Mathématiques Pour Etudiants de Première Année. Recueils d'Exercices et Examens corrigés.

Research · February 2018

DOI: 10.13140/RG.2.2.18723.14884/1

2 authors:

Ahmed Attar
Abou Bakr Belkaid University of Tlemcen

Sofiane El-Hadi Miri
Abou Bakr Belkaid University of Tlemcen

République Algérienne Démocratique et populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen

جامعة أبو بكر بلقايد

UNIVERSITÉ DE TLEMCEN

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Algèbre et Analyse

Recueil d'Exercices Corrigés

Mathématiques

Pour Etudiants de Première Année

ATTAR Ahmed **MIRI Sofiane Elhadi**

Algèbre et Analyse

Recueil d'Exercices Corrigés

ATTAR Ahmed MIRI Sofiane Elhadi

8 mars 2018

Préface

Ce polycopié est un ouvrage, principalement destiné aux étudiants de première année Génie Industriel, mais aussi à tous les étudiants de première année des filières technologiques et scientifiques. Il fait suite au polycopié [8] publié par la faculté de technologie, et contenant les notions présentées en cours de mathématiques.

Nous y présentons différents exercices de Mathématiques de degré de difficulté variable, avec des corrigés détaillés.

Le lecteur y trouvera aussi des exercices supplémentaires sans corrigé, ainsi que certains sujets d'examens.

Avant chaque série d'exercices, nous faisons un bref rappel des notions de cours ; qu'on pourra retrouver en détail dans [8].

Le manuscrit couvre différents sujets de l'analyse et de l'algèbre, qui constituent les programmes des matières Analyse, Algèbre et Outils mathématiques.

Nous avons scindé ce recueil d'exercices en trois parties, la première partie est consacrée à l'Algèbre, les exercices proposés traitent de la théorie des ensembles, des applications et leur classification, de l'arithmétique dans $\mathbb{Z}$, des nombres complexes, du calcul matriciel, des espaces vectoriels ainsi que les applications linéaires. La deuxième partie est quant à elle consacrée à l'analyse, on y trouvera des exercices sur les suites, et sur les fonctions réelles de la variable réelle. La troisième partie, est dédiée aux exercices portant sur le calcul intégral et aux équations différentielles.

A la toute fin de ce recueil, le lecteur trouvera les corrigés détaillés des examens d'analyse et d'algèbre des années universitaires allant de 2011 à 2016.

Nous tenons à exprimer notre gratitude et notre reconnaissance aux deux spécialistes anonymes qui ont expertisé ce modeste ouvrage. Grâce à leurs commentaires nous avons pu améliorer la présentation du présent manuscrit dans sa forme et dans son contenu. Nous les remercions pour leur travail consciencieux et professionnel et pour leurs remarques toujours pertinentes.

Comme toute première version de tout ouvrage, ce recueil peut contenir certaines erreurs et fautes de frappe, nous invitons le lecteur à nous les signaler afin d'améliorer la présentation et le contenu du présent manuscrit.

Table des matières

Première partie

Algèbre

Chapitre 1

Logique et Théorie des Ensembles

Sommaire

1.1 Exercices

Avant d'en venir aux ensembles nous commençons par une série d'exercices sur la logique mathématique.

Exercice 1.1. *Soient p et q deux propositions données, en utilisant la table de vérité, montrer que*

$$\overline{(p \Rightarrow q)} \Leftrightarrow (p \wedge \overline{q})$$

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$$

Exercice 1.2. *Soient p, q et r trois propositions données, montrer les propriétés suivantes*

1. $\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p$
2. $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$
3. $(p \vee p) \Leftrightarrow p$
4. $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ *commutativité du* $\wedge$

5. *$(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$ commutativité du $\vee$*
6. *$[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$ associativité du $\wedge$*
7. *$[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$ associativité du $\vee$*
8. *$\overline{(p \wedge q)} \Leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q})$ loi de Morgan*
9. *$\overline{(p \vee q)} \Leftrightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q})$ loi de Morgan*

Exercice 1.3. *Soient p, q et r trois propositions données. En utilisant la table de vérité, vérifier que les propositions suivantes sont vraies*

1. $(p \vee q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow q]$
2. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge r)]$

Exercice 1.4. *Former la négation des propositions suivantes :*

$[(p \Rightarrow q) \vee r] \wedge (p \vee q)$

$[(p \wedge q) \vee r] \Rightarrow (p \wedge r)$

Exercice 1.5. *Montrer à l'aide d'un exemple que la relation*

$$(\forall x)(\exists y)P \Rightarrow (\exists y)(\forall x)P$$

n'est généralement pas vraie.

Exercice 1.6. *Raisonnement par récurrence : Montrer par récurrence ce qui suit*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k &= 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \\
\sum_{k=1}^{n} (2k-1) &= (2(1)-1) + (2(2)-1) + \ldots + (2(n)-1) = n^2 \\
\sum_{k=1}^{n} k^3 &= 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

Exercice 1.7. *Raisonnement par contraposition : Montrer que*

1. $$x \neq 2 \text{ et } y \neq 2 \Rightarrow xy - 2x - 2y + 4 \neq 0$$
2. *Soit $n \in \mathbb{Z}$,*
$$n^2 \text{ pair } \Rightarrow n \text{ pair}$$

Exercice 1.8. *Raisonnement par l'absurde : Montrer que*

$\sqrt{2}$ *est irrationnel.*

$\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$ *est irrationnel*

Exercice 1.9. *Soient A et B deux ensembles donnés, montrer que si $A \cap B = A \cup B$ alors $A = B$.*

Exercice 1.10. *Soient A, B et C trois ensembles donnés, montrer que $A \cap C = A \cup B$ si et seulement si $B \subset A \subset C$.*

Exercice 1.11. *Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer l'égalité*

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

1.2 Solutions

Exercice 1.1. *Soient p et q deux propositions données, telles que*

$$\overline{(p \Rightarrow q)} \Leftrightarrow (p \wedge \overline{q})$$

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$$

Pour démontrer ces propriétés, il suffit de dresser la table de vérité ;

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$p \wedge \overline{q}$	$p \Rightarrow q$	$\overline{p \Rightarrow q}$	$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$
1	1	0	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1	0	1

Exercice 1.2. *Soient p, q et r trois propositions données*

1. $\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p$
2. ($p \wedge p$)$\Leftrightarrow$ p
3. ($p \vee p$)$\Leftrightarrow$ p
4. ($p \wedge q$)$\Leftrightarrow$($q \wedge p$) *commutativité du* $\wedge$
5. ($p \vee q$)$\Leftrightarrow$($q \vee p$) *commutativité du* $\vee$
6. $[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$ *associativité du* $\wedge$
7. $[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$ *associativité du* $\vee$
8. $\overline{(p \wedge q)} \Leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q})$ *loi de Morgan*
9. $\overline{(p \vee q)} \Leftrightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q})$ *loi de Morgan*

Indication : Cet exercice se traite aussi comme le précédent, il suffit de dresser la table de vérité

Exercice 1.3. *Soient p, q et r trois propositions données. En utilisant la table de vérité, les propositions suivantes sont vraies :*

1. $(p \vee q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow q]$

p	q	$p \vee q$	$A : p \Rightarrow q$	$B : (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	0	1

2. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge r)]$

p	q	r	$A : p \Rightarrow q$	$B : p \wedge r$	$C : q \wedge r$	$D : B \Rightarrow C$	$A \Rightarrow D$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	0	1	0	0	1	1

Exercice 1.4. *La négation des propositions suivantes :*

1. $\overline{[(p \Rightarrow q) \vee r] \wedge (p \vee q)} \Leftrightarrow \overline{[(\overline{p} \vee q) \vee r] \wedge (p \vee q)}$

$$\Leftrightarrow [(p \wedge \overline{q}) \wedge \overline{r}] \vee (\overline{p} \wedge \overline{q})$$

2. $\overline{[(p \wedge q) \vee r] \Rightarrow (p \wedge r)} \Leftrightarrow \overline{\overline{[(p \wedge q) \vee r]} \vee (p \wedge r)}$

$$\Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee r] \wedge (\overline{p} \vee \overline{r})$$

Exercice 1.5. *Pour montrer qu'on ne peut pas en général commuter les quantificateurs universel et existentiel il suffit de donner un contre exemple, en effet*

$$\forall(\text{ un être humain } x\ )(\exists\ un\ prenom\ y)\text{telque } y \text{ est le prenom de } x$$

$$\Rightarrow (\exists\ \ un\ prenom\ y)\forall\ (\ \text{ un etre humain } \ x\ )\ (\text{ telque } y \text{ est le prenom de } x)$$

L'implication est évidemment fausse, l'hypothèse étant vraie et la conclusion étant fausse l'implication est fausse.

Exercice 1.6. *Raisonnement par récurrence :*

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k &= \frac{n(n+1)}{2} \\ \sum_{k=1}^{n} (2k-1) &= n^2 \\ \sum_{k=1}^{n} k^3 &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

On va choisir de démontrer $\sum\limits_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$
on décompose la démonstration en trois étapes

1. ***Vérification :*** *pour* $n = 1$*, on a bien que* $2(1) - 1 = 1 = 1^2$.
2. ***Hypothèse de récurrence :*** $\sum_{k=1}^{n} (2k - 1) = n^2$.
3. *Il faut montrer que* $\sum_{k=1}^{n+1} (2k - 1) = (n + 1)^2$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) &= 2(1) - 1 + 2(2) - 1 + 2(3) - 1 + ... + 2(n) - 1 + 2(n+1) - 1 \\ &= n^2 + 2(n+1) - 1, \text{ par l'hypothèse de récurrence.} \\ &= (n+1)^2.\end{aligned}$$

Ce qui nous permet de conclure que pour tout entier naturel supérieur à 1 on a : $\sum_{k=1}^{n} (2k - 1) = n^2$

Exercice 1.7. 1. *Soit* $x, y \in \mathbb{R}$*, par contraposée, nous allons montrer que*

$$(xy - 2x - 2y + 4) = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ ou } y = 2).$$

Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que la négation du "et" est un "ou" par les lois de Morgan. On suppose que $(xy - 2x - 2y + 4) = 0$*, or*

$$\begin{aligned}xy - 2x - 2y + 4 &= 0 \Rightarrow x(y-2) - 2(y-2) = 0 \Rightarrow (x-2)(y-2) = 0 \\ &\Rightarrow (x = 2 \text{ ou } y = 2)\end{aligned}$$

2. *Soit* $n \in \mathbb{Z}$,

$$n^2 \text{ pair } \Rightarrow n \text{ pair}$$

Par contraposée, soit $n \in \mathbb{Z}$*, nous allons montrer que*

$$n \text{ impair } \Rightarrow n^2 \text{ impair}$$

On suppose que n *est impair, alors* $n = 2k + 1$ *et par suite*

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k' + 1$$

avec $k' = 2k^2 + 2k$ *pour* $k \in \mathbb{Z}$ *donc* $n^2 = 2k' + 1$ *et par conséquent* n^2 *est impair.*
En conclusion pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$n^2 \text{ pair } \Rightarrow n \text{ pair}$$

Exercice 1.8. *Raisonnement par l'absurde : Rappelons que pour démontrer qu'une proposition est vraie, la demonstration par l'absurde consiste à montrer que la négation de la proposition à démontrer est fausse.*

1. $\sqrt{2}$ *est irrationnel :*
   Supposons que $\sqrt{2}$ *est rationnel alors,* $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, *avec* $p \in \mathbb{Z}; q \in \mathbb{Z}^*$, *on supposera de plus que* p *et* q *sont premiers entre eux (on choisira une forme irréductible de la fraction* $\frac{p}{q}$*)*

   $$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow p^2 = 2q^2$$

   commme $p^2 = 2q^2$ *alors* p^2 *est pair, et d'après l'exercice précédent, si* p^2 *est pair alors* p *est pair.*
   Comme p *est pair, alors* $\exists p' \in \mathbb{Z}$ *tel que* $p = 2p'$, *or nous avons* $p^2 = 2q^2$ *donc* $4p'^2 = 2q^2$ *et par suite* $q^2 = 2p'^2$ *donc* q^2 *est pair, et donc* $\exists q' \in \mathbb{Z}$ *tel que* $q = 2q'$, *en conclusion* $\frac{p}{q} = \frac{2p'}{2q'}$ *ce qui contredit l'hypothèse de l'irréductibilité de la fraction choisie, ainsi nécessairement* $\sqrt{2}$ *est irrationnel.*
2. $\frac{ln(2)}{ln(3)}$ *est irrationnel*
   On procède de la même façon que la question précédente, par l'absurde on suppose que $\frac{ln(2)}{ln(3)}$ *est rationnel alors* $\frac{ln(2)}{ln(3)} = \frac{p}{q}$, *avec* $p \in \mathbb{Z}; q \in \mathbb{Z}^*$, p *et* q *premiers entre eux.*
   Alors $\frac{ln(2)}{ln(3)}$ *est rationnel, donc* $\frac{\ln(2)}{\ln(3)} = \frac{p}{q} \Rightarrow q\ln(2) = p\ln(3) \Rightarrow 2^q = 3^p$.
   Si $q \geq 1$ *alors* 2 *divise* 3^p, *et par suite* 2 *divise* 3 *absurde.*
   On en déduit que $\frac{ln(2)}{ln(3)}$ *est irrationnel.*

Exercice 1.9.
Pour montrer l'égalité entre deux ensembles il est souvent pratique de montrer la double inclusion, en effet

Montrons que $A \subset B$ *: Soit* $x \in A$ *donc* $x \in A \cup B$ *; or par hypothèse* $A \cap B = A \cup B$ *donc* $x \in A \cap B$ *et par suite* $x \in B$, *donc* $A \subset B$.

Montrons que $B \subset A$ *: Soit* $x \in B$ *donc* $x \in A \cup B$ *; or par hypothèse* $A \cap B = A \cup B$ *donc* $x \in A \cap B$ *et par suite* $x \in A$, *donc* $B \subset A$.
De la double inclusion découle l'égalité.

Exercice 1.10. *Soit* A, B *et* C *trois ensembles donnés, Il faut montrer que* $A \cap C = A \cup B$ *si et seulement si* $B \subset A \subset C$.
"$\Leftarrow$*" Hypothèse* $B \subset A \subset C$

$B \subset A \Rightarrow A \cup B = A$ et $A \subset C \Rightarrow A \cap C = A$ donc $B \subset A \subset C \Rightarrow A \cap C = A \cup B$
"$\Rightarrow$" Hypothèse $A \cap C = A \cup B$
On sait que $B \subset A \cup B$ or $A \cap C = A \cup B$ donc $B \subset A \cap C$, et par suite $B \subset A$. D'un autre côté on sait que $A \subset A \cup B$ or $A \cap C = A \cup B$ donc $A \subset A \cap C$, et par suite $A \subset C$. En conclusion $B \subset A \subset C$.

Exercice 1.11. *Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer l'égalité*

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Il faut rappeler que $A \setminus B = A \cap C_E B$, où $C_E B$ est le complémentaire de B dans E, donc $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \cap C_E(A \cap B) = (A \cup B) \cap (C_E A \cup C_E B)$

$$= (A \cap C_E A) \cup (A \cap C_E B) \cup (B \cap C_E A) \cup (B \cap C_E B)$$

$$= (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

1.3 Exercices supplémentaires

Exercice 1.12. *Par un raisonnement par l'absurde (et par une approche algébrique), montrer que*

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots \frac{1}{n!} + \ldots$$

est irrationnel.

Exercice 1.13. *Soient m, n deux entiers naturels*

1. *Donner un équivalent à $[(n < m) \Rightarrow (n = m)]$.*
2. *Donner la négation de $[(n \leq m) \Rightarrow (n > m)]$*

Exercice 1.14. *Soient A, B et C trois ensembles montrer que*

$$[(A \cap B) = (A \cap C) \text{ et } (A \cup B) = (A \cup C)] \Rightarrow B = C$$

Exercice 1.15. *Montrer que*

1. *$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$*
2. *$(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$*

Exercice 1.16. *On rappelle que*

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Montrer que

$$(A \cap B) \Delta (A \cap C) = A \cap (B \Delta C).$$

Exercice 1.17. *Montrer que*

$$(\forall \varepsilon > 0, |x| \leq \varepsilon) \Rightarrow (x = 0)$$

Chapitre 2

Applications

Sommaire

2.1 Exercices

Exercice 2.1. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que* $f(x) = -3x+8$. f *ainsi définie est-elle injective ? surjective ?bijective ?*

Exercice 2.2. *Soit l'application*f *définie comme suit :* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que* $f(x) = |2x+5|$. f *ainsi définie est-elle injective ? surjective ?bijective ?*

Exercice 2.3. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que* $f(x) = x^2 - 1$.

1. f *ainsi définie est-elle injective ? surjective ?bijective ?*
2. *Soit à présent* $g : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$ *telle que* $g(x) = x^2 - 1$, *montrer que* g *est bijective et donner l'expression de sa fonction réciproque.*

Exercice 2.4. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que* $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

1. f *ainsi définie est-elle injective ? surjective ?bijective ?*
2. *Montrer que l'application* $g : [-1, 1] \to [-1, 1]$ *telle que* $g(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ *est une application bijective.*

Exercice 2.5. *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *telle que* $f(x, y) = (x + y, 2x + 2y)$.
L'application f *ainsi définie est elle bijective ?*

Exercice 2.6. *Soit l'application* f *définie comme suit :*

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R}\setminus\left\{\tfrac{1}{2}\right\} &\to \mathbb{R}\setminus\left\{\tfrac{1}{2}\right\} \\ x &\longmapsto f(x) = \frac{x+1}{2x-1} \end{aligned}$$

1. f *ainsi définie est-elle injective ? surjective ?*
2. *Donner l'expression de* $(f \circ f)(x)$.
3. *Par deux méthodes différentes , retrouver l'expression de* $f^{-1}(x)$.

Exercice 2.7. *Soient* a, b, c *et* d *des réels non nuls donnés, et soit* g *définie comme suit :*

$$\begin{aligned} g: \quad \mathbb{R}\setminus\{x_0\} &\to \mathbb{R}\setminus\{y_0\} \\ x &\longmapsto g(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \end{aligned}$$

1. *Comment doit- on choisir le réel* x_0 *pour que* g *soit une application ?*
2. *Comment doit-on choisir* a, b, c *et* d *pour que* g *soit une application injective ?*
3. *Comment doit- on choisir* a, b, c, d *et le réel* y_0 *pour que* g *soit une application surjective ?*
4. *Comment doit-on choisir* $a, b, c, d,$ x_0 *et* y_0 *pour que* g *soit une application bijective ?*

Exercice 2.8. *On considère quatre ensembles* A, B, C *et* D *et des applications* $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$. *Montrer que :*

1. $(g \circ f)$ *injective*$\Rightarrow$ f *injective*
2. $(g \circ f)$*surjective*$\Rightarrow$ g *surjective*
3. $((g \circ f)$*et* $(h \circ g)$ *bijectives)*$\Rightarrow$*(*f, g *et* h *sont bijectives)*

2.2 Solutions

Exercice 2.1. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que* $f(x) = -3x + 8$.

1. *Injectivité : Soit* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$*, tels que* $f(x_1) = f(x_2)$.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow -3x_1 + 8 = -3x_2 + 8 \Rightarrow x_1 = x_2$$

et par suite f est injective.

2. *Surjectivité : Soit* $y \in \mathbb{R}$*,*

$$y = f(x) \Rightarrow y = -3x + 8 \Rightarrow x = \frac{8-y}{3}.$$

Donc $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x = \frac{8-y}{3} \in \mathbb{R}$*, tel que* $y = f(x)$*. Alors f est surjective.*

3. *f étant injective et surjective donc f est bijective.*

Exercice 2.2. *Soit l'application f définie comme suit :* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que* $f(x) = |2x+5|$ *. Commençons par écrire l'expression de* f *sans la valeur absolue :*

$$f(x) = \begin{cases} 2x+5 & si\ x \geq \frac{-5}{2} \\ -2x-5 & si\ x \leq \frac{-5}{2} \end{cases}$$

– *Injectivité :*
  – *Soient* $x_1, x_2 \in]-\infty, \frac{-5}{2}]$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow -2x_1 - 5 = -2x_2 - 5 \Rightarrow x_1 = x_2$.
  – *Soient* $x_1, x_2 \in [\frac{-5}{2}, \infty[$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 5 = 2x_2 + 5 \Rightarrow x_1 = x_2$.
  – *Soit* $x_1 \in]-\infty, \frac{-5}{2}], x_2 \in [\frac{-5}{2}, \infty[$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow -2x_1 - 5 = 2x_2 + 5 \Rightarrow x_2 = -x_1 - 5$.
    Cela nous laisse soupçonner que f *n'est pas injective, pour le confirmer nous devons fournir un contre exemple, en effet considérons* $x_2 = 0 \in [\frac{-5}{2}, +\infty[, -x_2 - 5 = x_1$ *alors* $x_1 = -5 - 0 = -5 \in]-\infty, \frac{-5}{2}]$*, et* $f(x_1) = f(-5) = 5, f(x_2) = f(0) = 5$*, donc* $f(0) = f(-5) = 5$ *mais* $x_1 = 0 \neq x_2 = -5$*. Alors* f *n'est pas injective. (On peut d'ores et déjà affirmer que* f *n'est pas bijective, n'étant pas injective).*

– *Surjectivité :Soit* $y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}$ *tel que* $y = f(x)$
  Comme contre exemple $y = -1$*, alors l'équation* $y = -1 = f(x) = |2x+5|$ *n'a pas de solution car* $|2x+5| \geq 0$.
  Ce qui nous permet de déduire que f *n'est pas surjective.*

– f *n'est ni injective ni surjective et par suite* f *n'est pas bijective.*

Exercice 2.3. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que* $f(x) = x^2 - 1$.

