporté au repère $\mathcal{R} = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

   (a) Démontrer que les courbes C_1 d'équation $y = \cos x$ et $C_2 : y = \cos^2 x$ sont homothétiques. On présentera la démonstration sous la forme : $M(x, y) \in C_2 \Leftrightarrow h(M) \in C_1$, où h est une homothétie dont on donnera les caractéristiques.

   (b) Démontrer que faire subir à la courbe $y = e^x$ une translation de vecteur $\lambda \overrightarrow{i}$, revient à lui faire subir une dilatation (ou affinité).

   (c) Démontrer que faire subir à la parabole $y = x^2$ une dilatation de base (Oy) et de direction (Ox) revient à lui faire subir une homothétie, mais que en revanche, il n'en va pas de même pour la courbe $y = \operatorname{ch} x - 1$ (qui ressemble pourtant à $y = x^2$).

5. : Le plan est rapporté au repère $\mathcal{R} = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Donner les expressions analytiques et la matrice complète dans $\mathcal{R}$ de :

   (a) La translation de vecteur $\overrightarrow{u} \left| \begin{array}{l} a \\ b \end{array} \right.$.

   (b) L'homothétie de centre $\Omega \left| \begin{array}{l} a \\ b \end{array} \right.$ et de rapport λ.

   (c) La projection sur la droite $y = -2x + 1$ parallèlement à $y = 3x$.

   (d) La symétrie par rapport à la droite $y = -2x + 1$ parallèlement à $y = 3x$.

   (e) La dilatation de base $y = -2x + 1$, de direction $y = 3x$ et de rapport 2.

   (f) L'application affine qui fixe tous les points de (Ox) et transforme $J \left| \begin{array}{l} 0 \\ 1 \end{array} \right.$ en $J' \left| \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \right.$ (quelle est sa nature ?)

   (g) L'homothétie ou la translation qui envoie $A \left| \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \right.$ sur $A' \left| \begin{array}{l} \alpha \\ 4 \end{array} \right.$ et $B \left| \begin{array}{l} 5 \\ 6 \end{array} \right.$ sur $B' \left| \begin{array}{l} 7 \\ 6 \end{array} \right.$ (on déterminera α).

(h) La composée de la dilatation (ou affinité) de base (Ox) de direction (Oy) de rapport λ_1, avec la dilatation de base (Oy) de direction (Ox) et de rapport λ_2.

6. : L'espace est rapporté à $\mathcal{R} = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. Donner l'expression analytique et la matrice complète dans $\mathcal{R}$ de :

(a) $t_{\overrightarrow{u}}$ avec $\overrightarrow{u} \left| \begin{array}{l} a \\ b \\ c \end{array} \right.$.

(b) $h_{\Omega,\lambda}$ avec $\Omega \left| \begin{array}{l} a \\ b \\ c \end{array} \right.$.

(c) La projection sur le plan $x + y + z = 1$, parallèlement à $\left| \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right.$.

(d) La projection sur la droite $\left| \begin{array}{l} x = \lambda + 1 \\ y = 2\lambda + 1 \\ z = 3\lambda - 1 \end{array} \right.$ parallèlement à $x + y + z = 0$.

(e) La symétrie par rapport à $x + y + z = 1$ parallèlement à $\left| \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right.$.

(f) La symétrie par rapport à $\left\{ \begin{array}{l} x = \lambda + 1 \\ y = 2\lambda + 1 \\ z = 3\lambda - 1 \end{array} \right.$ parallèlement à $x + y + z = 0$.

(g) La composée des deux précédentes.

7. : On donne ci-dessous la matrice complète dans une repère fixé d'une application affine plane f et on demande de donner les expressions analytiques, de rechercher les points invariants, de déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application linéaire associée $\overrightarrow{f}$, puis de déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application f.

$$\mathbf{a} : \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right] ; \mathbf{b} : \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{array}\right] ; \mathbf{c} : \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{array}\right] ;$$
$$\mathbf{d} : \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right] ; \mathbf{e} : \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{array}\right] ; \mathbf{f} : \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

8. Mêmes questions que 7., mais dans l'espace :

$$\mathbf{a} : \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] ; \mathbf{b} : \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] ; \mathbf{c} : \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] ;$$
$$\mathbf{d} : \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \mathbf{e} : \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right] ; \mathbf{f} : \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right] ;$$
$$\mathbf{g} : \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right] ; \mathbf{h} : \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

9. : Décomposer en produit de deux applications affines "classiques" (homothéties, translations, projections, symétries, dilatations) qui commutent.