1. – *Injectivité :Soit* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, *tel que* $f(x_1) = f(x_2)$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow (x_1 = x_2 \vee x_1 = -x_2),$$

par exemple :$x_1 = 2, x_2 = -2$, $f(x_1) = f(x_2) = 3$ *mais* $x_1 \neq x_2$ *alors* f *n'est pas injective.*

– *Surjectivité :Soit* $y \in \mathbb{R}$ *tel que* $y = f(x)$

$$y = f(x) \Rightarrow y + 1 = x^2,$$

par exemple pour $y = -4$ *alors* $x^2 = -3$ *contradiction, donc* $y = -4$ *ne possède pas d'antécédent par* f*, ce qui nous permet de conclure que* f *n'est pas surjective.*

2. *Soit à présent* $g : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$ *telle que* $g(x) = x^2 - 1$ *;*

– *Injectivité :Soit* $x_1, x_2 \in [1, +\infty[$*, tels que* $g(x_1) = g(x_2)$

$$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow (x_1 = x_2 \vee x_1 = -x_2)$$

(or l'égalité $x_1 = -x_2$ *ne peut jamais avoir lieu car* $x_1, x_2 \in [1, +\infty[$*), donc nécessairement* $x_1 = x_2$*, et par suite* g *est injective.*

– *Surjectivité :Soit* $y \in [0, +\infty[$ *tel que* $y = g(x)$

$$y = g(x) \Rightarrow y + 1 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y+1},$$

alors $\exists x = \sqrt{y+1} \in [1, +\infty[$ *(car* $y \in [0, +\infty[$*) tel que* $y = g(x)$*. Alors* g *est surjective.*

– g *étant injective et surjective, elle est bijective*

$$y = g(x) \Rightarrow y = x^2 - 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y+1}.$$

On accepte $x = \sqrt{y+1} \in [1, +\infty[$ *et on rejette* $x = -\sqrt{y+1}$
$y = g(x) \Leftrightarrow x = g^{-1}(y) = \sqrt{y+1}$.
Donc $g^{-1} : [0, +\infty[\to [1, +\infty[$ *telle que* $g^{-1}(x) = \sqrt{x+1}$

Exercice 2.4. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que* $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

1. – *Injectivité : Soient* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$*, tel que* $f(x_1) = f(x_2)$

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) \quad &\Rightarrow \quad \frac{2x_1}{1+x_1^2} = \frac{2x_2}{1+x_2^2} \\ &\Rightarrow \quad x_1(1+x_2^2) = x_2(1+x_1^2) \\ &\Rightarrow \quad x_1 - x_2 + x_1x_2^2 - x_2x_1^2 = 0 \\ &\Rightarrow \quad x_1 - x_2 + x_1x_2(x_2 - x_1) = 0 \\ &\Rightarrow \quad (x_1 - x_2)(1 - x_1x_2) = 0 \\ &\Rightarrow \quad (x_1 = x_2 \vee x_1x_2 = 1), \end{aligned}$$

cela nous laisse soupçonner que f *n'est pas injective, pour le confirmer il faut fournir un contre-exemple, considérons* $x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{2}$ *alors* $f(2) = f(\frac{1}{2}) = \frac{4}{5}, f(\frac{1}{2}) = \frac{2\frac{1}{2}}{1+(\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{1+\frac{1}{4}} = \frac{4}{5}$, *alors* $f(2) = f(\frac{1}{2}) = \frac{4}{5}$ *mais* $2 \neq \frac{1}{2}$ *alors* f *n'est pas injective.*

– *Surjectivité :Soit* $y \in \mathbb{R}$, $y = f(x) \Rightarrow y = f(x) = \frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow y(1+x^2) = 2x \Rightarrow yx^2 - 2x + y = 0$

Equation à résoudre en x *:* $\Delta = 4 - 4y^2 = 4(1-y^2)$.

Si $y > 1$ *ou* $y < -1$ *alors* $\Delta < 0$ *donc pas de solution. Si on prend par exemple* $y = 3$

$$y = 3, y = f(x) \Rightarrow 3 = \frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow 3x^2 - 2x + 3 = 0, \Delta = -32 < 0,$$

donc l'équation $3 = f(x)$ *ne possède pas de solutions en* x*, en d'autres termes* $y = 3$ *ne possède pas d'antécédent par* f*, donc* f *n'est pas surjective.*

2. *Soit* $g : [-1,1] \to [-1,1]$ *telle que* $g(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

– *Soient* $x_1, x_2 \in [-1,1]$*, tel que* $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow \frac{2x_1}{1+x_1^2} = \frac{2x_2}{1+x_2^2} \Rightarrow (x_1 = x_2 \vee x_1x_2 = 1)$.

l'égalité $x_1x_2 = 1$ *ne peut avoir lieu que si* $x_1 = x_2 = 1$ *ou si* $x_1 = x_2 = -1$ *car* $x_1, x_2 \in [-1,1]$ *en effet*

$$x_1x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{x_2}.$$

Si $-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{1}{x}$ *et* $\frac{1}{x} < -1$. *Donc* $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ *et par suite* g *est injective.*

– *Soit* $y \in [-1,1]$, $y = g(x)$

$$y = g(x) \Rightarrow y = \frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow y(1+x^2) = 2x \Rightarrow yx^2 - 2x + y = 0.$$

$\Delta = 4(1-y^2)$*, comme* $y \in [-1,1]$ *alors* $\Delta > 0$.

Donc pour tout $y \in [-1,1]$ *l'équation* $yx^2 - 2x + y = 0$ *possède une solution* x*. Reste à vérifier que la solution* x *de cette équation appartient bien à* $[-1,1]$.

Si $y \neq 0$ *les solutions sont données par*

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}, \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}$$

Si $y = 0 \Rightarrow x = 0 \in [-1, 1]$.
$x_2 \notin [-1, 1]$, *car* $1 + \sqrt{1 - y^2} \geq 1$ *et* $y \in [-1, 1] \Rightarrow x_2 \notin [-1, 1]$.
$x_1 = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} = \frac{(1-\sqrt{1-y^2})(1+\sqrt{1-y^2})}{y(1+\sqrt{1-y^2})} = \frac{y^2}{y(1+\sqrt{1-y^2})} = \frac{y}{1+\sqrt{1-y^2}}$.
Comme $1 + \sqrt{1 - y^2} \geq 1$ *et* $y \in [-1, 1]$ *alors* $x_1 \in [-1, 1]$.
Ainsi $\forall y \in [-1, 1], \exists x = x_1 = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} \in [-1, 1], y = g(x)$.
(Si $y = 0, \exists x = 0, y = g(x)$*).*
En conclusion g *est surjective.*

3. *Puisque* g *est injective et surjective alors* g *est bijective*

Exercice 2.5. *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *telle que* $f(x, y) = (x + y, 2x + 2y)$.
Il suffit de remarquer par exemple que f *est symétrique*

$$f(x, y) = f(y, x),$$

donc par exemple $f(5, 2) = f(2, 5)$ *mais* $(5, 2) \neq (2, 5)$ *alors* f *n'est pas injective, donc* f *n'est pas bijective.*

Exercice 2.6. *Soit l'application* f *définie comme suit :*

$$\begin{aligned} f : \quad & \mathbb{R} \setminus \left\{\tfrac{1}{2}\right\} \to \mathbb{R} \setminus \left\{\tfrac{1}{2}\right\} \\ & x \longmapsto f(x) = \frac{x+1}{2x-1} \end{aligned}$$

1. – *Injectivité : Soient* $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$, *tels que* $f(x_1) = f(x_2)$

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) \quad & \Rightarrow \quad \frac{x_1 + 1}{2x_1 - 1} = \frac{x_2 + 1}{2x_2 - 1} \\ & \Rightarrow \quad (2x_1 - 1)(x_2 + 1) = (2x_2 - 1)(x_1 + 1) \\ & \Rightarrow \quad 2x_2x_1 + 2x_1 - x_2 - 1 = 2x_2x_1 + 2x_2 - x_1 - 1 \\ & \Rightarrow \quad x_1 = x_2, \end{aligned}$$

alors f *est injective.*

– *Surjectivité : soit* $y \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$, $y = f(x)$

$$\begin{aligned} y = f(x) \quad & \Rightarrow \quad y = \frac{x+1}{2x-1} \\ & \Rightarrow \quad y(2x - 1) = x + 1 \\ & \Rightarrow \quad x(1 - 2y) = -y - 1 \\ & \Rightarrow \quad x = \frac{y+1}{2y-1}. \end{aligned}$$

Observons que $x = \frac{y+1}{2y-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow -1 = 2$ *ce qui est impossible, donc* $x \neq \frac{1}{2}$.
En conclusion $\forall y \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}, \exists x = \frac{y+1}{2y-1} \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ *tel que* $y = f(x)$, *et par suite* f *est surjective.*

2. *Il est essentiel de noter que* $(f \circ f)$ *est bien définie, car l'ensemble d'arrivée de f est égal à son ensemble de départ.*
$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{f(x)+1}{2f(x)-1} = \frac{\frac{x+1}{2x-1}+1}{2\frac{x+1}{2x-1}-1} = \frac{3x}{3} = x.$$

3. – 1ère *méthode : on a déjà montré que* $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ *on a* $(f \circ f)(x) = x$, *en d'autres termes* $(f \circ f) = Id_{\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}}$. *Grâce à un théorème traité en cours ([8] Proposition2.1 page 22) nous pouvons conclure que* f *est bijective et de plus* $f^{-1} = f$.
   – 2ème *méthode : la méthode classique* $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}$, $y = f(x) = \frac{x+1}{2x-1}$ *alors* $x = \frac{y+1}{2y-1}$, *par un changement d'inconnue* $y = f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2x-1} = f(x)$

Exercice 2.7. *Soient* a, b, c *et* d *des réels non nuls donnés, et soit* g *définie comme suit :*
$$\begin{aligned} g : \quad \mathbb{R} \setminus \{x_0\} &\to \mathbb{R} \setminus \{y_0\} \\ x &\longmapsto g(x) = \tfrac{ax+b}{cx+d} \end{aligned}$$

1. *On choisit* x_0 *pour que* g *soit une application, on cherche le domaine de définition* $cx + d \neq 0$, *alors* $x_0 = -\frac{d}{c}$
2. *Pour que* g *soit une application injective : soit* $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$, $g(x_1) = g(x_2)$ *alors* $\frac{ax_2+b}{cx_2+d} = \frac{ax_1+b}{cx_1+d} \Rightarrow (ax_2+b)(cx_1+d) = (cx_2+d)(ax_1+b) \Rightarrow (x_1-x_2)(ad-bc) = 0$,
Alors pour que g *soit injective il faut que* $ad \neq bc$.
3. *Pour que g soit une application surjective : soit* $y \in R \setminus \{y_0\}, \exists x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ $y = g(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow y(cx+d) = ax+b \Rightarrow x(a-cy) = dy-b \Rightarrow x = \frac{dy-b}{a-cy}$, *pour que cette expression de* x *soit bien définie il faut que* $a - cy \neq 0$, *si* $a - cy = 0 \Rightarrow y = \frac{a}{c}$, *et par suite g est surjective si* $y_0 = \frac{a}{c}$.
4. *g sera bijective si elle est à la fois surjective et injective : donc il faut que g soit définie comme suit*
$$\begin{aligned} g : \quad \mathbb{R} \setminus \left\{-\tfrac{d}{c}\right\} &\to \mathbb{R} \setminus \left\{\tfrac{a}{c}\right\} \\ x &\longmapsto g(x) = \tfrac{ax+b}{cx+d} \end{aligned}$$
tel que a, b, c *et* d *sont des réels vérifiant que* $ad \neq bc$.

Exercice 2.8. *On considère quatre ensembles A, B, C et D et des applications $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$. :*

1. *$(g \circ f)$ injective$\Rightarrow$ f injective.*
   Supposons que $(g \circ f)$ injective, soient $x_1, x_2 \in A$, tel que $f(x_1) = f(x_2)$ donc $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ (car g est une application) or on a déjà supposé que $(g \circ f)$ injective donc $x_1 = x_2$ alors
   $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, d'où f est injective.
2. *$(g \circ f)$surjective$\Rightarrow$$g$ surjective.*
   Soit $z \in C$, comme $(g \circ f)$ est supposée surjective alors
   $$\exists x \in A, z = (g \circ f)(x),$$
   ainsi $z = g(f(x))$, soit encore
   $$\exists y = f(x) \in B, z = g(y),$$
   ce qui est exactement la définition de la surjectivité de g.
3. *($(g \circ f)$et $(h \circ g)$ bijectives)$\Rightarrow$(f, g et h sont bijectives)*
   Comme $(g \circ f)$ est bijective, alors en particulier $(g \circ f)$ est surjective, et donc g est surjective (d'après la question précédente).
   D'un autre côté puisque $(h \circ g)$ est bijective, elle est en particulier injective, donc par la première question on en déduit que g est injective. Ainsi g est injective et surjective, et par suite g est bijective (et dans ce cas g^{-1} existe.) De plus, on peut écrire $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$ qui est bijective ; car composée d'applications bijectives. On procède de la même manière pour h, en écrivant $h = (h \circ g) \circ g^{-1}$, donc h est bijective.

2.3 Exercices supplémentaires

Problème :

Soient E et F deux ensembles donnés, Soit E_1 (respectivement F_1) un sous ensemble de E (respectivement F), on note $E_2 = C_E E_1$ et $F_2 = C_F F_1$. Soit $f_1 : E_1 \to F_1$ et $f_2 : E_2 \to F_2$ deux applications données. On définit alors $f : E \to F$ par $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in E_1 \\ f_2(x) & \text{si } x \in E_2 \end{cases}$

1. Montrer que f est injective ssi f_1 et f_2 sont injectives.
2. Montrer que f est surjective ssi f_1 et f_2 sont surjectives.

Exercice 2.9. *Soit l'application f définie comme suit :*

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto & f(x) = 2x - |x+1| \end{aligned}$$

f est elle injective ? f est elle surjective ?

Exercice 2.10. *Soit l'application f définie comme suit :*

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto & f(x) = |x-1| - |x+1| \end{aligned}$$

f est elle injective ? f est elle surjective ?

Exercice 2.11. *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application donnée, et soit $A \subset E$, $B \subset E$ et soit $C \subset F$ et $D \subset F$. Montrer ce qui suit*

1. $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$
2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
3. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. *Si f est injective alors on a l'égalité* $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
4. $C \subset D \Rightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$
5. $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$
6. $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

Chapitre 3

Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Sommaire

3.1 Exercices

Exercice 3.1. *Montrer par récurrence, que pour tout entier naturel n*

$$5/(12^n - 7^n),$$

$$6/\left(3\left(3^{2n}+1\right)\right).$$

Exercice 3.2. *En utilisant les congruences, montrer que*

$$n \text{ est impair} \Rightarrow 8/\left(7^n+1\right)$$

puis donner le reste de la division de $(7^n + 1)$ par 8 lorsque n est pair.

Exercice 3.3. *Montrer que la somme de trois cubes consécutifs est toujours divisible par 9, i.e. il faut montrer ce qui suit*

$$\left[n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3\right] \equiv 0\,[9]$$

Exercice 3.4. *En utilisant les congruences, montrer qu'un entier est divisible par 3 (resp par 9) ssi la somme de ses chiffres est divisible par 3 (resp par 9) .*

Exercice 3.5. *Calculer ce qui suit pgcd(955,183), ppcm(955,183), pgcd(126, 230), ppcm(126, 230).*

Exercice 3.6. *Résoudre le système*

$$\begin{cases} pgcd(x, y) = 18 \\ ppcm(x, y) = 540 \end{cases}$$

où x et y sont des entiers naturels.

Exercice 3.7. *Résoudre les équations diophantiennes suivantes :*

1. $7x - 9y = 6$
2. $955x + 183y = 1$
3. $123x + 67y = 10$
4. $13x - 10y = 13$
5. $70x + 30y = 6$
6. $111x + 90y = 12.$

Exercice 3.8. *A quelle condition nécessaire et suffisante le système*

$$\begin{cases} x \equiv a\,[m] \\ x \equiv b\,[n] \end{cases}$$

admet-il une solution ?

Exercice 3.9.

1. *Résoudre l'équation diophantienne suivante :*

$$37x + 27y = 1000.$$

2. *Préciser x et y, sachant que y représente un nombre d'étudiants et x le nombre de chaises disponibles.*

3.2 Solutions

Exercice 3.1. *Démonstration par récurrence, pour tout entier naturel* n

1.

$$5/(12^n - 7^n)$$

$$12^n - 7^n \equiv 0\,[5]\,..............\forall n \in \mathbb{N}.....(P_n)$$

- $n = 0$, $5/0, 0 \equiv 0[5].....(P_0)$ *est vraie.*
- *Hypothèse de récurrence :* (P_n) *est vraie.*

  Il faut montrer que :

$$12^{n+1} - 7^{n+1} \equiv 0\,[5]\,................(P_{n+1}).$$

- *On a*

$$12^n \equiv 7^n[5] \Rightarrow 12.12^n \equiv 12.7^n[5]$$

Or $12 \equiv 7[5]$, *alors*

$$12^{n+1} \equiv 7.7^n[5] \Rightarrow 12^{n+1} \equiv 7^{n+1}[5]$$

On en déduit que

$$12^{n+1} - 7^{n+1} \equiv [5]............(P_{n+1})$$

Alors

$$12^n - 7^n \equiv 0\,[5]\,................\forall n \in \mathbb{N}.......(P_n)$$

2.

$$6/\left(3\left(3^{2n}+1\right)\right)\,........\forall n \in \mathbb{N}.....(P_n)$$

- $n = 0$, *6 / 6 ou encore* $6 \equiv 0[6].....(P_0)$ *est vraie.*
- *Hypothèse de réccurence :* (P_n) *est vraie*

  Il faut montrer que :

$$3(3^{2(n+1)} + 1) \equiv 0\,[6]\,................(P_{n+1}).$$

- *On a*

$$3(3^{2n} + 1) \equiv 0\,[6] \Rightarrow 3^{2n+1} + 3 \equiv 0\,[6] \Rightarrow 3^{2n+1} \equiv 3\,[6]$$

$$9(3^{2n+1} \equiv 3\,[6]) \Rightarrow 3.3^{2n+2} \equiv 27\,[6]\,.$$

Or $27 \equiv 3[6]$, *alors*

$$3.3^{2n+2} + 3 \equiv (3+3)\,[6] \Rightarrow 3.(3^{2n+2}+1) \equiv 0\,[6]$$

On en déduit que

$$3.(3^{2(n+1)}+1) \equiv 0\,[6] \ldots\ldots\ldots\ldots \forall n \in \mathbb{N} \ldots\ldots (P_{n+1})$$

En conclusion, pour tout entier naturel, on a

$$3.(3^{2n}+1) \equiv 0\,[6] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \forall n \in \mathbb{N} \ldots\ldots\ldots (P_n)$$

Exercice 3.2.

$$n \text{ est impair} \Rightarrow 8/\,(7^n+1)$$

On a $7 \equiv -1[8]$ *et* $7.7 \equiv (-1)(-1)[8] \equiv 1[8]$,
et de proche en proche $7^n \equiv 7.7.7.7...7[8] \equiv (-1)^n[8]$

$$7^n + 1 \equiv ((-1)^n + 1)[8],$$

on distingue deux cas

- *si* n *est impair alors* $7^n + 1 \equiv ((-1)^n + 1)[8] \equiv (-1+1)[8] \equiv 0[8]$ *(car* $(-1)^n = -1$*).*
  Ce qui nous permet de conclure que si n *est impair, alors* $8/\,(7^n+1)$
- *si* n *est pair alors* $7^n + 1 \equiv ((-1)^n + 1)[8] \equiv (1+1)[8] \equiv 2[8]$ *(car* $(-1)^n = 1$*).*
  Ce qui nous permet de conclure que lorsque n *est pair, le reste de la division de* $7^n + 1$ *par* 8 *est égal à* 2*.*

Exercice 3.3. *Nous allons démontrer par récurrence ce qui suit :*

$$\left[n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3\right] \equiv 0\,[9]\,.$$

Posons donc :

$$\left[n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3\right] \equiv 0\,[9] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (P_n)$$

- *Pour* $n = 0$, *on a bien* $0^3 + 1^3 + (0+2)^3 = 9 \equiv 0[9] \ldots\ldots (P_0)$ *est vraie.*
- *Hypothèse de réccurence :* (P_n) *est vraie,*
  et il faudra montrer que :

$$\left[(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3\right] \equiv 0\,[9] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (P_{n+1}).$$

Un calcul direct nous donne : $\left[(n+1)^3+(n+2)^3+(n+3)^3\right]$

$$= \left[(n+1)^3+(n+2)^3+n^3+9n^2+27n+27\right]$$

$$\Rightarrow \left[(n+1)^3+(n+2)^3+(n+3)^3\right] = \left[n^3+(n+1)^3+(n+2)^3\right]$$
$$+9n^2+27n+27,$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence, on aboutit à

$$\left[(n+1)^3+(n+2)^3+(n+3)^3\right] \equiv (0+9n^2+27n+27)\,[9]$$

En remarquant que $(9n^2+27n+27) = 9(n^2+3n+3)$*, on a*

$$\left[(n+1)^3+(n+2)^3+(n+3)^3\right] \equiv 0\,[9] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(P_{n+1}).$$

- *Ce qui achève la démonstration et nous permet de conclure que pour tout entier naturel* n *on a*

$$\left[n^3+(n+1)^3+(n+2)^3\right] \equiv 0\,[9]\,.$$

Exercice 3.4. *En utilisant les congruences :*

N *est divisible par 3* $\Leftrightarrow$ *la somme de ses chiffres est divisible par 3*

Soit N *un entier divisible par 3*

- *"*$\Rightarrow$*" Supposons que* $N = a_k a_{k-1}...a_1 a_0$ *alors* N *s'écrit (en système décimal) comme*

$$N = a_k.10^k + a_{k-1}.10^{k-1} + ... + a_2.10^2 + a_1.10 + a_0,$$

d'autre part $10 \equiv 1[3], 10^2 \equiv 1[3], ..., 10^k \equiv 1[3]$*, ainsi*

$$N = a_k.10^k + a_{k-1}.10^{k-1} + ... + a_2.10^2 + a_1.10 + a_0$$

$$\equiv (a_k + a_{k-1} + ... + a_2 + a_1 + a_0)[3].$$

Alors

$$N \equiv 0[3] \Rightarrow (a_k + a_{k-1} + ... + a_2 + a_1 + a_0) \equiv 0[3]$$

- *"*$\Leftarrow$*" Reprenons les même notations que plus haut*

$$N = a_k.10^k + a_{k-1}.10^{k-1} + ... + a_2.10^2 + a_1.10 + a_0$$

et supposons à présent que la somme des chiffres de N est divisible par 3, c'est à dire $a_k + a_{k-1} + ... + a_2 + a_1 + a_0 \equiv 0[3]$.
Comme $a_k.10^k \equiv a_k[3]$ car $10^k \equiv 1[3]$ de même $a_{k-1}.10^{k-1} \equiv a_{k-1}[3]$, ...
$a_2.10^2 \equiv a_2[3]$ $a_1.10 \equiv a_1[3]$ $a_0 \equiv a_0[3]$
en sommant, on obtient

$$a_k.10^k + a_{k-1}.10^{k-1} + ... + a_2.10^2 + a_1.10 + a_0$$

$$\equiv a_k + a_{k-1} + ... + a_2 + a_1 + a_0 \equiv 0[3]$$

Alors $N \equiv 0[3]$.

La même démonstration reste valable si l'on remplace 3 par 9 du fait que $10 \equiv 1[3]$ et $10 \equiv 1[9]$. Ce qui nous permet de conclure que

N est divisible par 3 (rep .9) $\Leftrightarrow$ la somme de ses chiffres est divisible par 3 (rep .9)

Exercice 3.5.

1. *Pour calculer le pgcd on utilise l'algorithme d'Euclide :*
   - *pgcd(955,183), on a*
     955=183 $\times$ 5+40 ; 183=40 $\times$ 4+23 ; 40=23 $\times$ 1+17 ; 23=17 $\times$ 1+6 ; 17=6$\times$ 2+5 ; 6=5$\times$ 1+1 ; 5=5$\times$1 +0.
     Alors pgcd(955,183)=1.
   - *pgcd(230,126), on a*
     230=126.1+104 ; 126=104$\times$ 1+22 ; 104=22$\times$ 4+16 ; 22=16$\times$ 1+6 ; 16=6$\times$ 2+4 ; 6=4$\times$ 1+2 ; 4=2$\times$ 2+0.
     Alors pgcd(230,126)=2
2. - *Pour ppcm(955,183), on a* $955 = 5 \times 191$ *et* $183 = 3 \times 61$
     Alors $ppcm(955, 183) = 955 \times 183 = 174765$.
   - *Pour ppcm(230,126), on a* $230 = 2 \times 5 \times 23$, $126 = 2 \times 3^2 \times 7$
     Alors ppcm(230,126)=$3^2 \times 7 \times 5 \times 23 = 14490$.

Exercice 3.6. *Résolution du système*

$$\begin{cases} pgcd(x, y) = 18 \\ ppcm(x, y) = 540 \end{cases}$$

où x et y sont des entiers naturels. On sait que $pgcd(x, y)ppcm(x, y) = x.y = 18 \times 540 = 9720$, et $x = 18x'$, $y = 18y'$ avec $x' \wedge y' = 1$.
$xy = 18x' \times 18y' = 18^2 \times x' \times y' = 324 \times x' \times y' = 9720$ *alors*

$x'.y' = 30$ et $ppcm(x, y) = ppcm(18x', 18y') = 18ppcm(x', y') = 540$, ce que donne $ppcm(x', y') = 30$

$$\begin{cases} x'y' = 30 \\ pgcd(x', y') = 1 \\ ppcm(x', y') = 30 \end{cases}$$

Utilisons la première condition on aura que

$$(x', y') = \{(30, 1), (15, 2), (10, 3), (6, 5), (5, 6), (3, 10), (2, 15), (1, 30)\}$$

Et par suite les solutions

$$(x, y) = \{(540, 18), (270, 36), (180, 54), (108, 90), (90, 108), (54, 180), (36, 270)$$

$$, (18, 540)\}$$

Exercice 3.7. *Résolution des équations diophantiennes suivantes :*

1. $7x - 9y = 6$, *pgcd*$(7, 9) = 1$
   $9 = 7 \times 1 + 2$
   $7 = 3 \times 2 + 1$
   $2 = 2 \times 1 + 0$
   Ainsi pgcd$(7, 9) = 1$, *comme* $1/6$ *l'équation donnée possède bien des solutions.*
   On applique donc l'identité de Bézout, et on trouve

   $$7 \times 4 - 9 \times (3) = 1.$$

   On multiplie cette dernière équation par 6

   $$7 \times (24) - 9 \times (18) = 6,$$

   ainsi

   $$(x_0, y_0) = (24, 18)$$

   est une solution particulière. Soit à présent (x, y) *une solution quelconque de l'équation donnée, on a alors*

   $$\begin{aligned} 7x - 9y &= 6 \\ 7 \times 24 - 9 \times (18) &= 6, \end{aligned}$$

   en retranchant la deuxième équation de la première, on obtient

   $$7\,(x - 24) - 9\,(y - 18) = 0$$

et donc
$$7\,(x-24)=9\,(y-18) \tag{3.1}$$
comme 24 *et* 18 *sont premiers entre eux, alors par le lemme de Gauss* $9/\,(x-24)$, *et par suite*
$$9/\,(x-24)\Rightarrow(x-24)=9k,\ \ k\in\mathbb{Z}$$
soit encore
$$x=24+9k,\ \ k\in\mathbb{Z}$$
en remplaçant dans l'équation (3.1) on obtient
$$7\times 9k=9\,(y-18)\,,\ \ k\in\mathbb{Z}$$
ce qui donne
$$y=18+7k,\ \ k\in\mathbb{Z}.$$
Ainsi l'ensemble des solutions est donné par
$$E=\{(x,y)=(24+9k,18+7k)\,;\ k\in\mathbb{Z}\}$$

2. $955x+183y=1$, *on commence par l'algorithme d'Euclide pour calculer pgcd*$(955,183)$.
   955=183 × 5+40 ; 183=40 × 4+23 ; 40=23 × 1+17 ; 23=17 × 1+6 ; 17=6 × 2+5 ; 6=5 × 1+1 ; 5=5 × 1+0.
   Ainsi pgcd$(955,183)=1$*, comme* $1/1$ *l'équation donnée possède bien des solutions.*
   On applique donc l'identité de Bézout, et on trouve
$$955\times(-32)+183\times(167)=1,$$
   ainsi
$$(x_0,y_0)=(167,-32)$$
   est une solution particulière. Soit à présent (x,y) *une solution quelconque de l'équation donnée, on a alors*
$$\begin{aligned}955x+183y&=1\\955\times(-32)+183\times(167)&=1.\end{aligned}$$
   En retranchant la deuxième équation de la première, on obtient
$$955\,(x+32)+183\,(y-167)=0$$

et donc

$$955\,(x+32) = 183\,(y-167) \tag{3.2}$$

comme 955 *et* 123 *sont premiers entre eux, alors par le lemme de Gauss* $183/\,(x+32)$, *et par suite*

$$183/\,(x+32) \Rightarrow (x+32) = 183k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

soit encore

$$x = -32 + 183k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

en remplaçant dans l'équation (3.2) on obtient

$$955 \times 183k = 183\,(y-167)\,, \quad k \in \mathbb{Z},$$

ce qui donne

$$y = 167 + 955k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ainsi l'ensemble des solutions est donné par

$$E = \{(x,y) = (-32+183k, 167+955k)\,;\ k \in \mathbb{Z}\}$$

3. $123x + 67y = 10$
$123 = 67 \times 1 + 56 \to L1$
$67 = 56 \times 1 + 11 \to L2$
$56 = 11 \times 5 + 1 \to L3$
$11 = 11 \times 1 + 0$
Ainsi pgcd$(123, 67) = 1$, *comme* $1/10$ *l'équation donnée possède bien des solutions.*
On applique donc l'identité de Bézout, et on trouve

$$123 \times 6 + 67 \times (-11) = 1.$$

On multiplie cette dernière équation par 10

$$123 \times 60 + 67 \times (-110) = 10,$$

ainsi

$$(x_0, y_0) = (60, -110)$$

est une solution particulière. Soit à présent (x,y) *une solution quelconque de l'équation donnée, on a alors*

$$\begin{aligned} 123x + 67y &= 10 \\ 123 \times 60 + 67 \times (-110) &= 10 \end{aligned}$$

en retranchant la deuxième équation de la première, on obtient

$$123\,(x-60)+67\,(y+110)=0$$

et donc

$$123\,(x-60)=67\,(-y-110) \tag{3.3}$$

comme 123 *et* 67 *sont premiers entre eux, alors par le lemme de Gauss* $67/\,(x-60)$ *, et par suite*

$$67/\,(x-60)\Rightarrow(x-60)=67k,\;\;k\in\mathbb{Z}$$

soit encore

$$x=60+67k,\;\;k\in\mathbb{Z}$$

en remplaçant dans l'équation (3.3) on obtient

$$123\times 67k=67\,(-y-110)\,,\;\;k\in\mathbb{Z}$$

ce qui donne

$$y=-110-123k,\;\;k\in\mathbb{Z}.$$

Ainsi l'ensemble des solutions est donné par

$$E=\{(x,y)=(60+67k,-110-123k)\,;\;k\in\mathbb{Z}\}$$

4. $13x-10y=13$
$13=10\times 1+3\rightarrow L1$
$10=3\times 3+1\rightarrow L2$
$3=1\times 3+0\rightarrow L3$
Ainsi $pgcd(13,-10)=1$*, comme* $1/10$ *l'équation donnée possède bien des solutions.*
On applique donc l'identité de Bézout, et on trouve

$$13\times(-3)-10\times(-4)=1.$$

On multiplie cette dernière équation par 10

$$13\times(-39)+10\times(52)=13,$$

ainsi

$$(x_0,y_0)=(-39,52)$$

est une solution particulière. Soit à présent (x, y) *une solution quelconque de l'équation donnée, on a alors*

$$\begin{aligned} 13x - 10y &= 13 \\ 13 \times (-39) - 10 \times (-52) &= 13 \end{aligned}$$

en retranchant la deuxième équation de la première, on obtient

$$13\,(x + 39) - 10\,(y + 52) = 0$$

et donc

$$13\,(x + 39) = 10\,(y + 52) \tag{3.4}$$

comme 13 *et* 10 *sont premiers entre eux, alors par le lemme de Gauss* $10/\,(x + 39)$ *, et par suite*

$$13\,(x + 39) \Rightarrow (x + 39) = 13k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

soit encore

$$x = -39 + 13k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

en remplaçant dans l'équation (3.4) on obtient

$$10 \times 13k = 10\,(y + 52)\,, \quad k \in \mathbb{Z}$$

ce qui donne

$$y = -52 + 10k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ainsi l'ensemble des solutions est donné par

$$E = \{(x, y) = (-39 + 13k, -52 + 10k)\,;\ k \in \mathbb{Z}\}$$

5. $70x + 30y = 6$
   $70 = 30 \times 2 + 10 \rightarrow L1$
   $30 = 10 \times 3 + 0 \rightarrow L2$
   Ainsi pgcd$(70, 30) = 10$*, puisque 10 ne divise pas 6, alors l'équation ne possède pas de solution entière.*

6. $111x + 90y = 12.$
   $111 = 90 \times 1 + 21 \rightarrow L1$
   $90 = 21 \times 4 + 6 \rightarrow L2$
   $21 = 6 \times 3 + 3 \rightarrow L3$
   $6 = 3 \times 2 + 0 \rightarrow L3$

Ainsi pgcd$(111, 90) = 3$*, comme* $3/12$ *l'équation donnée possède bien des solutions.*
Puisque $12 = 4 \times 3$*, d'un autre coté comme pgcd*$(111, 90) = 3$*,* $111 = 37.3$ *et* $90 = 30 \times 3$*, avec pgcd*$(37, 30) = 1$ *donc* $111x + 90y = 12 \Leftrightarrow 37x + 30y = 4$*, d'après l'identité de Bézout, il va exister* u, v *telque* $37u+30v = 1$*, car pgcd*$(37, 30) = 1$*, multiplions l'équation précedente par* 4*, on trouve* $148u + 120v = 4$ *alors* $x_0 = 4u, y_0 = 4v$*, forment une solution particulière de notre équation. Soit* (x, y) *une solution On applique donc l'identité de Bézout, et on trouve*

$$13 \times (-3) - 10 \times (-4) = 1.$$

On multiplie cette dernière équation par 10

$$13 \times (-39) + 10 \times (52) = 13,$$

ainsi

$$(x_0, y_0) = (-39, 52)$$

est une solution particulière. Soit à présent (x, y) *une solution quelconque de l'équation donnée, on a alors*

$$\begin{aligned} 13x - 10y &= 13 \\ 13 \times (-39) - 10 \times (-52) &= 13 \end{aligned}$$

en retranchant la deuxième équation de la première, on obtient

$$13\,(x + 39) - 10\,(y + 52) = 0$$

et donc

$$13\,(x + 39) = 10\,(y + 52) \tag{3.5}$$

comme 13 *et* 10 *sont premiers entre eux, alors par le lemme de Gauss* $10/\,(x + 39)$ *, et par suite*

$$13\,(x + 39) \Rightarrow (x + 39) = 13k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

soit encore

$$x = -39 + 13k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

en remplaçant dans l'équation (3.5) on obtient

$$10 \times 13k = 10\,(y + 52)\,, \quad k \in \mathbb{Z}$$

ce qui donne

$$y = -52 + 10k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ainsi l'ensemble des solutions est donné par

$$E = \{(x, y) = (-39 + 13k, -52 + 10k) \,;\; k \in \mathbb{Z}\}$$

Exercice 3.8. *Une condition nécessaire et suffisante pour que le système*

$$\begin{cases} x \equiv a\,[m] \\ x \equiv b\,[n] \end{cases}$$

admette une solution : On a $x = a + m.k$ *et* $x = b + n.l$ *alors* $b + n.l = a + m.k$ *et par suite* $m.k - n.l = b - a$, *on a ainsi obtenu une équation diophantienne de la forme* $ax + by = c$, *celle-ci possédera des solutions (dans* $\mathbb{Z}$*) si et seulement si* $pgcd(a, b)/c$, *soit dans notre cas* $pgcd(m, n)/(b - a)$, *plus précisément*

$$b - a \equiv 0[d] \Rightarrow b \equiv a[d] \qquad \text{où} \qquad d = pgcd(m, n)$$

Exercice 3.9. *1. Résolution de l'équation diophantienne suivante :*

$$37x + 27y = 1000.$$

$37x + 27y = 1000$
$37 = 27 \times 1 + 10 \to L1$
$27 = 10 \times 2 + 7 \to L2$
$10 = 7 \times 1 + 3 \to L3$
$7 = 3 \times 2 + 1$
$3 = 3 \times 1 + 0$

Ainsi $pgcd(37, 27) = 1$, *comme* $1/1000$ *l'équation donnée possède bien des solutions.*
On applique donc l'identité de Bézout, et on trouve

$$37 \times (-8000) + 27 \times (11000) = 1.$$

On multiplie cette dernière équation par 1000

$$37 \times (-8000) + 27 \times (11000) = 1000,$$

ainsi

$$(x_0, y_0) = (-8000, 11000)$$

est une solution particulière. Soit à présent (x, y) *une solution quelconque de l'équation donnée, on a alors*

$$\begin{aligned} 37x + 27y &= 1000 \\ 37 \times (-8000) + 27 \times (11000) &= 1000 \end{aligned}$$

en retranchant la deuxième équation de la première, on obtient

$$37\,(x + 8000) + 27\,(y - 11000) = 0$$

et donc

$$37\,(x + 8000) = 27\,(-y + 11000) \tag{3.6}$$

comme 37 *et* 27 *sont premiers entre eux, alors par le lemme de Gauss* $27/\,(x + 8000)$, *et par suite*

$$27/\,(x + 8000) \Rightarrow (x + 8000) = 27k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

soit encore

$$x = -8000 + 27k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

en remplaçant dans l'équation (3.6) on obtient

$$37 \times 27k = 27\,(-y + 11000)\,, \quad k \in \mathbb{Z}$$

ce qui donne

$$y = 11000 - 37k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ainsi l'ensemble des solutions est donné par

$$E = \{(x, y) = (-8000 + 27k, 11000 - 37k)\,;\ k \in \mathbb{Z}\}$$

2. Précisons x *et* y*, sachant que* y *représente un nombre d'étudiants et* x *le nombre de chaises disponibles.*

Le nombre des chaises est 19*, puisque* $-8000 \equiv -8[27] \equiv 19[27]$.
Le nombre des étudiants est 11 *car* $11000 \equiv 11[37] \equiv 11[37]$.

3.3 Exercices supplémentaires

Exercice 3.10. *En multipliant mon jour de naissance par 12 et mon mois de naissance par 31 et en sommant on obtient 292. Quelle est donc ma date de naissance ? (on ne demande pas l'année mais uniquement le jour et le mois)*

Indication : On résout l'équation $12j - 31m = 292$, après on tire les solutions particulière alors on obtient $(j, m) = (14, 04)$ c'est à dire la date de naissance exacte est $14 - 04$.

Exercice 3.11. *Montrer que si n un entier naturel somme de deux carrées d'entiers, alors le reste de la division euclidienne de n par 4 n'est jamais égal à 3.*

Exercice 3.12. *Soient a, b deux entiers supérieurs ou égaux à 1. Montrer que*

1. $(2^a - 1)/(2^{ab} - 1)$.
2. $(2^p - 1)$*premier* $\Rightarrow p$ *premier* .
3. $pgcd(2^a - 1, 2^b - 1) = 2^{pgcd(a,b)} - 1$.

Chapitre 4

Nombres Complexes

Sommaire

4.1 Exercices

Exercice 4.1. *Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants*

$$\frac{3+6i}{3-4i}, \quad \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2, \quad \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}.$$

Exercice 4.2.

1. *Mettre sous forme géométrique les nombres complexes*

$$z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} \qquad z_2 = 1 - i.$$

2. *En déduire le module et l'argument de* $\frac{z_1}{z_2}$.

Exercice 4.3. *Trouver les racines carrées de*

$$z_1 = 3 - 4i, \;\; z_2 = 24 - 10i.$$

Exercice 4.4.