$$\mathbf{a} : \left\{ \begin{array}{l} x' = -2x \\ y' = 2y \end{array} \right. ; \mathbf{b} : \left\{ \begin{array}{l} x' = x + a \\ y' = -y - b \end{array} \right. ; \mathbf{c} : \left\{ \begin{array}{l} x' = x + y \\ y' = x + y \end{array} \right.$$
$$\mathbf{d} : \left\{ \begin{array}{l} x' = 2x + y \\ y' = x + 2y \end{array} \right. ; \mathbf{e} : \left\{ \begin{array}{l} x' = 4x + y \\ y' = x + 4y \end{array} \right. ; \mathbf{f} : \left\{ \begin{array}{l} x' = x + y \\ y' = y \end{array} \right.$$
$$\mathbf{g} : \left\{ \begin{array}{l} x' = ex \\ y' = -ex + ey \end{array} \right. ; \mathbf{h} : \left\{ \begin{array}{l} x' = 2x + y + 3 \\ y' = x + 2y + 3 \end{array} \right. ; \mathbf{i} : \left\{ \begin{array}{l} x' = 4x + y + 5 \\ y' = x + 4y + 7 \end{array} \right.$$

II ISOMÉTRIES ET SIMILITUDES

10. : Le plan est rapporté au repère orthonormé $\mathcal{R} = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Donner les expressions analytiques réelles et complexes et la matrice complète dans $\mathcal{R}$ de :

    (a) La réflexion d'axe $y = 2x + 1$.

    (b) La réflexion glissée d'axe $y = 2x + 1$ et de vecteur de glissement $\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$.

11. : L'espace est rapporté au repère orthonormé $\mathcal{R} = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. Donner les expressions analytiques et la matrice complète dans $\mathcal{R}$ de :

    (a) La réflexion de plan $x + y = 1$.

    (b) La réflexion glissée de plan $x + y = 1$ et de vecteur de glissement $\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$.

    (c) Le demi-tour d'axe passant par $A = O + \overrightarrow{i}$ dirigé par $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$.

    (d) La rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour de $(A, \overrightarrow{n})$ avec $A = O + \overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{n} = 3\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j}$ (commencer par la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour de $\overrightarrow{n}$).

    (e) Le vissage d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour de $(A, \overrightarrow{n})$ avec $A = O + \overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{n} = 3\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j}$, de vecteur de translation $\overrightarrow{n}$.

12. Montrer que si un objet en dimension 3 possède un plan de symétrie, alors lui faire subir une réflexion revient à lui faire subir un déplacement (indiquer dans quel cas ce déplacement est une rotation et dans quel cas c'est une translation).

    La réciproque est-elle vraie ?

13. * :

    (a) Montrer que si deux applications d'un ensemble dans lui-même commutent et si l'une admet un point fixe unique, alors l'autre admet ce même point pour point fixe.

    (b) Qu'en déduit-on pour la composée de deux homothéties ? De deux rotations planes ?

    (c) Donner un exemple de deux rotations propres en dimension 3 qui commutent et qui n'ont pas le même axe.

14. : A quelle condition nécessaire et suffisante deux demi-tours affines commutent-ils ?

15. : En utilisant 13. (b) montrer que tout groupe fini de rotations planes est formé de rotations de même centre.

16. * : Construction de l'image d'un point par une similitude directe plane.

    Soit f une similitude plane directe de centre Ω, A un point diférent de Ω et A' son image par f, (C) le cercle de centre A passant par Ω et (C') son image par f, M un point de (C) et M' son image par f. On suppose (C) et (C') sécants en Ω et I.

    (a) Montrer que si M est différent de I, M' est la deuxième intersectin de la droite (IM) avec (C') (on montrera que $\widehat{(I\Omega)\,(IM)} = \widehat{(I\Omega)\,(IM')}$)

    (b) Déterminer $\Gamma' = f(\Gamma)$.

    (c) Construre l'image d'un point M quelconque.

17. : Montrer que si une similitude laisse globalement invariante une partie bornée de l'espace ayant deux points au moins, cette similitude est forcément une isométrie.

18. * :

    (a) Montrer que les courbes $C_1 : \rho = f(\theta)$ et $C_2 : \rho = af(\theta - \theta_0)$ $(a > 0)$ sont semblables et donner les éléments caractéristiques de la similitude correspondante.

    (b) Appliquer à

        i. $C_1 : \rho = \cos n\theta$ et $C_2 : \rho = \sin n\theta$ $(n > 0)$

        ii. $C_1 : \rho = \tan n\theta$ et $C_2 : \rho = \cot n\theta$ $\quad (n > 0)$

        iii. $C_1 : \rho = 1 + \cot\theta$ et $C_2 : \rho = \dfrac{\sin\theta}{\sin\theta - \cos\theta}$

19. * : Montrer que les courbes $C_1 : \rho = \dfrac{\sin 3\theta}{\sin 2\theta}$ et $C_2 : \rho = \dfrac{1}{\cos \dfrac{\theta}{3}}$ sont semblables.

20. * :

    (a) Montrer qu'il existe exactement deux déplacements échangeant deux cercles de l'espace de même rayon situés dans des plans sécants et centrés sur la droite D intersection de ces deux plans : les deux retournements d'axes les deux droites perpendiculaires passant par le milieu des centres des 2 cercles, perpendiculaires à D, et faisant le même angle avec les plans des cercles.

    (b) Étudier les déplacements échangeant deux cercles dans les autres cas.