1. *Calculer les racines carrées de*

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

2. *En déduire les valeurs de cos* $\left(\frac{\pi}{8}\right)$ *et* $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 4.5. *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *les équations*

$$z^2 - (1+2i)\,z + i - 1,$$

$$z^2 - \sqrt{3}z - i = 0,$$

$$z^4 + 10z^2 + 169 = 0.$$

Exercice 4.6. *Trouver les racines cubiques de*

$$z_1 = 2 - 2i, \;\; z_2 = 8i.$$

Exercice 4.7.

1. *Donner les racines cubiques de* $z = 1$, *et montrer que celles-ci s'écrivent* $1, j, j^2$.
2. *Calculer* $1 + j + j^2$.
3. *Donner les racines* $n^{\text{ième}}$ *de* $z = 1$, *et montrer que celles-ci s'écrivent* $1, \omega, \omega^2, ..., \omega^{n-1}$.
4. *Calculer* $1 + \omega + \omega^2 + ... + \omega^{n-1}$.

4.2 Solutions

Exercice 4.1.

La forme algébrique des nombres complexes suivants

1.
$$\left(\frac{3+6i}{3-4i}\right)=\frac{3+6i}{3-4i}\frac{3+4i}{3+4i}=\frac{-3+6i}{5}.$$

2.
$$\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2=\frac{-8}{25}+i\frac{6}{25}.$$

3.
$$\frac{2+5i}{1-i}+\frac{2-5i}{1+i}=z+\bar{z},\quad z=\frac{2-5i}{1+i}=\frac{-3}{2}+i\frac{7}{2},\qquad z+\bar{z}=-3.$$

Exercice 4.2.

1. *Les formes trigonométriques suivantes :*

 •
$$z_1=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}},$$

 •
$$z_2=1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

2. *le module et l'argument de* $\frac{z_1}{z_2}=e^{i\frac{5\pi}{12}}$

$$arg(\frac{z_1}{z_2})=\frac{5\pi}{12}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z},\qquad |\frac{z_1}{z_2}|=1.$$

Exercice 4.3. *Les racines carrées de*

1. $z_1=3-4i$.

$$(x+iy)^2=3-4i\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}x^2-y^2=3\\ x^2+y^2=\sqrt{3^2+4^2}=5\\ 2xy=-4\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}x=\pm2\\ y=\pm1\\ 2xy=-4\end{array}\right.$$

La dernière équation permet de trouver le signe des couples solutions ainsi x *et* y *sont de signes opposés* $(x,y)=(2,-1)$ *ou* $(x,y)=(-2,1)$.
Alors les racines carrés de $3-4i$ *sont* $w_1=2-i$ *et* $w_2=-2+i$.

2. $z_2=24-10i$.

$$(x+iy)^2=24-10i\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}x^2-y^2=24\\ x^2+y^2=26\\ 2xy=-10\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}x=\pm5\\ y=\pm1\\ 2xy=-10\end{array}\right.$$

Alors les racines carrées de $24-10i$ *sont* $w_1=5-i$ *et* $w_2=-5+i$.

Exercice 4.4.

1. $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

$$(x+iy)^2 = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x^2 + y^2 = 1 \\ 2xy = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}} \\ y = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} \\ 2xy = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Donc les racines carrées de z sont

$$z_1 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}, z_2 = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}$$

2. *Les valeurs de* $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ *et* $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$:
On cherche la forme géométrique de $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \text{ alors } z = e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ et comme } (e^{i\frac{\pi}{8}})^2 = e^{i\frac{\pi}{4}},$$

donc $e^{i\frac{\pi}{8}}$ *est une racine carrée de* z,

$$e^{i\frac{\pi}{8}} = \cos(\frac{\pi}{8}) + i\sin(\frac{\pi}{8}).$$

Comme $\cos(\frac{\pi}{8}) > 0$ *alors*

$$e^{i\frac{\pi}{8}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}.$$

Ce qui nous permet de déduire que

$$\cos(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}}, \sin(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}.$$

Exercice 4.5. *Pour résoudre dans* $\mathbb{C}$ *les équations*

1. $z^2 - \sqrt{3}z - i = 0$, $\Delta = 3 + 4i$, *on cherche les racines carrées de* Δ.

$$(x+iy)^2 = 3 + 4i \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \\ 2xy = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \pm 1 \\ 2xy = 5 \end{cases}$$

Alors les racines carrées de Δ *sont* $w_1 = 2 + i$ *et* $w_2 = -2 - i$, *alors l'équation admet pour solutions* $z_1 = \dfrac{\sqrt{3}+2+i}{2}$, $z_2 = \dfrac{\sqrt{3}-2-i}{2}$.

2. $z^2 - (1+2i)\,z + i - 1 = 0$, $\Delta = 1$, *alors les solutions de cette équation sont :* $z_1 = i$, $z_2 = 1 + i$.

3. $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$, *on pose* $Z = z^2$, *ce qui ramène l'équation à*

$$Z^2 + 10Z + 169 = 0,$$

qui a pour $\Delta = -576 = (24i)^2$ *et pour solutions* $Z_1 = -5 - 12i$ *et* $Z_2 = -5 + 12i$*, enfin pour obtenir les quatre solutions de léquation donnée il suffit de retrouver les racines carrées de* Z_1 *et* Z_2*, par la méthode de l'exercice précedent :* $Z_1 = -5 - 12i$.

$$(x+iy)^2 = -5 - 12i \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ x^2 + y^2 = 13 \\ 2xy = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \pm 3 \\ 2xy = -12 \end{cases}$$

Alors les racines carrées de Z_1 *sont* $w_1 = 2 - 3i$ *et* $w_2 = -2 + 3i$.

On applique le même argument pour Z_2*, on obtient les racines carrées suivantes :* $w_3 = 2 + 3i$ *et* $w_4 = -2 - 3i$*, alors l'équation donnée, admet pour solutions* $w_1 = 2 - 3i, w_2 = -2 + 3i, w_3 = 2 + 3i$ *et* $w_4 = -2 - 3i$.

Exercice 4.6. *Les racines cubiques de*

1. $z_1 = 2 - 2i$.
Pour trouver les racines cubiques de z_1*, il faut commencer par le mettre sous sa forme géométrique : On a*

$$|z| = 2\sqrt{2}, \quad \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(\theta) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Longrightarrow \theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

alors $z_1 = 2\sqrt{2}e^{(\frac{-\pi}{4}+2k\pi)i}$*. On pose* $w = x + iy = re^{i\alpha}$ *est une racine cubique de* z_1 *telle que* $w^3 = z_1 = 2\sqrt{2}e^{(\frac{-\pi}{4}+2k\pi)i}$*, alors*

$$w_k = (2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} e^{(\frac{-\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3})i}, \quad k = 0, 1, 2.$$

On aura alors

$$w_0 = \sqrt{2}e^{\frac{-\pi}{12}i}, w_1 = e^{\frac{7\pi}{12}i}, w_2 = e^{\frac{11\pi}{12}}.$$

2. $z_2 = 8i$*, nous allons adopter la même démarche que pour le cas précédent. En effet, on a*

$$z_2 = 8e^{(\frac{\pi}{2}+2k\pi)i} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

On pose $w = x + iy = re^{i\alpha}$ *est une racine cubique de* z_2 *tel que* $w^3 = z_2 = 8e^{(\frac{\pi}{2}+2k\pi)i}$*, alors* $w_k = 2e^{(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3})i}, \quad k = 0, 1, 2,$ *On aura alors,*

$$w_0 = 2e^{\frac{\pi}{6}i}, w_1 = 2e^{\frac{5\pi}{6}i}, w_2 = 2e^{\frac{9\pi}{6}}.$$

Exercice 4.7.

1. *Pour le calcul des racines cubiques, il est plus pratique de passer par la forme géométrique de* z*, alors* $z = re^{i\theta}$*, ce qui donne* $z^3 = 1 = e^{i2k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}$ *ce qui revient à écrire*

$$z = e^{\frac{2k\pi}{3}i}, \quad k = 0, 1, 2,$$

ainsi

$$z_1 = 1, z_2 = e^{\frac{2\pi}{3}i}, z_2 = e^{\frac{4\pi}{3}i}$$

On remarque que $z_2^2 = z_3$*, alors si on pose* $j = e^{\frac{2\pi}{3}i}$*, donc les racines cubiques de 1 s'écrivent sous la forme* $1, j, j^2$.

2. $1 + j + j^2$.
Par le fait que j *est une racine cubique de 1, on sait que* $j^3 = 1$.

$$1 + j + j^2 = j^3 + j + j^2 = j(1 + j + j^2) \Rightarrow j(1 + j + j^2) = 1 + j + j^2$$

$$\Rightarrow (j - 1)(1 + j + j^2) = 0$$

Comme $j \neq 1$ *on a* $1 + j + j^2 = 0$.

3. *Les racines* $n^{ième}$ *de* $z = 1$*, s'obtient par la même méthode* $w^n = 1 = e^{i2k\pi}$ *alors* $w_k = e^{\frac{2k\pi}{n}i} \quad k = 0, 1, 2, ..., n - 1$*, si on pose* $\omega = e^{\frac{2\pi}{n}i}$*, alors les racines sont* $1, \omega, \omega^2, ..., \omega^{n-1}$*, avec* $\omega^n = 1$.

4.
$$1 + \omega + \omega^2 + ... + \omega^{n-1} = \frac{1 - \omega^n}{1 - \omega},$$

somme des termes d'une suite géométrique de raison ω *or* $\omega^n = 1$ *donc*

$$1 + \omega + \omega^2 + ... + \omega^{n-1} = 0$$

4.3 Exercices supplémentaires

Exercice 4.8. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :*

$$z^4 + (3 - 6i)z^2 - 8 - 6i = 0.$$

Exercice 4.9. *Montrer que l'équation*

$$(1 - i)z^3 - (5 + i)z^2 + (4 + 6i)z - 4i = 0,$$

possède une racine réelle, puis la résoudre.

Exercice 4.10. *Soit $w \neq 1$ une racine nième de 1. Calculer*

$$1 + 2w + 3w^2 + 4w^3 + ...nw^{n-1}$$

Chapitre 5

Calcul Matriciel

Sommaire

5.1 Exercices

Exercice 5.1. *Soient A, B et C les matrices suivantes*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \\ -6 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \\ 8 & -7 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer $B + C,\ B - C,\ B + 2C,\ 2B - 3C$.*
2. *Calculer $AB,\ AC,\ A^2,\ A^3$.*
3. *Calculer ${}^tA;\ {}^tB, {}^t(AB)$.*

Exercice 5.2. *Calculer le déterminant des matrices suivantes*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 9 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \\ -2 & 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

et donner A^{-1} et B^{-1}.

Exercice 5.3. *Soit* $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. *Calculer* $M^3 - 2M^2 + 2M$
2. *Déduire de ce qui précède que la matrice M est inversible ; puis donner M^{-1}.*
3. *Retrouver M^{-1} par utilisation de la comatrice.*

Exercice 5.4. *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 0 \\ -2 & \alpha & -2 \\ 0 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$ *où α est un paramètre réel $\alpha \in \mathbb{R}$.*

1. *Discuter suivant les valeurs de α de l'inversibilité de A.*
2. *Lorsque cela est possible, calculer A^{-1}.*

Exercice 5.5. *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1. *Vérifier que A est inversible, et donner A^{-1}.*
2. *En déduire la solution du système*

$$\begin{cases} -x + y - z = 10 \\ x + y + z = -4 \\ x - 2y + 4z = 6. \end{cases}$$

Exercice 5.6. *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$ *où a, b et c sont des réels non nuls. Dire pour quelle(s) valeur(s) de a, b et c la matrice A est inversible.*

Exercice 5.7. *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. *Calculer A^2, puis trouver deux réels α, β tels que $A^2 = \alpha A + \beta I$, où* $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. *Déduire de ce qui précède que* A *est inversible, et donner* A^{-1}.
3. *Retrouver* A^{-1} *par utilisation de la comatrice.*

5.2 Solutions

Exercice 5.1. *Soient A, B et C les matrices suivantes*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \\ -6 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \\ 8 & -7 \end{pmatrix}.$$

1. •
$$B + C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 6 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}, \quad B - C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 4 \\ -14 & 6 \end{pmatrix},$$

   •
$$B + 2C = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 7 \\ 10 & -15 \end{pmatrix}, \quad 2B - 3C = \begin{pmatrix} 2 & 13 \\ -6 & -7 \\ -36 & 19 \end{pmatrix}.$$

2. •
$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \\ -6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 15 & 17 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

   •
$$AC = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \\ 8 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ -16 & 34 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

   •
$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -9 & 10 & -9 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

   •
$$A^3 = AA^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -9 & 10 & -9 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 7 & -7 \\ -21 & 22 & -21 \\ -7 & 7 & -6 \end{pmatrix}.$$

3. ${}^tA$; ${}^tB, {}^t(AB)$.

$${}^tA = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}, {}^tB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}, {}^t(AB) = \begin{pmatrix} 6 & 15 & -1 \\ 6 & 17 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 5.2. *Le déterminant des matrices suivantes*

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ -3 & 4 & -3\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}\cos(x) & \sin(x)\\ -\sin(x) & \cos(x)\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 9 & 0\\ 2 & 1 & 5 & 4\\ -2 & 1 & -3 & -4\end{pmatrix}$$

- |A|=5.
- $|B|=0\begin{vmatrix}4 & -3\\ 1 & 0\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}-3 & -3\\ -1 & 0\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}-3 & 4\\ -1 & 1\end{vmatrix}=3-1=2.$
- $|C|=\begin{vmatrix}\cos(x) & \sin(x)\\ -\sin(x) & \cos(x)\end{vmatrix}=\cos^2(x)+\sin^2(x)=1.$
- $|D|=0\begin{vmatrix}2 & -1 & 2\\ 1 & 5 & 4\\ 1 & -3 & -4\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 5 & 4\\ -2 & -3 & -4\end{vmatrix}-9\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 4\\ -2 & 1 & -4\end{vmatrix}$

$$+0\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 5\\ -2 & 1 & -3\end{vmatrix}=0+0-0+0=0.$$

Les valeurs de A^{-1} et B^{-1}.

$$B^{-1}=\frac{1}{|B|}{}^t com(B)=\frac{1}{2}{}^t\begin{pmatrix}3 & 3 & 1\\ -1 & -1 & -1\\ 1 & 3 & 3\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 3 & -1 & 3\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}.$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}{}^t com(A)=\frac{1}{5}{}^t\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Exercice 5.3. *Soit* $M=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

1. Le résultat de M^3-2M^2+2M

$$M^2 = MM = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$M^3 = M^2M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$M^3 - 2M^2 + 2M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. On a déja démontré que $M^3-2M^2+2M = 2I$, alors $\frac{1}{2}M(M^2-2M+2I) = I$, et puisque $MM^{-1} = M^{-1}M = I$, on en déduit que :

$$M^{-1} = \frac{1}{2}(M^2 - 2M + 2I) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. M^{-1} par utilisation de la comatrice.

On a $|M| = 2$

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|}{}^t com(M) = \frac{1}{2}{}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 5.4. *Soit $A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 0 \\ -2 & \alpha & -2 \\ 0 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$ où α est un paramètre réel $\alpha \in \mathbb{R}$.*

1. Pour savoir que A soit inversible il faut calculer le déterminant de A,

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & -1 & 0 \\ -2 & \alpha & -2 \\ 0 & -1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha\begin{vmatrix} \alpha & -2 \\ -1 & \alpha \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 0 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^3 - 4\alpha$$

Alors A est inversible si et seulement si $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 2$ et $\alpha \neq -2$.
2. On suppose que $\alpha \in \mathbb{R} - \{0, -2, 2\}$ alors A^{-1} existe.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}{}^t com(A) = \frac{1}{\alpha^3 - 4\alpha}{}^t \begin{pmatrix} \alpha^2 - 2 & 2\alpha & 2 \\ \alpha & \alpha^2 & \alpha \\ 2 & 2\alpha & \alpha^2 - 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\alpha^3 - 4\alpha} \begin{pmatrix} \alpha^2 - 2 & \alpha & 2 \\ 2\alpha & \alpha^2 & 2\alpha \\ 2 & \alpha & \alpha^2 - 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 5.5. *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Pour vérifier que A est inversible, il faut calculer son déterminant

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 0 - 8 = -6,$$

$|A| \neq 0$, alors A est inversible,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}{}^t com(A) = -\frac{1}{6}{}^t \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & -3 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -6 \\ 0 & -3 & 3 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Soit le système

$$\begin{cases} -x + y - z = 10 \\ x + y + z = -4 \\ x - 2y + 4z = 6 \end{cases}$$

ce dernier peut être reécrit sous la forme

$$\begin{cases} x - 2y + 4z = 6 \\ x + y + z = -4 \\ x - y + z = -10 \end{cases}$$

qui, une fois mis sous forme matricielle, n'est autre que

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = b,$$

et la résolution de ce système matriciel revient à inverser la matrice A

$$AX = b \Longrightarrow X = A^{-1} b,$$

alors

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -6 \\ 0 & -3 & 3 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{40}{3} \\ 3 \\ \frac{19}{3} \end{pmatrix}$$

ce qui donne $(x, y, z) = (-\frac{40}{3}, 3, \frac{19}{3})$.

Exercice 5.6. *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$ *où* a, b *et* c *sont des réels non nuls. Pour trouver les valeur(s) de* a, b *et* c *pour lesquels la matrice* A *est inversible, il suffit de calculer le déterminant.*

$$|A| = (bc^2 - cb^2) - a(c^2 - b^2) + a^2(c - b) = (c - b)(b - a)(c - a)$$

Donc A *est inversible si et seulement si* $c \neq b$ *et* $a \neq b$ *et* $a \neq c$.

Exercice 5.7. *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ -6 & 10 & -12 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

   Les valeurs de α, β *tels que* $A^2 = \alpha A + \beta I$*, alors*

   $$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ -6 & 10 & -12 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   $$= \begin{pmatrix} \alpha + \beta & -3\alpha & 6\alpha \\ 6\alpha & -8\alpha + \beta & 12\alpha \\ 3\alpha & -3\alpha & 4\alpha + \beta \end{pmatrix}$$

   Par identification, on trouve que :

   $$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ -3\alpha = 3 \end{cases}$$

   Alors $\alpha = -1, \beta = 2$*, On aura donc :* $A^2 = -A + 2I$.

2. *Puisque* $A^2 = -A + 2I$ *alors* $\frac{1}{2}(A^2 + A) = I$*, et par suite :*

   $$\frac{1}{2}A(A + I) = I,$$

ce qui implique que A est inversible, et que

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A+I) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 6 & -7 & 12 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

3. *Par la méthode de comatrice, on a* $|A| = 4$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}{}^{t}com(A) = \frac{1}{4}{}^{t}\begin{pmatrix} 4 & 12 & 6 \\ -6 & -14 & -6 \\ 12 & 24 & 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & -6 & 12 \\ 12 & -14 & 24 \\ 6 & -6 & 10 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 6 & -7 & 12 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

5.3 Exercices supplémentaires

Exercice 5.8. *Soit les matrices suivantes*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer* B^3.
2. *<u>En déduire</u>* A^n *pour* $n \in \mathbb{N}$ *(utiliser la formule du binôme de Newton).*
3. *Montrer que* A *est inversible et calculer* A^{-1}.
4. *Vérifier que la formule trouvée en* (2) *est encore vraie pour* $n = -1$.

Exercice 5.9. *Soit les matrices suivantes*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad et \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. *Montrer que* P *est inversible et calculer* P^{-1}.
2. *Calculer* $P^{-1}AP$
3. *En déduire l'expression de* A^n.

Chapitre 6

Espaces Vectoriels

Sommaire

6.1 Exercices

Exercice 6.1.

1. *Vérifier que* $(1,1)$ *et* $(2,3)$ *engendrent* $\mathbb{R}^2$. *Conclure !*
2. *Vérifier que* $\{(1,2,3),(0,1,-1),(2,0,1)\}$ *est une famille libre dans* $\mathbb{R}^3$. *Conclure !*

Exercice 6.2. *Soient les ensembles suivants :* $E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x+y+z = 0\}$ *et* $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x-y = x+z = 0\}$

1. *Montrer que* E_1 *et* E_2 *sont des sous espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^3$.
2. *Donner une base de* E_1 *et une base de* E_2 *; et en déduire* $dimE_1$ *et* $dimE_2$
3. *Montrer -par deux méthodes- que* $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$.

Exercice 6.3. *Soient les ensembles suivants :* $E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x = y = z\}$ *et* $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x = 0\}$

1. *Montrer que* E_1 *et* E_2 *sont des sous espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^3$.

2. *Montrer -par deux méthodes- que* $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$.

Exercice 6.4. *Parmi les ensembles F dire lesquels sont des sous espaces vectoriels de E :*
1-$E = \mathbb{R}^3$ *;* $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + 3z = 0\}$
2- $E = \mathbb{R}^2$ *;* $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + 3y = 3\}$
3-$E = \mathbb{R}^2$ *;* $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 4\}$
4- $E = \mathbb{R}[X]$ *;* $F = \{P \in \mathbb{R}[X]; degP = 4\}$
5-$E = \mathbb{R}[X]$ *;* $F = \{P \in \mathbb{R}[X]; degP \leq 4\}$
6- $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; application\}$ *;*$F = \{f \in E; paire\}$

Exercice 6.5. *Soit E l'espace vectoriel des suites réelles convergentes. Montrer que l'ensemble des suites constantes et l'ensemble des suites convergeant vers 0 sont deux sous espaces supplémentaires dans E.*

Exercice 6.6. *Soient les ensembles suivants :* $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x+y-3z = 0\}$ *et* $E_2 = \{(x, \alpha x, x) \in \mathbb{R}^3; x \in \mathbb{R}\}$ *ou α est un paramètre réel.*

1. *Montrer que E_1 et E_2 sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.*
2. *Donner une base de E_1 et une base de E_2 ; et en déduire $dimE_1$ et $dimE_2$.*
3. *Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre α a-t-on :* $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$ *?*

6.2 Solutions

Exercice 6.1. *1. Pour montrer que $\{(1,1),(2,3)\}$ est une famille génératrice, on cherche α et β deux réelles tel que : $(x,y) = \alpha(1,1) + \beta(2,3)$ après le calcul on aura $\alpha = 3x - 2y$, $\beta = y - x$ et par suite, soit $X = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ donc*

$$X = (x,y) = (3x-2y)(1,1) + (y-x)(2,3).$$

Alors $< (1,1),(2,3) >$ engendrent $\mathbb{R}^2$ et par suite $< (1,1),(2,3) >$ forme une base (une famille génératrice qui a la même dimension que la base).

2. $\{(1,2,3),(0,1,-1),(2,0,1)\}$ est une famille libre dans $\mathbb{R}^3$.
Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -2\lambda_3 \\ -2\lambda_1 = \lambda_2 \\ -6\lambda_3 + 4\lambda_3 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0,$$

donc on en déduit que : $\{(1,2,3),(0,1,-1),(2,0,1)\}$ est une famille libre dans $\mathbb{R}^3$, et puisque la dimension égal a la dimension de $\mathbb{R}^3$, alors on conclut que

$$\{(1,2,3),(0,1,-1),(2,0,1)\} \qquad \text{est une base dans } \mathbb{R}^3$$

Exercice 6.2. *Soient les ensembles suivants :*
$E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x+y+z = 0\}$ *et* $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x-y = x+z = 0\}$

1. • *Commençons par E_1*
   $E_1 \neq \emptyset$, il contient au moins 0, car soit $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ et $0+0+0 = 0$ alors $E_1 \neq \emptyset$.
   Soit $X = (x,y,z), X' = (x',y',z') \in E_1$, et soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, il est clair que $\lambda X + \mu X' \in E_1$ alors $\lambda(x+y+z) + \mu(x'+y'+z') = 0$ car $X, X' \in E_1$.

   • *$E_2 \neq \emptyset$, car il contient au moins 0, soit $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ et $0-0 = 0+0 = 0$ alors $E_2 \neq \emptyset$.*
   Soit $X = (x,y,z), X' = (x',y',z') \in E_2$, et soit λ, μ deux réels quelconques.
   Par hypothèse on a d'une part $x - y = x + z$, alors

$$\lambda(x-y) = \lambda(x+z) = 0. \tag{6.1}$$

Et d'autre part $x' - y' = x' + z'$, *d'où*

$$\mu(x' - y') = \mu(x' + z') = 0 \tag{6.2}$$

(6.1)+(6.2) *donne :*

$$\lambda x + \mu x' - (\lambda y + \mu y') = \lambda x + \mu x' + \lambda z + \mu z' = 0.$$

Ainsi

$$\lambda X + \mu X' = \begin{pmatrix} \lambda x + \mu x' \\ \lambda y + \mu y' \\ \lambda z + \mu z' \end{pmatrix} \in E_2.$$

2. • *La base de* E_1*, on a* $X \in E_1$ *alors* $x + y + z = 0 \Rightarrow x = -y - z$ *alors* $(x, y, z) = (-y-z, y, z) = (-y, y, 0)+(-z, 0, z) = y(-1, 1, 0)+z(-1, 0, 1)$*, et par suite la base de* E_1 *est*

$$\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$$

alors la $dim(E_1) = 2$*.*

   • *La base de* E_2*, soit* $X \in E_2$ *alors* $x - y = x + z = 0 \Rightarrow z = -y$ *et* $y = x$ *alors* $(x, y, z) = (y, y, -y) = y(1, 1, -1) = y(1, 1, -1)$*, et par suite la base de* E_2 *est*

$$\{(1, 1, -1)\}$$

alors la $dim(E_2) = 1$*.*

   • 1*ère méthode : on utilise la dimension, puisque* $dim(E) = dim(\mathbb{R}^3) = dim(E_1) + dim(E_2)$ *et d'autre part* $dim(E_1 \cap E_2) = 0$*, alors* $dim(E_1 \oplus E_2) = dim(E_1) + dim(E_2)$*, on déduit que*

$$\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2.$$

   • 2*ème méthode : on vérifie les propriètés de la somme direct, il faut vérifie que* $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$ *et* $E_1 \cap E_2 = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$*, on définit*

$$E_1 + E_2 = \{X \in \mathbb{R}^3; X = x_1 + x_2 \text{ où } x_1 \in E_1 \text{ et } x_2 \in E_2\}$$

$E_1 + E_2 \subset \mathbb{R}^3$ *clair par définition.*
$\mathbb{R}^3 \subset E_1 + E_2$*, soit* $X \in \mathbb{R}^3$ *tel que* $X = (x, y, z)$ *l'objectif est d'écrire* $X = X_1 + X_2$ *avec* $X_1 \in E_1$ *et* $X_2 \in E_2$ *.*
Soit $X_1 = (x', y', z') \in E_1$ *alors* $x' + y' + z' = 0$*, soit encore que* $z' = -x' - y'$ *donc* $X_1 = (x', y', -x' - y')$ *.*

Soit $X_2 = (x'', y'', z'') \in E_2$ *alors* $x'' - y'' = x'' + z''$ *soit encore que* $y'' = x''$ *et* $z'' = -x''$ *donc* $X_2 = (x'', x'', -x'')$*, et par suite*

$$X = X_1 + X_2 \Leftrightarrow (x, y, z) = \big(x', y', -x' - y'\big) + (x'', x'', -x'')$$

en identifiant composante par composante, on obtient le système

$$\begin{cases} x = x' + x'' \\ y = y' + x'' \\ z = -x' - y' - x'' \end{cases}$$

après substitution, et par un calcul direct on obtient

$$\begin{cases} x'' = x + y + z \\ x' = -y - z \\ y' = -x - z \end{cases}$$

il est alors facile de vérifier que $X = X_1 + X_2$*, avec* $X = (x, y, z)$ *et* $X_1 = (-y - z, -x - z, x + y + 2z) \in E_1$ *et* $X_2 = (x + y + z, x + y + z, -x - y - z) \in E_2$.
Pour l'intersection entre E_1 *et* E_2*, il est clair que* E_1, E_2 *sont deux sous espaces vectoriels, ils contient au moins le* $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$ *alors l'intersection n'est pas vide, soit* $X \in E_1 \cap E_2$ *donc* $X \in E_1$ *et* $X \in E_1$*, ce qui donne* $x+y+z = 0$ *et* $x-y = x+z = 0 \Rightarrow x = y = -z = 0$ *et* $x+y+z = 0$ *alors*

$$E_1 \cap E_2 = \{(0, 0, 0)\}.$$

Exercice 6.3. *Soient les ensembles suivants :* $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = y = z\}$ *et* $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = 0\}$

1. • E_1 *est un sous espaces vectoriel de* $\mathbb{R}^3$*. Il faut vérifier que*

$$\begin{cases} E_1 \neq \emptyset \\ \forall u, v \in E_1,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ (\lambda u + \mu v) \in E_1 \end{cases}$$

$E_1 \neq \emptyset$*, car il contient au moins par exemple* $(0, 0, 0)$.
Soit $u = (x, y, z), v = (z', y', z') \in E_1,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *alors* $u \in E_1 \Rightarrow x = y = z \Rightarrow \lambda x = \lambda y = \lambda z$ *et* $v \in E_1 \Rightarrow x' = y' = z' \Rightarrow \mu x' = \mu y' = \mu z'$ *et par suite* $\lambda x + \mu x' = \lambda y + \mu y' = \lambda z + \mu z'$*, donc* $\lambda u + \mu v \in E_1$

- *Par la même méthode, on peut montrer que E_2 est un s.e.v, il est clair que E_2 est non vide car par exemple il contient $(0,0,0),(0,1,7),(0,-2,-8)$. Soit $u=(x,y,z), v=(z',y',z')\in E_1,\ \forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ alors $\lambda u+\mu v=\lambda(0,y,z)+\mu(0,y',z')$ et par suite $(0,\lambda y+\mu y',\lambda z+\mu z')$ donc $\lambda u+\mu v\in E_2$.*

2. - *1 ère méthode, on utilise les dimensions : Pour l'intersection entre E_1 et E_2, il est clair que E_1, E_2 sont deux sous espaces vectoriels, ils contient au moins le $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$, l'intersection n'est pas vide, soit $X\in E_1\cap E_2$ donc $X=(x,y,z)\in E_1$ et $X\in E_2$, ce qui donne $x=y=z$ et $x=0$ donc $x=y=z=0$ alors*

$$E_1\cap E_2=\{(0,0,0)\}$$

donc

$$dim(E_1\cap E_2)=0$$

$dim(\mathbb{R}^3)=dim(E_1)+dim(E_2)$. *Cherchons la dimension de chaque sous-espace pour E_1 il est facile de vérifier que $\{(1,1,1)\}$ constitue une base de E_1, donc $dim(E_1)=1$, pour E_2 il est facile de vérifier que $\{(0,1,0),(0,0,1)\}$ constitue une base de E_2, donc $dim(E_2)=2$, comme*

$$dim(E_1+E_2)=dim(E_1)+dim(E_2)-dim(E_1\cap E_2)=1+2-0=3$$

et par suite comme (E_1+E_2) est un sous espace de $\mathbb{R}^3$ et $dim(E_1+E_2)=dim(\mathbb{R}^3)$ alors nécessairement

$$E_1+E_2=\mathbb{R}^3.$$

En conclusion $E_1\cap E_2=\{(0,0,0)\}$ et $E_1+E_2=\mathbb{R}^3$ alors

$$\mathbb{R}^3=E_1\oplus E_2.$$

- *2ème méthode : on vérifie les propriètés de la somme direct, il faut vérifier que $\mathbb{R}^3=E_1+E_2$ et $E_1\cap E_2=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$, on définit tout d'abord*

$$E_1+E_2=\{X\in\mathbb{R}^3; X=x_1+x_2 \text{ où } x_1\in E_1 \text{ et } x_2\in E_2\}$$

$E_1+E_2\subset\mathbb{R}^3$ clair par définition.
$\mathbb{R}^3\subset E_1+E_2$, soit $X\in\mathbb{R}^3$ tel que $X=(x,y,z)$ l'objectif est d'écrire $X=X_1+X_2$ avec $X_1\in E_1$ et $X_2\in E_2$.
Soit $X_1=(x',y',z')\in E_1$ alors $x'=y'=z'$, donc $X_1=(x',x',x')$.

Soit $X_2 = (x'', y'', z'') \in E_2$ *alors* $x'' = 0$ *donc* $X_2 = (0, y'', z'')$, *et par suite*

$$X = X_1 + X_2 \Leftrightarrow (x, y, z) = \big(x', x', x'\big) + (0, y'', z''),$$

en identifiant composante par composante, on obtient le système

$$\begin{cases} x = x' \\ y = x' + y'' \\ z = x' + z'' \end{cases}$$

après substitution, et par un calcul direct on obtient

$$\begin{cases} x' = x \\ y'' = y - x \\ z'' = z - x \end{cases}$$

il est alors facile de vérifier que $X = X_1 + X_2$, *avec* $X = (x, y, z)$ *et* $X_1 = (x, x, x) \in E_1$ *et* $X_2 = (0, y - x, z - x) \in E_2$.

Exercice 6.4. *Parmi les ensembles* F *dire lesquels sont des sous espaces vectoriels de* E *:*

1. $E = \mathbb{R}^3$ *;* $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + 3z = 0\}$, $F \subset E$, $F \neq \emptyset$, *car* $0_{\mathbb{R}^3} \in F$ *et* $\forall u, v \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow (\lambda u + \mu v) \in F$, *alors* F *est un sous espace vectoriel de E.*
2. $E = \mathbb{R}^2$ *;* $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + 3y = 3\}$, F *n'est pas un sous espace vectoriel car* $0_{\mathbb{R}^2} \notin F$, *alors* $F \not\subseteq \mathbb{R}^2$
3. $E = \mathbb{R}^2$ *;* $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 4\}$, F *n'est pas un sous espace vectoriel car* $0_{\mathbb{R}^2} \notin F$, *alors* $F \not\subseteq \mathbb{R}^2$
4. $E = \mathbb{R}[X]$ *;* $F = \{P \in \mathbb{R}[X]; degP = 4\}$, F *n'est pas un sous espace vectoriel de* $E = \mathbb{R}[X]$, *car a partir d'un contre exemple on peut trouver* $P, Q \in F$ *mais* $\lambda P + \mu Q \notin F$ *alors si* $P(x) = x^4 + x$ *et* $Q(x) = x^4$ *où* $P, Q \in F$, *mais* $P(x) - Q(x) = x \notin F$.
5. $E = \mathbb{R}[X]$ *;* $F = \{P \in \mathbb{R}[X]; degP \leq 4\}$ F *est bien un sous espace vectoriel de* $E = \mathbb{R}[X]$, *car l'espace des polynômes est un espace vectoriel et* F *est un polynôme de degré* ≤ 4.
6. $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; application\}$ *;* $F = \{f \in E; paire\}$, *L'application nulle est paire donc dans* F. *Si* f, g *deux fonctions paires, il en est alors de même*

de $f+g$ et de λf, pour tout réelle λ. Alors l'ensemble F est bien un sous espace vectoriel de E.

Exercice 6.5. *Soit E l'espace vectoriel des suites rélles convergentes*

$$E = \{(u_n)_n \in \mathbb{R}^N, (u_n)_n converge\}.$$

On note par E_1 l'espace vectoriel des suites constantes et E_2 l'espace vectoriel des suites converge vers 0.
Nous commencons de vérifier les propriètés des sous espaces supplémentaires

- *$E_1 \cap E_2 = \{0\}$. En effet une suite constante qui converge vers 0 est la suite nulle.*
- *$E = E_1 + E_2$, soit $(u_n)_n$ une suite dans E. Notons l la limite de $(u_n)_n$. Soit $(v_n)_n$ la suite définie par $v_n = u_n - l$, alors $(v_n)_n$ converge vers 0. Donc $(v_n)_n \in E_2$. Notons $(w_n)_n$ la suite constante égale á l, nous avons aussi $u_n = l + u_n - l$, ou encore $u_n = w_n + v_n \quad n \in \mathbb{N}$, et par suite $(u_n)_n = (w_n)_n + (v_n)_n$, ce qui donne la même décomposition souhaitée.*
  En déduire
  $$E = E_1 \oplus E_2.$$

Exercice 6.6. *Soient les ensembles suivants : $E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x+y-3z = 0\}$ et $E_2 = \{(x, \alpha x, x) \in \mathbb{R}^3; x \in \mathbb{R}\}$ où α est un paramètre réel.*

1. - *E_1 sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. $E_1 \neq \emptyset$, car $(0,0,0) \in E_1$.*
     $\forall u = (x,y,z), v = (z',y',z') \in E_1,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ donc $\lambda(x+y-3z) + \mu(x'+y'-3z') = 0 \Rightarrow \lambda x + \mu x' + \lambda y + \mu y' - 3(\lambda z + \mu z') = 0$ alors $\lambda u + \mu v \in E_1$.
   - *E_2 sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. $E_2 \neq \emptyset$, car $(0,0,0), (1,\alpha,1) \in E_1$.*
     $\forall u = (x, \alpha x, x), v = (x', \alpha x', x') \in E_1,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ donc $\lambda(x, \alpha x, x) + \mu(x', \alpha x', x')$
     $\Rightarrow (\lambda x + \mu x', \alpha(\lambda x + \mu x'), \lambda x + \mu x')$ alors $\lambda u + \mu v \in E_2$.
2. - *La base de E_1, remarquons que E_1 par définition est $E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x = -y+3z\}$, alors $X = (x,y,z) \in E_1 \Rightarrow X = (-y+3z, y, z) = (-y,y,0) + (3z,0,z) = y(-1,1,0) + z(3,0,1)$ donc on en déduit que $\{(-1,1,0),(3,0,1)\}$ est une base de E_1, et par suite $dim(E_1) = 2$.*
   - *La base de E_2, par définition est $E_2 = \{(x, \alpha x, x) \in \mathbb{R}^3; x \in \mathbb{R}\}$, alors $X = (x,y,z) \in E_2 \Rightarrow X = (x, \alpha x, x) = x(1,\alpha,1)$ donc on en déduit que $\{(1,\alpha,1)\}$ est une base de E_2, , et par suite $dim(E_2) = 1$.*

3. *La valeur de α pour laquelle*

$$\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2.$$

Pour que E_1 et E_2 soient supplémentaires il est nécessaire d'avoir $E_1 \cap E_2 = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Soit $X = (x, y, z) \in E_1 \cap E_2$ alors

$$\begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ z = x \\ y = \alpha x \end{cases}$$

en substituant la valeur de y et de z obtenues des deux dernières équations dans la première, on obtient

$$x + \alpha x - 3x = 0,$$

soit encore

$$(\alpha - 2)\, x = 0,$$

pour que la seule solution soit la solution triviale $x = 0$, il est nécessaire d'avoir $(\alpha - 2) \neq 0$ (car si $(\alpha - 2) = 0$, tous les réels sont solutions.) Donc si $\alpha \neq 2$ alors $x = 0$, en revenant aux autres équations on a que $y = z = 0$, soit que $E_1 \cap E_2 = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. D'un autre côté, comme $\dim(E_1 + E_2) = 3$ donc $E_1 + E_2 = \mathbb{R}^3$, et en conclusion $E_1 \oplus E_2 = \mathbb{R}^3$.

***Remarque** que se passe-t-il si $\alpha = 2$?*

On observe dans ce cas que $E_2 = \{(x, 2x, x), x \in \mathbb{R}\}$, les éléments de E_2 sont donc de la forme $y = 2x, z = x$ on observe alors que $x + y - 3z = x + 2x - 3x = 0$, ainsi les éléments de E_2 sont aussi des éléments de E_1. En conclusion si $\alpha = 2$ on a $E_2 \subset E_1$ et ces deux espaces ne peuvent pas être supplémentaires.

6.3 Exercices supplémentaires

Exercice 6.7. *Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + 2y^2 + z^2 + 2y(x + z) = 0\}$*
F ainsi défini est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? Si oui donner sa dimension.

Exercice 6.8. *Soient les ensembles suivants : $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\}$, $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y - z = 0\}$, $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - y = x + z = 0\}$*

1. *Montrer que E_1, E_2 et E_3 sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.*

2. *Donner* $dimE_1, dimE_2$ *et* $dimE_3$
3. *Montrer que* $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_3$.
4. *Sans calucler* $E_1 \cap E_2$, *ni* $dim(E_1 \cap E_2)$. *Montrer que* E_1 *et* E_2 *ne sont pas supplémentaires.*
5. E_2 *et* E_3 *sont ils supplémentaires ?*

Exercice 6.9. *Soit* $E = C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *l'espace des fonctions de classe* C^1 *(dérivables à dérivées continues), et soit* $F = \{f \in E, f(0) = f'(0) = 0\}$. *Montrer que* F *est un sous espace vectoriel de* E, *et déterminer un supplémentaire de* F *dans* E.

Chapitre 7

Applications Linéaires

Sommaire

7.1 Exercices

Exercice 7.1. *Soit*

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, x+z) \end{array}$$

1. *Vérifier que f est une application linéaire.*
2. *Déterminer kerf le noyau de f, puis donner une base de $\ker f$ et en déduire dim($\ker f$).*
3. *f es- elle injective ?*
4. *Donner dim($Im f$) ; puis donner une base de $Im f$.*
5. *f est-elle surjective ?*

Exercice 7.2. *Soit l'application linéaire suivante :*

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, x+z, x+y+z) \end{array}$$

1. *Déterminer* $\ker f$ *le noyau de* f *et en déduire dim(*$\ker f$*).*
2. f *est-elle injective ? f est elle-surjective ? f est-elle bijective ?*
3. *Donner dim(Imf) ; puis donner une base de* $\mathrm{Im} f$*.*

Exercice 7.3.

1. *Vérifier que* $\{(1,1),(2,1)\}$ *est une base* $\mathbb{R}^2$.
2. *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, *une application linéaire telle que* $f(1,1) = (3,0)$ *et* $f(2,1) = (5,1)$, *donner alors l'expression de* f.

Exercice 7.4. *Soit l'application linéaire suivante :*

$$\begin{array}{ccc} f & : & \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (-x+y-z, -x+z, -2x+2y) \end{array}$$

1. *Soit* $\mathcal{B}_1$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$, *donner* $M_1 = M(f, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1)$.
2. *Soit* $\mathcal{B}_2$ *la base de* $\mathbb{R}^3$ *définie comme suit :* $\mathcal{B}_2 = \{(1,1,1),(2,0,1),(0,-1,1)\}$.
   Calculer $M_2 = M(f, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1)$.
3. *Soit* $\mathcal{B}_3$ *la base de* $\mathbb{R}^3$ *définie comme suit :* $\mathcal{B}_3 = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$.
   Calculer $M_3 = M(f, \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_3)$.
4. *Sans les calculer , montrer que det*(M_1) *=det*(M_3)

7.2 Solutions

Exercice 7.1. *Soit*

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, x+z) \end{array}$$

1. *f est une application linéaire, en effet pour $u=(x,y,z), v=(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$*

$$\begin{aligned} f(\lambda u+\mu v) &= f\left(\lambda(x,y,z)+\mu\left(x',y',z'\right)\right) \\ &= f\left(\lambda x+\mu x', \lambda y+\mu y', \lambda z+\mu z'\right) \\ &= \left(\lambda x+\mu x'+\lambda y+\mu y', \lambda x+\mu x'+\lambda z+\mu z'\right) \\ &= \lambda(x+y, x+z)+\mu\left(x'+y', x'+z'\right) \\ &= \lambda f(x,y,z)+\mu f\left(x',y',z'\right) \\ &= \lambda f(u)+\mu f(v). \end{aligned}$$

2. • $Ker(f)=\left\{u \in \mathbb{R}^3;\ f(u)=0_{\mathbb{R}^2}\right\}$.

$$f(u)=0 \Longrightarrow (x+y, x+z)=(0,0) \Longrightarrow \{x=-y \text{ et } x=-z\},$$

et par suite : $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$Ker(f)=\left\{u \in \mathbb{R}^3; u=(x,-x,-x),\ \text{où } x \in \mathbb{R}\right\}$$

   • *Base de $Ker(f)$ est $B=\{(1,-1,-1)\}$.*
   • $dim(Ker(f))=1$

3. *Injectivité : on sait que*

$$f \text{ est injective} \Longleftrightarrow ker f=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$$

Or comme $dim(Ker(f)) \neq 0$ alors $ker f \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, et par conséquent f n'est pas injective.

4. • $dim(Im(f))$, *on a*

$$dim(\mathbb{R}^3)=3=dim(Ker(f))+dim(Im(f))$$

Et par suite : $dim(Im(f))=2$.

- *Base de* $Im(f)$*, comme* $dimIm(f) = 2 = dim(\mathbb{R}^2)$ *et comme* $Im(f)$ *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$ *alors nécessairement* $Im(f) = \mathbb{R}^2$ *et donc la base canonique* $\{(1,0),(0,1)\}$ *est une base de* $Im(f)$*.*

5. *Surjectivité : puisque* $dim(Im(f)) = dim(\mathbb{R}^2) = 2$ *alors* f *est surjective,*

Exercice 7.2. *Soit l'application linéaire suivante :*

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \quad \longmapsto \quad & (x+y, x+z, x+y+z) \end{aligned}$$

1. •

$$Ker(f) = \left\{u \in \mathbb{R}^3;\ f(u) = 0_{\mathbb{R}^3}\right\}.$$

$$\begin{aligned} f(u) = 0 &\Rightarrow (x+y, x+z, x+y+z) = (0,0,0) \\ &\Rightarrow (x = -y, x = -z, z) = (0,0,0) \end{aligned}$$

Ce qui donne $x = y = z = 0$ *et par suite* $Ker(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$*.*

- $dim(Ker(f)) = 0$

2. • *Injectivité : puisque* $dim(Ker(f)) = 0$ *alors* f *est injective.*

$$f \text{ est injective} \Leftrightarrow ker f = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$$

- *Surjectivité*

$$Imf = \left\{v \in \mathbb{R}^3;\ v = f(u) \text{ avec } u \in \mathbb{R}^3\right\} = f\left(\mathbb{R}^3\right)$$

Soit $v = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ *tel que* $v = f(u) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x+y \\ y' = x+z \\ z' = x+y+z \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x' = x+y \\ y' = x'-y+z \\ z' = x'+z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = x'+y'-z' \\ y = -y'+z' \\ z = z'-x' \end{cases}$ *Et par suite* f *est surjective.*

- *Bijectivité :* f *injective et surjective alors* f *bijective.*

3. • $dim(Im(f)) = 3$*, car*

$$f \text{ est surjective} \Leftrightarrow dim(Imf) = dim(\mathbb{R}^3) = 3$$

- *Base de* $Im(f)$ *: on a* $X \in Im(f)$ *alors* $X = (x+y, x+z, x+y+z) = (x,x,x)+(y,0,y)+(0,z,z) = x(1,1,1)+y(1,0,1)+z(0,1,1)$*. Alors la Base de* $Im(f)$ *:*

$$\{(1,1,1),(1,0,1),(0,1,1)\}.$$

Exercice 7.3.

1. $B = \{(1,1),(2,1)\}$ *est une base* $\mathbb{R}^2$.
   On vérifie seulement que B *soit une famille génératrice ou* B *est libre (car* $dim(B) = 2$ *est la même dimension de* $\mathbb{R}^2$*). Montrons que* $u_1 = (1,1)$ *et* $u_2 = (2,1)$ *sont linéairement indépendants*

$$\begin{aligned} \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 &= 0_{\mathbb{R}^2} \Rightarrow \lambda_1 (1,1) + \lambda_2 (2,1) = (0,0) \\ &\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0. \end{aligned}$$

   Et par suite B *est une base dans* $\mathbb{R}^2$.

2. *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$*, une application linéaire telle que* $f(1,1) = (3,0)$ *et* $f(2,1) = (5,1)$*. On commence par observer que* $\{(1,1),(2,1)\}$ *constitue une base de* $\mathbb{R}^2$ *(le fait qu'elle constitue une famille génératrice nous suffit pour traiter l'exercice). Pour* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *on a*

$$(x,y) = (2y-x)(1,1) + (x-y)(2,1)$$

   $f(x,y) = f((2y-x)(1,1)+(x-y)(2,1)) = (2y-x)f(1,1)+(x-y)f(2,1)$ *car* f *est linéaire, et par suite*

$$f(x,y) = (2y-x)(3,0) + (x-y)(5,1)$$

   alors

$$f(x,y) = (2x+y, x-y).$$

Exercice 7.4. *Soit l'application linéaire suivante :*

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \quad &\longmapsto \quad (-x+y-z, -x+z, -2x+2y) \end{aligned}$$

1. *Rappelons que la base canonique dans* $\mathbb{R}^3$ *est*
   $\mathcal{B}_1 = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$*, alors*
   $f(e_1) = (-1,-1,-2), f(e_2) = (1,0,2), f(e_3) = (-1,1,0)$ *donc la matrice*

$$M_1 = M(f,\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

2. *Soit $\mathcal{B}_2$ la base de $\mathbb{R}^3$ définie comme suit :* $\mathcal{B}_2 = \{(1,1,1),(2,0,1),(0,-1,1)\}$

$$M_2 = M(f,\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1) = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

3. *Soit $\mathcal{B}_3$ la base de $\mathbb{R}^3$ définie comme suit :* $\mathcal{B}_3 = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$

$$M_3 = M(f,\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

4. *Sans les calculer, $M_1 = P^{-1}M_3P$ (P est une matrice de changement de base (matrice de passage)).*
$det(M_1) = det(P^{-1}M_3P) = det(P^{-1})det(M_3)det(P)$

$$= (det(P))^{-1}det(M_3)det(P) = det(M_3)$$

7.3 Exercices supplémentaires

Exercice 7.5. *Soit l'application linéaire suivante :*

$$\begin{array}{rcl} p & : & \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (-2x-6z, x+y+z, x+3z) \end{array}$$

on note $p^2 = p \circ p$, $B = (e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

1. *Montrer que p est une application linéaire.*
2. *calculer $p(e_1), p(e_2), p(e_3)$, puis $p^2(e_1), p^2(e_2), p^2(e_3)$, que peut-on déduire ?*
3. *Donner une base de $Im(p)$ est une base de $Ker(p-I)$ et montrer que ces deux espaces sont égaux.*

Exercice 7.6. *Soit l'application linéaire suivante :*

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1,x_2,...,x_n) & \longmapsto & x_1+x_2+...+x_n \end{array}$$

1. *Montrer que f est une application linéaire.*
2. *Déterminer dim$(Im(f))$ et dim$(Ker(f))$.*

Deuxième partie

Analyse

Chapitre 8

Suites Numériques

Sommaire

8.1 Exercices

Exercice 8.1. *En utilisant la définition de la limite montrer que*

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1}{n+2} = 2.$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{9} = 1.$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & si\ \ q>1 \\ 1 & si\ \ q=1 \\ 0\ \ si\ \ 0<q<1. \end{cases}$

Exercice 8.2. *Calculer les limites suivantes*

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n + \dfrac{1}{n}.$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}.$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n\sin(n!)}{n^2+1}.$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right).$
5. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}.$

6. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n+5}{n+3}\right)^n$.

Exercice 8.3. *Soit la suite de terme général*

$$u_n = \frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+...+\frac{1}{n\,(n+1)}.$$

1. *Montrer que* $\dfrac{1}{n\,(n+1)} = \dfrac{a}{n}+\dfrac{b}{n+1}$.
2. *Calculer* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 8.4. *Soit la suite définie par*

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = (u_n)^2 + \dfrac{2}{9} \end{cases}$$

1. *Montrer que* $\forall n\in\mathbb{N},\ \dfrac{1}{3} < u_n < \dfrac{2}{3}$.
2. *Étudier la monotonie de* $(u_n)_n$.
3. *En déduire que* $(u_n)_n$ *est une suite convergente, et donner sa limite.*

Exercice 8.5. *Soit la suite définie par*

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{1+u_n}. \end{cases}$$

1. *Montrer que* $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n > 0$.
2. *Étudier la monotonie de* $(u_n)_n$.
3. *En déduire que* $(u_n)_n$ *est une suite convergente, et donner sa limite.*

Exercice 8.6. *Montrer que les deux suites* $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *définies par*

$$\begin{aligned} u_n &= 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}, \\ v_n &= u_n+\frac{1}{n!}, \end{aligned}$$

sont adjacentes.

Exercice 8.7. *Montrer que la suite de terme général* $u_n = 1+\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+...+\dfrac{1}{n}$ *est divergente.*

8.2 Solutions

Exercice 8.1. *Rappelons la définition de la limite :*

$$(\lim_{n\to+\infty} v_n = l) \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists\eta_\varepsilon\in\mathbb{N}\,;\,\forall n\in\mathbb{N}, (n\geq\eta_\varepsilon \Rightarrow |v_n-l|<\varepsilon)\,.$$

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n+1}{n+2}=2.$
   Soit $\varepsilon>0$ *quelconque, on cherche* η_ε *pour que l'on ait pour* $n\geq\eta_\varepsilon$ $|\dfrac{2n+1}{n+2}-2|\leq\varepsilon$ *soit* $|\dfrac{2n+1-2(n+2)}{n+2}|\leq\varepsilon$*, ou encore* $|\dfrac{-3}{n+2}|\leq\varepsilon$ *et donc* $\dfrac{3}{n+2}\leq\varepsilon$*, pour cela il suffit (par exemple) de choisir*
   $$\frac{n+2}{3}>\frac{1}{\varepsilon}\Longrightarrow n>\frac{3}{\varepsilon}-2;\ \eta_\varepsilon\in\mathbb{N};\ \ \eta_\varepsilon=[\frac{3}{\varepsilon}-2]+1,$$
   Notons que on peut aussi choisir $\eta_\varepsilon>[\dfrac{3}{\varepsilon}-2]+1,$
   (où $[x]$ *désigne : la partie entière de x), on rappelle que* $[x]\in\mathbb{Z}$ *telle que* $[x]\leq x\leq[x]+1.$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{9}=1.$ *Comme précédemment, soit* $\varepsilon>0$ *quelconque, on cherche à avoir* $|\sqrt[n]{9}-1|<\varepsilon$ *pour* $n\geq\eta_\varepsilon$
   $$|\sqrt[n]{9}-1|<\varepsilon\Rightarrow-\varepsilon\leq\sqrt[n]{9}-1\leq\varepsilon\Rightarrow\sqrt[n]{9}\leq\varepsilon+1$$
   $$\Rightarrow 9^{\frac{1}{n}}\leq\varepsilon+1\Rightarrow\ln(9^{\frac{1}{n}})\leq\ln(\varepsilon+1)\Rightarrow\frac{1}{n}\ln(9)\leq\ln(\varepsilon+1)$$
   $\Rightarrow\dfrac{1}{n}\leq\dfrac{\ln(\varepsilon+1)}{\ln(9)}$ *(il faut observer que* $\ln(9)>0$ *car* $9>1$*)*
   $\Rightarrow n\geq\dfrac{\ln(\varepsilon+1)}{\ln(9)}$ *(il suffit de choisir par exemple)* $\eta_\varepsilon=[\dfrac{\ln(\varepsilon+1)}{\ln(9)}]+1$

3. $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=\begin{cases}+\infty & si\ \ q>1\\ 1 & si\ \ q=1\\ 0\ \ si\ \ 0<q<1.\end{cases}$
   - *Si* $q=1\Rightarrow q^n=1$ *suite constante et la limite égale a 1.*
   - *Si* $q>1,\ \lim\limits_{n\to+\infty}q^n=+\infty$
     $$\Leftrightarrow\forall A>0,\ \exists\eta_A\in\mathbb{N}\,;\,\forall n\in\mathbb{N}, (n\geq\eta_\varepsilon\Rightarrow u_n>A)\,.$$
     Soit A *quelconque,*
     $$u_n>A\Rightarrow q^n>A\Rightarrow\ln(q^n)>\ln(A).$$

$$\Rightarrow n > \frac{\ln(A)}{\ln(q)}, (q > 1, donc\ \ln(q) > 0)$$

Il suffit de prendre $\eta_A = \left[\frac{\ln(A)}{\ln(q)}\right] + 1$.

- *Si* $0 < q < 1$, *soit* $q = \frac{1}{q'}$ *avec*

$$q > 1 \Rightarrow q^n = \frac{1}{q'^n} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} q^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{q'^n} = 0,$$

d'après le cas précédent.

(On peut aussi traiter ce cas de la même façon que le cas précédent).

Remarque : *Si* $q = 0, q^n = 0, \lim_{n\to+\infty} q^n = 0$.

Exercice 8.2. *Calcul des limites*

1. $\lim_{n\to+\infty} (-1)^n + \frac{1}{n}$ *On peut écrire* $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ *par deux façons différentes :* $u_{2k} = 1 + \frac{1}{2k} \to 1$ *quand* $k \to \infty$.
   $u_{2k+1} = 1 + \frac{-1}{2k+1} \to -1$ *quand* $k \to \infty$, *et par suite* $(u_n)_n$ *n'a pas de limite.*
2. *Soit* $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$, *on a* $(-1)^n$ *est borné et* $\frac{1}{n} \to 0$ *quand* $n \to \infty$, *donc* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, *ou bien*

$$0 = \lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{n} \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

   Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
3. $u_n = \frac{n\sin(n!)}{n^2+1}$, *on sait que* $\sin(n!)$ *bornée,* $\frac{n}{n^2+1} \to 0$ *quand* $n \to \infty$ *donc* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, *ou bien*

$$0 = \lim_{n\to+\infty} \frac{-n}{n^2+1} \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{n\sin(n!)}{n^2+1} \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0.$$

   Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
4. $\lim_{n\to+\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) =$ *(forme indéterminée* $+\infty - \infty$*)*
   $\lim_{n\to+\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = 0.$
5. $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^{n+1}}{3^n}\left(\frac{(\frac{2}{3})^{n+1} + 1}{(\frac{2}{3})^n + 1}\right) = 3$, $(q^n = (\frac{2}{3})^n \to 0$, *car* $0 < q < 1)$.

6. $\lim_{n\to+\infty}(\frac{n+5}{n+3})^n$ *(Ceci est aussi une forme indéterminée 1^∞)*

$$\lim_{n\to+\infty}(\frac{n+5}{n+3})^n = \lim_{n\to+\infty}\frac{(1+\frac{5}{n})^n}{(1+\dfrac{3}{n})^n} = \frac{e^5}{e^3} = e^2.$$

Exercice 8.3. *Soit la suite de terme général*

$$u_n = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + ... + \frac{1}{n\,(n+1)}.$$

1. *Pour montrer que* $\dfrac{1}{n\,(n+1)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} = \dfrac{a(n+1)+bn}{n+1} = \dfrac{n(a+b)+a}{n+1}$, *par identification*

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a=1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1. \end{cases}$$

Ainsi, $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$

2.
$$u_n = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + ... + \frac{1}{n\,(n+1)}$$
$$= (1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) + (\frac{1}{3}-\frac{1}{4}) + ... + (\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Ainsi $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1.$

Exercice 8.4. *Soit la suite définie par*

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = (u_n)^2 + \dfrac{2}{9}. \end{cases}$$

1. *On démontre par récurrence que* $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{3} < u_n < \dfrac{2}{3}.$
Pour $n=0$, $\dfrac{1}{3} < u_0 = \dfrac{1}{2} < \dfrac{2}{3}.$
On suppose que
$$\frac{1}{3} < u_n < \frac{2}{3},$$
on peut élever au carré dans cette double inégalité car $0 < \dfrac{1}{3} < u_n < \dfrac{2}{3}$, *ce qui donne*
$$\frac{1}{3} < u_n < \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{9} < u_n^2 < \frac{4}{9},$$

et par suite

$$\frac{1}{9} < u_n^2 < \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{1}{9} + \frac{2}{9} < u_n^2 + \frac{2}{9} < \frac{4}{9} + \frac{2}{9} \Rightarrow \frac{1}{3} < u_{n+1} < \frac{2}{3}.$$

Ce qui nous permet de conclure que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{3} < u_n < \frac{2}{3}$.

2. *La monotonie de* $(u_n)_n$.
   $u_{n+1} - u_n = u_n^2 + \frac{2}{9} - u_n = u_n^2 - u_n + \frac{2}{9}$, *considérons l'équation* $x^2 - x + \frac{2}{9} = 0$, $\Delta = 1 - \frac{8}{9} = (\frac{1}{3})^2$, $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{2}{3}$, *or d'après la question précédente : on a que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{3} < u_n < \frac{2}{3}$, *donc* $u_{n+1} - u_n < 0$. $(u_n)_n$ *est (strictement) décroissante (il est possible de le démontrer par récurrence).*
3. *Comme* $(u_n)_n$ *est une suite décroissante et minorée (par* $\frac{1}{3}$*), alors* $(u_n)_n$ *est convergente. Soit* $l = \lim_{n\to+\infty} u_n$ *en passant à la limite dans la relation de récurrence* $u_{n+1} = u_n^2 + \frac{2}{9}$, l *doit nécessairement vérifier*

   $$l = l^2 + \frac{2}{9} \Rightarrow l = \frac{1}{3} \text{ ou } l = \frac{2}{3}.$$

   Or la limite est unique, nous devons donc éliminer l'une de ces deux valeurs. Reprenons depuis le début, on a montré que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{3} < u_n < \frac{2}{3}$, *et aussi* $(u_n)_n$ *est décroissante avec* $u_0 = \frac{1}{2}$. *Donc la limite ne peut pas être* $\frac{2}{3}$, *et par suite* $l = \frac{2}{3}$ *(réfusée).*
   Alors

   $$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{3}.$$

Exercice 8.5. *Soit la suite définie par*

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{1+u_n} \end{cases}$$

1. *Démonstration par récurrence que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
   $u_0 = 1 > 0$, *on suppose que* $u_n > 0$. $\forall n$ *alors* $\frac{4u_n}{1+u_n} = u_{n+1} > 0$, *et parsuite*

   $$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0.$$

2. *La monotonie de* $(u_n)_n$.
   $$u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n}{1+u_n} - u_n = \frac{4u_n - u_n - u_n^2}{1+u_n} = \frac{3u_n - u_n^2}{1+u_n} = \frac{u_n(3-u_n)}{1+u_n}$$

On sait que $u_n > 0$ *et donc* $1 + u_n > 0$*, reste a étudier le signe de* $(3 - u_n)$.
$u_0 = 1 < 3$, *essayons de montrer par récurrence que* $u_n < 3 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$.
On suppose que $u_n < 3$

$$u_n < 3 \Rightarrow (4u_n - 3u_n) < 3 \Rightarrow 4u_n < 3 + 3u_n \Rightarrow \frac{4u_n}{1+u_n} < 3,$$

d'où $u_{n+1} < 3$. *Donc* $u_n < 3 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$, *ou encore* $(3 - u_n) > 0, \;\; \forall n \in \mathbb{N}$.
Ainsi $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n(3-u_n)}{1+u_n} > 0$, *donc* $(u_n)_n$ *est croissante.*

3. $(u_n)_n$ *est une suite croissante et majorée (par* 3*), elle est donc convergente.* $(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = l)$ *et par suite la limite doit vérifier*

$$l = \frac{4l}{1+l} \Rightarrow l = 0 \text{ ou } l = 3,$$

rappelons que $(u_n)_n$ *est croissante, et que* $u_0 = 1$, *donc* $u_n \geq 1$, *et par suite* l *ne peut pas être égale à* 0, *donc obligatoirement*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 3.$$

Exercice 8.6. *Montrer que les deux suites* $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *définies par*

$$\begin{aligned} u_n &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}, \\ v_n &= u_n + \frac{1}{n!}, \end{aligned}$$

sont adjacentes. Il faut démontrer que l'une est croissante, l'autre est décroissante et que la limite de la différence est égale à 0.

- *Etude de la monotonie*

$$u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} - (1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!})$$

donc

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0.$$

Alors $(u_n)_n$ *est croissante.*

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} - (u_n + \frac{1}{n!})$$

$$= \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{2-(n+1)}{(n+1)!} = \frac{1-n}{(n+1)!} \leq 0, (\text{ dès que } n \geq 1),$$

donc

$$v_{n+1} - v_n \leq 0.$$

Alors $(v_n)_n$ *est décroissante.*

- $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n!}=0.$
  En conclusion $(v_n)_n, (u_n)_n$ *sont adjacentes, donc elles sont convergentes, et convergent vers la même limite.*

Exercice 8.7. *Soit* $u_n=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}$
Supposons par l'absurde que u_n *est convergente, alors elle est de Cauchy et par suite*

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N},\forall p,q\in\mathbb{N}\,;\forall n\in\mathbb{N},(p,q\geq N_\varepsilon\Rightarrow|u_p-u_q|<\varepsilon)$$

Soit par exemple $p=2n$, *et* $q=n$, *alors*

$$|u_{2n}-u_n|=|1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}+...+\frac{1}{2n}-(1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n})|$$

$$=|\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n}|=|\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}|$$

D'autre part, $k\leq 2n\Rightarrow\frac{1}{k}\geq\frac{1}{2n}$, *et par suite*

$$|u_{2n}-u_n|=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\geq\frac{1}{2n}\sum_{k=n+1}^{2n}1\geq\frac{1}{2n}.n=\frac{1}{2}$$

Contradiction avec le fait que $(u_n)_n$ *est de Cauchy. En conclusion* $(u_n)_n$ *est divergente.*

8.3 Exercices supplémentaires

Exercice 8.8. *On considère les deux suites* (U_n) *et* (V_n) *définies par*

$$U_0=1,\quad V_0=2,$$
$$U_n=\frac{2U_{n-1}V_{n-1}}{U_{n-1}+V_{n-1}},\qquad V_n=\frac{U_{n-1}+V_{n-1}}{2}.$$

1. *Montrer que* $[\forall n\in\mathbb{N},\ U_n>0$ *et* $V_n>0]$.
2. *Pour* $n\in\mathbb{N}^*$ *calculer* V_n-U_n *en fonction de* U_{n-1} *et* V_{n-1}.
3. *En déduire que* $\forall n\in\mathbb{N},\ V_n-U_n>0$.
4. *Montrer que* (U_n) *est croissante et* (V_n) *est décroissante.*
5. *Déduire de 3. et 4. que* $[\forall n\in\mathbb{N},\ U_n<V_0$ *et* $V_n>U_0]$.

6. *En déduire que* (U_n) *et* (V_n) *sont convergentes.*

Exercice 8.9. *Soient* a, b *deux réels données* $a < b$.
Soit $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ *une fonction continue.*
On définit la limite $(u_n)_n$ *par*

$$\begin{cases} u_0 \in [a, b] \\ \\ u_{n+1} = f(u_n) \;\; \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. *Montrer que si* f *est croissante alors* $(u_n)_n$ *est monotone convergeant vers une solution de l'équation* $f(x) = x$.
2. *Calculer la limite de la suite définie par*

$$u_0 = 4 \quad \textit{et} \qquad u_{n+1} = \frac{4u_n + 5}{u_n + 3}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 8.10. *Soient* $k \in]0, 1[$, *et la suite* (u_n) *qui vérifie*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+2} - u_{n+1}| \leq k\, |u_{n+1} - u_n| \, .$$

1. *Montrer que*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - u_n| \leq k^n\, |u_1 - u_0| \, .$$

2. *Montrer que si* p *et* q *deux entiers tels que* $p > q \geq 0$, *alors*

$$|u_p - u_q| \leq \frac{k^q}{1-k}\, |U_1 - U_0| \, .$$

3. *Déduire que la suite* (u_n) *est de Cauchy, et par suite convergente.*

Chapitre 9

Fonction Réelle d'une Variable Réelle : Limites et Continuité

Sommaire

9.1 Exercices

Exercice 9.1. *Étudier la parité des fonctions suivantes*

1. $f(x) = -\sqrt{x^2+1}$.
2. $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x^2}$.
3. $f(x) = x^n$ *où* $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9.2. *Montrer que la fonction* $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{1+x^2}$ *est bornée sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 9.3. *Montrer en utilisant la définition de la limite d'une fonction en un point ce qui suit :*

1. $\lim\limits_{x\to 1} 3x+3 = 6$.
2. $\lim\limits_{x\to 1} x^2+x+1 = 3$.

Exercice 9.4. *Calculer les limites suivantes*

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$.
2. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2-a^2}{x^3-a^3}$.
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$.
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x^2}$.
5. $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}-\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

Exercice 9.5. *Montrer que les limites suivantes n'existent pas*

$$\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ et } \lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right),$$

puis calculer les limites suivantes

$$\lim_{x\to 0} \left((\sin(x))\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right),$$
$$\lim_{x\to 0} \left(x^3\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right).$$

Exercice 9.6. *Etudier la continuité des fonctions suivantes*

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{5x^2-2}{2} & \text{si } x \geq 1 \\ \cos(x-1) & \text{si } x < 1. \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} x^n\left(\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ *où* $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9.7. *Trouver les réels* α, β, *et* γ *pour que les fonctions suivantes soient continues sur* $\mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 1 \\ 3-\alpha x^2 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -2\sin(x) & \text{si } x \leq -\dfrac{\pi}{2} \\ \beta\sin(x)+\gamma & \text{si } -\dfrac{\pi}{2} < x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ \cos(x) & \text{si } x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Exercice 9.8. *Les fonctions suivantes admettent-elles un prolongement par continuité aux points où elles ne sont pas définies ?*

$$f_1(x) = \frac{|x|}{x}, \quad f_2(x) = \frac{(x-1)\sin(x)}{2x^2-2}, \quad f_3(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

9.2 Solutions

Exercice 9.1. *Etude de la parité des fonctions suivantes*

Avant de discuter la parité d'une fonction, il faut tout d'abord vérifier que son domaine de définition est symétrique par rapport à 0.

1. $f(x) = -\sqrt{x^2+1}$ *alors* $D_f = \mathbb{R}$ *et* $f(-x) = f(x)$ *donc* f *est paire.*
2. $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x^2}$ *alors* $D_f = \mathbb{R}^*$ *et* $f(-x) = -f(x)$ *donc* f *est impaire (rapport d'une fonction paire et une autre fonction impaire).*
3. $f(x) = x^n$ *où* $n \in \mathbb{N}$ *alors* $D_f = \mathbb{R}$ *et* $f(-x) = (-1)^n f(x)$ *donc si* n *est pair alors* f *est paire, et si* n *est impair alors* f *est impaire.*

Exercice 9.2. *La bornitude de la fonction* $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{1+x^2}$ *sur* $\mathbb{R}$.
On a $D_f = \mathbb{R}$. *D'un coté* $0 \leq |cos(x)| \leq 1$, *et d'un autre coté :*

$$1 + x^2 \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} \leq 1, \text{ et comme } \frac{1}{1+x^2} \geq 0.$$

Alors $|f(x)| = \dfrac{|cos(x)|}{1+x^2} \leq 1$, *et par suite* f *est bornée.*

Exercice 9.3. *En utilisant la définition de la limite d'une fonction en un point, on obtient*

1. $\lim\limits_{x \to 1} 3x + 3 = 6$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha_\varepsilon > 0,\ |x-1| < \alpha_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - 6| < \varepsilon.$$

Nous cherchons à obtenir $|f(x) - 6| < \varepsilon$ *i.e :* $|3x + 3 - 6| = |3x - 3| < \varepsilon$ *et donc* $3|x - 1| < \varepsilon$.
Il suffit pour cela que $|x - 1| < \dfrac{\varepsilon}{3}$, *donc on peut prendre* $\alpha_\varepsilon = \dfrac{\varepsilon}{3}$.

2. $\lim\limits_{x \to 1} x^2 + x + 1 = 3$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha_\varepsilon > 0,\ |x-1| < \alpha_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - 3| < \varepsilon.$$

Nous cherchons à obtenir $|f(x) - 3| < \varepsilon$ *i.e* $|x^2 + x + 1 - 3| < \varepsilon$. *Soit* $|(x-1)(x+2)| < \varepsilon$.
Comme x *tend vers* 1 *on peut supposer par exemple que*

$$x \in]1-3, 1+3[=]-2, 4[.$$

Donc

$$(x+2) \in]0,6[\Rightarrow 0 < x+2 < 6 \Rightarrow -6 < x+2 < 6 \Rightarrow |x+2| < 6.$$

On a $|f(x)-3| < \varepsilon \Rightarrow |x-1||x+2| < \varepsilon$, *pour obtenir ceci et comme* $|x+2| < 6$.
Il suffit par exemple d'avoir $|x-1| < \frac{\varepsilon}{6}$. *Mais n'oublions pas que nous avons imposé la condition* $x \in]-2,4[$ *soit* $|x-1| < 3$ *comme*

$$\begin{cases} |x-1| < \frac{\varepsilon}{6} \\ |x-1| < 3. \end{cases} \quad \text{\textit{Il suffit de prendre}} \ \alpha_\varepsilon = min\{\frac{\varepsilon}{6}, 3\}.$$

Exercice 9.4. *Calcul des limites*

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \dfrac{1}{4}.$

2. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2-a^2}{x^3-a}$

- *Si* $a = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} = \pm\infty.$
- *Si* $a \neq 0$, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2-a^2}{x^3-a^3} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{(x-a)(x+a)}{(x-a)(x^2+ax+a^2)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{x+a}{x^2+ax+a^2} = \dfrac{2a}{3a^2} = \dfrac{2}{3a}.$

3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x}-x\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(x^2+x-x^2)}{\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{x(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}})} = \dfrac{1}{2}.$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\cos(ax)-\cos(bx))}{x^2} \dfrac{(\cos(ax)+\cos(bx))}{(\cos(ax)+\cos(bx))}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2(ax)-\cos^2(bx)}{x^2(\cos(ax)+\cos(bx))} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\sin^2(ax)-1+\sin^2(bx)}{x^2(\cos(ax)+\cos(bx))}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(bx)-\sin^2(ax)}{x^2(\cos(ax)+\cos(bx))} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(bx)}{x^2(\cos(ax)+\cos(bx))}$$

$$- \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(ax)}{x^2(\cos(ax)+\cos(bx))}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(bx)}{bx}\right)^2 \frac{b^2}{(\cos(ax)+\cos(bx))} - \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(ax)}{ax}\right)^2 \frac{a^2}{(\cos(ax)+\cos(bx))}$$

$$= \frac{b^2-a^2}{2}, \qquad \text{\textit{car}} \ \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

5. $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}-\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$

- *Si* $a=0$, $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}^2} = 0.$
- *Si* $a \neq 0$,

$$\lim_{x\to a^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}-\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}} = \lim_{x\to a^+} [\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x^2-a^2}} - \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x-a}\sqrt{x+a}}]$$

$$= \lim_{x\to a^+} [\frac{x-a}{\sqrt{x^2-a^2}(\sqrt{x}+\sqrt{a})} - \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x-a}\sqrt{x+a}}]$$

$$= \lim_{x\to a^+} [\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})} - \frac{1}{\sqrt{x+a}}] = -\frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

Exercice 9.5. $\lim\limits_{x\to 0} \cos(\dfrac{1}{x})$ *n'existe pas, il suffit de considérer les deux suites*

$$u_n = \frac{1}{2n\pi} \ \text{ et } \ v_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$$

on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$*, mais* $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos(\dfrac{1}{u_n}) = 1$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos(\dfrac{1}{v_n}) = -1.$

Donc $\lim\limits_{x\to 0} \cos(\dfrac{1}{x})$ *n'existe pas.*

Pour $\sin(\dfrac{1}{x})$ *considérons par exemple,*

$$u_n = \frac{1}{n\pi} \ \text{ et } \ v_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$$

on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$*, mais* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(\dfrac{1}{u_n}) = 0$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(\dfrac{1}{v_n}) = 1.$

Donc $\lim\limits_{x\to 0} \sin(\dfrac{1}{x})$ *n'existe pas.*

Par contre $\lim\limits_{x\to 0} \sin(x)\sin(\dfrac{1}{x}) = \lim\limits_{x\to 0} x^3\cos(\dfrac{1}{x}) = 0$ *(produit d'une fonction bornée et d'une fonction tendant vers 0).*

Exercice 9.6. *Étude de la continuité des fonctions suivantes*

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{5x^2-2}{2} & \textit{si } x \geq 1 \\ \cos(x-1) & \textit{si } x < 1. \end{cases}$

   Pour $x \neq 1$, f *est continue, reste à étudier la continuité en* $x_0 = 1$.
   $f(1) = \dfrac{3}{2}$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \dfrac{3}{2}$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1$. *Donc* f *n'est pas continue en* $x_0 = 1$.

2. $f(x) = \begin{cases} x^n \left(\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$ *où* $n \in \mathbb{N}$

Pour $x \neq 0$, f *est continue, reste à étudier la continuité en* $x_0 = 0$.

$f(0) = 0$

- *Si* $n = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} \sin(\frac{1}{x})$ *n'existe pas.*
- *Si* $n \neq 0$ $\lim\limits_{x \to 0} x^n \sin(\frac{1}{x}) = 0 = f(0)$.

Alors

- *Si* $n \neq 0$ *Alors* f *est continue sur* $\mathbb{R}$.
- *Si* $n = 0$ f *n'est pas continue en* $x_0 = 0$.

Exercice 9.7. *Pour trouver les réels* α, β, *et* γ *pour que les fonctions suivantes soient continues sur* $\mathbb{R}$ *on procède comme suit :*

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & si\ x \leq 1 \\ 3 - \alpha x^2 & si\ x > 1 \end{cases}$$

Pour $x \neq 1$, f *est continue car* f *est une fonction polynomiale.*
Pour obtenir la continuité en $x_0 = 1$, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = f(1) = 2$. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2$. *et* $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 3 - \alpha$, *il suffit donc d'avoir* $3 - \alpha = 2 \Rightarrow \alpha = 1$.
f *est continue sur* $\mathbb{R}$ *ssi* $\alpha = 1$.

$$g(x) = \begin{cases} -2\sin(x) & si\ x \leq -\dfrac{\pi}{2} \\ \beta \sin(x) + \gamma & si\ -\dfrac{\pi}{2} < x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ \cos(x) & si\ x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Pour $x \neq \pm\frac{\pi}{2}$, f *est continue.*
Pour obtenir la continuité en $x_0 = \pm\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^-} f(x) = f(-\frac{\pi}{2}) = 2$
$\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^-} f(x) = 2$, *et* $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\beta + \gamma$, *d'autre part* $f(\frac{\pi}{2}) = \beta + \gamma$, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \beta + \gamma$ *et* $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = 0$
Pour avoir la continuité de f, *on doit avoir*

$$\begin{cases} -\beta + \gamma = 2 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = 1 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

Donc f *est continue sur* $\mathbb{R}$ *ssi* $\gamma = 1, \beta = -1$.

Exercice 9.8. *Etude de la prolongeabilité par continuité des fonctions suivantes :*

$$f_1(x) = \frac{|x|}{x}$$

f_1 n'est pas définie en 0 ; $\lim\limits_{x\to 0^+} f_1(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f_1(x) = -1$. Donc $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x)$ n'existe pas, alors f_1 n'est pas prolongeable par continuité en 0.

$$f_2(x) = \frac{(x-1)\sin(x)}{2x^2-2},$$

f_2 n'est pas définie en ± 1,

$$\lim_{x\to 1} f_2(x) = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\sin(x)}{2(x^2-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\sin(x)}{2(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{\sin(x)}{2(x+1)} = \frac{\sin(1)}{4}.$$

$$\lim_{x\to -1} f_2(x) = \lim_{x\to -1} \frac{(x-1)\sin(x)}{2(x^2-1)} = \pm\infty.$$

En conclusion f_2 est prolongeable par continuité en $x_0 = 1$ mais ne l'est pas en $x_0 = -1$ et son prolongement s'écrit :

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)\sin(x)}{2x^2-2} & \text{si } x \neq 1 \\[2ex] \dfrac{\sin(1)}{4} & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

$$f_3(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right),$$

f_3 n'est pas définie en 0, $\lim\limits_{x\to 0} f_3(x) = \sin(\frac{1}{x})$ n'existe pas.
Donc f_3 n'est pas prolongeable par continuité.

9.3 Exercices supplémentaires

Exercice 9.9. *Montrer que l'équation*

$$x = e^{-x}$$

admet une solution unique dans l'intervalle $[0,1]$, puis localiser cette solution dans un intervalle de longueur $l = 0.015625$.

Exercice 9.10. *Peut-on prolonger par continuité sur $\mathbb{R}$ les fonctions suivantes :*

$$f(x) = \sin(x)\sin(\frac{1}{x}), \qquad g(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}, \qquad h(x) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right).$$

Exercice 9.11. *Soit $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, $x \in \mathbb{R}$, n impair.*

1. *Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.*
2. *En déduire qu'il existe $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ tels que $f(x_0) \leq 0$ et $f(y_0) \geq 0$.*
3. *Déduire qu'il existe un point $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = 0$.*

Chapitre 10

Dérivation

Sommaire

10.1 Exercices

Exercice 10.1. *Calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants*
$f(x) = x^x$, $f(x) = \mathrm{e}^{x^x}$, $f(x) = \cos(x^5)$, $f(x) = \cos^5(x)$, $f(x) = \arctan(\mathrm{e}^x)$.

Exercice 10.2. *Calculer la dérivée $n^{\text{ième}}$ des fonctions suivantes*

1. $f(x) = \mathrm{e}^{ax}$.
2. $f(x) = \sin(x)$.
3. $f(x) = \cos(x)$.
4. $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.
5. $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
6. $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

Exercice 10.3. *Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $f(x) = (x-a)\,g(x)$. Montrer que f est dérivable en a, et calculer $f'(a)$.*

Exercice 10.4. *Montrer que*

$$\forall x \in [-1,1], \qquad \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 10.5. *Soient $f,\ g$ deux fonctions continues sur $[a, b]$ dérivables sur $]a, b[$ ne s'annulant pas, et telles que*

$$f(a)g(b) = f(b)g(a).$$

Montrer qu'il existe un $c \in\ ]a, b[$ tel que

$$\frac{f'(c)}{f(c)} = \frac{g'(c)}{g(c)}.$$

Exercice 10.6. *Soit x, y deux réels tels que $0 < x < y$. Montrer que*

$$x < \frac{y - x}{\ln(y) - \ln(x)} < y.$$

Exercice 10.7. *Donner le développement de Taylor Maclaurin pour $n = 5$, des fonctions suivantes :*

1. $f(x) = \mathrm{e}^x$.
2. $f(x) = \sin(x)$.
3. $f(x) = \cos(x)$.
4. $f(x) = \ln(1 + x)$.
5. $f(x) = (1 + x)^\alpha$.
6. $f(x) = \arctan(x)$.

Exercice 10.8. *En utilisant un développement de Taylor, calculer les limites suivantes*

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x) - x}{x}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x) - 1}{x}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1 + x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}}{(\sin(x))^4}$.

10.2 Solutions

Exercice 10.1. *Calcul de la dérivée de f dans chacun des cas suivants*

1. $f(x) = x^x = \mathrm{e}^{x\ln(x)} \Rightarrow f'(x) = (x\ln(x))'\mathrm{e}^{x\ln(x)} = (1+\ln(x))x^x$, $(x>0)$.
2. $f(x) = \mathrm{e}^{x^x} \Rightarrow f'(x) = (x^x)'\mathrm{e}^{x^x} = (1+\ln(x))x^x\mathrm{e}^{x^x}, \quad (x>0)$. *Maintenant, il faut bien rappeler la formule que* $[g(f(x))]' = f'(x)g'(f(x))$.
3. $f(x) = \cos(x^5) \Rightarrow f'(x) = -(x^5)'\sin(x^5) = -5x^4\sin(x^5)$.
   En rappelant la formule suivante : $(f^n(x))' = nf'(x)f^{n-1}(x)$.
4. $f(x) = \cos^5(x) \Rightarrow f'(x) = -5\sin(x)\cos^4(x)$.
5. $f(x) = \arctan(\mathrm{e}^x) \Rightarrow f'(x) = (\mathrm{e}^x)'(\arctan)'(\mathrm{e}^x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1}$.

Exercice 10.2. *Les dérivées $n^{ième}$ des fonctions suivantes*

1. $f(x) = e^{ax}$
   On dérive, $f'(x) = a\mathrm{e}^{ax}$, $f''(x) = a^2\mathrm{e}^{ax}$, *on déduit la formule de la dérivée n^{ieme} par* $f^{(n)}(x) = a^n\mathrm{e}^{ax}$. *Comme l'intuition ne suffit pas, il faut démontrer par récurrence que* $\forall n \in \mathbb{N},\ \ f^{(n)}(x) = a^n\mathrm{e}^{ax}$.
   Pour $n=1$, $f'(x) = a^1\mathrm{e}^{ax}$.
   On suppose que la formule est vraie pour n et on démontre que notre formule est vérifiée pour la dérivée d'ordre $(n+1)$.
   On a $f^{(n)}(x) = a^n\mathrm{e}^{ax} \Rightarrow (f^{(n)}(x))' = (a^n\mathrm{e}^{ax})' \Rightarrow f^{(n+1)}(x) = a^{n+1}\mathrm{e}^{ax}$ *alors la formule est vraie pour l'ordre $(n+1)$, donc on déduit que*
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \ f^{(n)}(x) = a^n\mathrm{e}^{ax}$$
2. $f(x) = \sin(x)$, *on dérive* $f'(x) = \cos(x) = \sin(x+\dfrac{\pi}{2})$, $f''(x) = -\sin(x) = \sin(x+\pi)$, $f^{(3)}(x) = -\cos(x) = \sin(x+\dfrac{3\pi}{2})$, $f^{(4)}(x) = \sin(x) = \sin(x+2\pi)$, *on peut généraliser et avoir*
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \ f^{(n)}(x) = \sin(x+\frac{n\pi}{2}),$$
   formule qu'il faudra démontrer par récurrence.
3. $f(x) = \cos(x)$ *comme le cas précédent, on arrive à la formule*
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \ f^{(n)}(x) = \cos(x+\frac{n\pi}{2}),$$
   qu'il faudra démontrer par récurrence.

4. $f(x) = \dfrac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$, *on dérive,* $f'(x) = 1(1-x)^{-2}, f''(x) = 1.2(1-x)^{-3}$, $f^{(3)}(x) = 1.2.3.(1-x)^{-4}$, *on dévine la formule de la dérivée* n^{ieme} *:*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}(x) = n!(1-x)^{-(n+1)}.$$

Formule qu'on doit la démontrer par récurrence :
Pour $n = 1$, $f'(x) = 1!(1-x)^{-1}$, *on suppose que la formule est vraie pour* n *et on démontre que notre formule est vérifiée pour la dérivée d'ordre* $(n+1)$. *On a*

$$f^{(n)}(x) = n!(1-x)^{-(n+1)} \Rightarrow (f^{(n)}(x))' = (n!(1-x)^{-(n+1)})'$$

$$\Rightarrow f^{(n+1)}(x) = n!(n+1)(1-x)^{-(n+1)},$$

alors la formule est vraie pour l'ordre $(n+1)$ *donc on déduit que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}(x) = n!(1-x)^{-(n+1)}.$$

5. $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ *on suit la même technique qu'auparavant on trouve que*

$$f^{(n)}(x) = n!(-1)^n(1+x)^{-(n+1)} \quad , \forall n \in \mathbb{N}.$$

6. *En remarquant que* $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1-x}\Big)$, *on déduit des deux formules précédentes, la formule suivante :*

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2}\Big(\frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}} + \frac{1}{(1-x)^{n+1}}\Big), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 10.3. *Soit* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue, et soit* $a \in \mathbb{R}$. *On pose* $f(x) = (x-a)\,g(x)$. *Le but de cet exercice est de provoquer l'erreur* $\Big(f(x)\Big)' = \Big((x-a)\,g(x)\Big)'$, *ce qui est clairement une erreur car* g *est supposée être seulement continue (pas nécessairement dérivable)*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)g(x) - f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)g(x)}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a} g(x) = g(a) \text{ donc } f'(a) = g(a).$$

Exercice 10.4. *Pour montrer que*

$$\forall x \in [-1,1], \qquad \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Avant de commencer, on fait un rappel sur

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}},$$

donc

$$(\arctan(x))' = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2},$$

et

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

car $x \in [-1,1]$, *on a* $\arcsin(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, *ainsi* $\cos(\arcsin(x))$ *est positif.*

$$(\arccos(x))' = \frac{-1}{\sin(\arccos(x))} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},$$

car $x \in [-1,1]$, *on a* $\arccos(x) \in [0,\pi]$, *donc* $\sin(\arccos(x))$ *est positif.*

On observe alors que

$$\arcsin'(x) + \arccos'(x) = 0 \Rightarrow \arcsin(x) + \arccos(x) = c,$$

il suffit donc de donner une valeur à x*, pour*

$$x = 0 \Rightarrow c = \arcsin(0) + \arccos(0) = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 10.5. *Soient* $f,\ g$ *deux fonctions continues sur* $[a,b]$ *dérivables sur* $]a,b[$ *et ne s'annulant pas, et telles que*

$$f(a)g(b) = f(b)g(a).$$

Pour montrer que $\exists c \in\,]a,b[$ *tel que*

$$\frac{f'(c)}{f(c)} = \frac{g'(c)}{g(c)}.$$

Il suffit de considérer la fonction $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$*, la fonction* h *est continue sur* $[a,b]$ *(comme rapport de deux fonctions continues) et derivable sur* $]a,b[$ *(comme rapport de deux fonctions derivables), de plus*

$$f(a)g(b) = g(a)f(b) \Rightarrow \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f(b)}{g(b)} \Rightarrow h(a) = h(b),$$

alors d'après le Théorème de Rolle : $\exists c \in]a,b[$ *tel que* $h'(c) = 0$*, or*

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)},$$

$$h'(c) = 0 \Rightarrow f'(c)g(c) = f(c)g'(c),$$

donc

$$\frac{f'(c)}{f(c)} = \frac{g'(c)}{g(c)},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 10.6. *Soit x, y deux réels tels que $0 < x < y$.*
Considérer la fonction $f(t) = \ln(t)$ et lui appliquer le Théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[x, y]$, f étant continue sur $[x, y]$ et dérivable sur $]x, y[$ alors il existe $c \in]x, y[$ telque

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x),$$

soit

$$\ln(y) - \ln(x) = \frac{1}{c}(y - x),$$

or $c \in]x, y[$ donc $x < c < y$,

$$\frac{1}{y} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{y}(y-x) < \frac{1}{c}(y-x) < \frac{1}{x}(y-x),$$

donc

$$\frac{1}{y}(y-x) < \ln(y) - \ln(x) < \frac{1}{x}(y-x) \Rightarrow x < \frac{y-x}{\ln(y) - \ln(x)} < y.$$

Exercice 10.7. *Le but de cet exercice est d'utiliser le développement de Taylor, lorsque f possède des dérivées successives au voisinage de x_0 on a la formule :*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!} f'''(x_0) + \\ &+ \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + (x-x_0)^n \varepsilon(x) \quad \textit{avec} \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0. \end{aligned}$$

Pour $n = 5, x_0 = 0$, la formule de Taylor Maclaurin des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\epsilon(x).$
2. $f(x) = \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\epsilon(x).$
3. $f(x) = \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^4\epsilon(x).$
4. $f(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + x^5\epsilon(x).$

5. $f(x) = (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\dfrac{x^2}{2!} + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dfrac{x^3}{3!} + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\dfrac{x^4}{4!} + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)(\alpha-4)\dfrac{x^5}{5!} + x^5\epsilon(x)$.
6. $f(x) = \arctan(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + x^5\epsilon(x)$,

$$\textit{avec } \lim_{x \to x_0} \epsilon(x) = 0.$$

Exercice 10.8. *A l'aide d'un développement de Taylor, calculons les limites suivantes*

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 + x + \frac{x^2}{2!} + x^2\epsilon(x) - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} 1 + \dfrac{x}{2!} + x\epsilon(x) = 1$,
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x) - x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\epsilon(x) - x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{x^2}{3!} + \dfrac{x^4}{5!} + x^4\epsilon(x) = 0$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x) - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^4\epsilon(x) - 1}{x} = -\dfrac{x}{2!} + \dfrac{x^3}{4!} + x^3\epsilon(x) = 0$,
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}}{(\sin(x))^4}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^4\epsilon(x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}}{(\sin(x))^4}$$

$$= \lim_{x\to 0} \Big[-\frac{1}{4}\Big(\frac{x}{\sin(x)}\Big)^4 + \epsilon(x)\Big(\frac{x}{\sin(x)}\Big)^4 \Big] = -\frac{1}{4}.$$

10.3 Exercices supplémentaires

Exercice 10.9. *Donner une valeur approchée de* $\sqrt{\mathrm{e}}$ *à* 10^{-4} *près.*

Exercice 10.10. *On note* $[x]$ *la partie entière de* x, *(exemple* $[5.9] = 5, [-3.7] = -4$*). Soit*

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x[x - \frac{1}{x}]. \end{array}$$

Montrer que f *admet une limite en* 0 *et calculer cette limite.*

Problème :

Soit $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$

1. On suppose que $\forall x, y \in [a,b], |f(x) - f(y)| \leq |x - y|$.
   – Montrer que f est continue sur $[a,b]$.
   – En déduire que $f(x) = x$ possède au moins une solution dans $[a,b]$.
2. On suppose à présent que
$$\forall x, y \in [a,b], x \neq y, |f(x) - f(y)| < |x - y|.$$
   Montrer que l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution dans $[a,b]$.
3. Soit
$$\begin{array}{rcl} g & : & [0,2] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = \ln(x^2 + 2) \end{array}$$
   – Montrer que $\max\limits_{x \in [0,2]} |g'(x)| < 1$.
   – Montrer que $g([0,2]) \subset [0,2]$.
4. Montrer que l'équation $g(x) = x$ possède une unique solution dans $[0,2]$.
5. Montrer que f est injective.

Troisième partie

Outils Mathématiques

Chapitre 11

Calcul Intégral

Sommaire

11.1 Exercices

Exercice 11.1. *Calculer les intégrales indéfinies suivantes*

1. $I_1 = \displaystyle\int \left(x^2 + 3x + 1\right) \mathrm{e}^x dx,$
2. $I_2 = \displaystyle\int \left(3x^2 + x\right) \cos(x) dx,$
3. $I_3 = \displaystyle\int \left(x^2 - 1\right) \sin(x) dx,$
4. $I_4 = \displaystyle\int x^n \ln(x) dx,$
5. $I_5 = \displaystyle\int \arctan(x) dx,$
6. $I_6 = \displaystyle\int \arcsin(x) dx.$

Exercice 11.2. *Trouver une relation entre I et J, puis calculer I et J*

$$\begin{aligned} I &= \int (\sin(x))\, \mathrm{e}^x dx, \\ J &= \int (\cos(x))\, \mathrm{e}^x dx. \end{aligned}$$

En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))\, \mathrm{e}^x dx$.

Exercice 11.3. *Utiliser un changement de variables pour calculer ce qui suit*

1. $I_1 = \displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}} dx$,
2. $I_2 = \displaystyle\int \frac{\ln^2(x)}{x} dx$,
3. $I_3 = \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{5-x^2}} dx$,
4. $I_4 = \displaystyle\int \frac{1}{2\sin^2(x)+3\cos^2(x)} dx$,
5. $I_5 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x)}{\sin^2(x)-5\sin(x)+6} dx$,
6. $I_6 = \displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx$.

Exercice 11.4. *Calculer ce qui suit*

1. $I_1 = \displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+5} dx$,
2. $I_2 = \displaystyle\int \frac{1}{x^2-6x+5} dx$,
3. $I_3 = \displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+2x+3} dx$,
4. $I_4 = \displaystyle\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2} dx$.

Exercice 11.5. *Calculer ce qui suit*

1. $I_1 = \displaystyle\int \frac{1}{5-3\cos(x)} dx$,
2. $I_2 = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^3(x)} dx$,
3. $I_3 = \displaystyle\int \frac{1}{\cos(x)} dx$,
4. $I_4 = \displaystyle\int \frac{1}{4-5\sin(x)} dx$,
5. $I_5 = \displaystyle\int \cos^2(x) dx$.

Exercice 11.6. *Une voiture roule à une vitesse* $v(t) = v_0 \left(t - t^2\right) kmh^{-1}$ *durant l'intervalle* $0 \leq t \leq 1h$. *Quelle a été sa vitesse maximale ? Quelle distance a-t-elle parcourue ?*

Exercice 11.7. *Soit* f *une fonction continue sur l'intervalle* $[-a, a]$; $a > 0$. *Montrer que*

1. *Si* f *est paire alors* $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$.
2. *Si* f *est impaire alors* $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

Exercice 11.8. *Calculer* $I_n = \displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^n(x))\, dx$ *où* $n \in \mathbb{N}$.

11.2 Solutions

Dans toute cette section, c désignera une constante réelle arbitraire.

Exercice 11.1. *Calculer les intégrales indéfinies suivantes*

1. $I_1 = \int \left(x^2+3x+1\right) \mathrm{e}^x dx = \int x^2 \mathrm{e}^x dx dx + 3\int x\mathrm{e}^x dx + \int \mathrm{e}^x dx = I_1' + 3I_2' + I_3'$, *on utilise la linéarité de l'intégrale pour décomposer I_1 en la somme de trois intégrales :*

$$I_3' = \int \mathrm{e}^x dx = \mathrm{e}^x + c,$$

$$I_2' = \int 3x\mathrm{e}^x dx,$$

par une intégration par parties, et en posant

$$f(x) = x, g(x) = \mathrm{e}^x \text{ donc } f'(x) = 1, g'(x) = \mathrm{e}^x,$$

on obtient

$$I_2' = x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x dx = (x-1)\mathrm{e}^x + c,$$

$$I_1' = \int x^2\mathrm{e}^x dx = x^2\mathrm{e}^x - 2\int x\mathrm{e}^x dx = x^2\mathrm{e}^x - 2I_2' = x^2\mathrm{e}^x - 2(x-1)\mathrm{e}^x + c.$$

Alors

$$I_1 = \mathrm{e}^x + 3(x-1)\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x - 2(x-1)\mathrm{e}^x + c = (x^2+x)\mathrm{e}^x + c.$$

2. $I_2 = \int \left(3x^2+x\right)\cos(x)dx = 3\int x^2\cos(x)dx + \int x\cos(x)dx = 3I_1' + I_2'$, *on commence par*

$$I_2' = \int x\cos(x)dx = x\sin(x) - \int \sin(x)dx = x\sin(x) + \cos(x) + c,$$

et

$$\begin{aligned} I_1' = x^2\sin(x) - 2\int x\sin(x)dx &= x^2\sin(x) + 2x\cos(x) + 2\int \cos(x)dx \\ &= x^2\sin(x) + 2x\cos(x) - 2\sin(x) + c, \end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned} I_2 &= 3x^2\sin(x) + 6x\cos(x) - 6\sin(x) + x\sin(x) + \cos(x) + c \\ &= (3x^2+x-6)\sin(x) + (6x+1)\cos(x) + c. \end{aligned}$$

3.

$$I_3 = \int \left(x^2 - 1\right) \sin(x) dx = \cos(x) - x^2 \cos(x) + \int 2x \cos(x) dx$$

$$= \cos(x) - x^2 \cos(x) + 2x \sin(x) - 2 \int \sin(x) dx$$

$$= \cos(x) - x^2 \cos(x) + 2x \sin(x) + 2\cos(x) + c.$$

On en déduit que

$$I_3 = (3 - x^2)\cos(x) + 2x\sin(x) + c.$$

4. $I_4 = \displaystyle\int x^n \ln(x) dx$*, par une intégration par parties, et en posant*

$$f(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}, g(x) = \ln(x) \text{ donc } f'(x) = x^n, g'(x) = \frac{1}{x},$$

on obtient

$$I_4 = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln(x) - \int \frac{x^{n+1}}{n+1} \frac{1}{x} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln(x) - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2},$$

soit encore

$$I_4 = \frac{x^{n+1}}{n+1} (\ln(x) - \frac{1}{n+1}) + c.$$

5.

$$I_5 = \int \arctan(x) dx = \int 1.\arctan(x) dx = x \arctan(x) - \int \frac{x}{x^2+1} dx$$

$$= x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln|x^2 + 1| + c.$$

6.

$$I_6 = \int \arcsin(x) dx = \int 1.\arcsin(x) dx = x \arcsin(x) + \int \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= x \arcsin(x) + \sqrt{1 - x^2} + c.$$

Exercice 11.2. *Trouver une relation entre* I *et* J*, puis calculer* I *et* J

$$I = \int (\sin(x))\, \mathrm{e}^x dx, \qquad J = \int (\cos(x))\, \mathrm{e}^x dx.$$

1. *Par une intégration par parties de I et J on trouve les deux relations :*
   $I = \displaystyle\int (\sin(x))\, \mathrm{e}^x dx = -\cos(x)\mathrm{e}^x + \int (\cos(x))\, \mathrm{e}^x dx = -\cos(x)\mathrm{e}^x + J,$
   $J = \displaystyle\int (\cos(x))\, \mathrm{e}^x dx = -\sin(x)\mathrm{e}^x - \int (\sin(x))\, \mathrm{e}^x dx = \sin(x)\mathrm{e}^x - I.$

2. *La valeur de* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))\, \mathrm{e}^x dx$

   On a
   $$I = -\cos(x)\mathrm{e}^x + J, \quad J = \sin(x)\mathrm{e}^x - I,$$
   par substitution on obtient
   $$I = \frac{1}{2}(\sin(x) - \cos(x))\mathrm{e}^x,$$
   et par suite
   $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))\, \mathrm{e}^x dx = [\frac{1}{2}(\sin(x) - \cos(x))\mathrm{e}^x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}.$$

Exercice 11.3. *Utiliser un changement de variables pour calculer ce qui suit*

1. $I_1 = \displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^{2x}} dx,$
   on pose $u(x) = \mathrm{e}^x$ alors $du = \mathrm{e}^x dx$, donc
   $$I_1 = \int \frac{du}{1 + u^2} = \arctan(u) + c = \arctan(\mathrm{e}^x) + c.$$

2. $I_2 = \displaystyle\int \frac{\ln^2(x)}{x} dx,$
   on pose $u(x) = \ln(x)$ alors $du = \dfrac{1}{x} dx$, donc
   $$I_2 = \int u^2 du = \frac{1}{3}u^3 + c = \frac{1}{3}(\ln(x))^3 + c.$$

3. $I_3 = \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{5 - x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{1 - (\frac{x}{\sqrt{5}})^2}} dx,$
   on pose $y = \dfrac{x}{\sqrt{5}}$ alors $dy = \dfrac{dx}{\sqrt{5}}$, donc
   $$I_3 = \int \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} dy = \arcsin(y) + c = \arcsin(\frac{x}{\sqrt{5}}) + c.$$

4.

$$I_4 = \int \frac{1}{2\sin^2(x) + 3\cos^2(x)} dx = \int \frac{1}{3\cos^2(x)(\frac{2}{3}\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} + 1)} dx$$

$$= \int \frac{1}{3\cos^2(x)(\frac{2}{3}\tan^2(x) + 1)} dx,$$

on pose $t = \tan(x)$*, alors* $dt = \dfrac{dx}{\cos^2(x)}$*, donc*

$$I_4 = \int \frac{1}{3(\frac{2}{3}t^2 + 1)} dt,$$

on pose alors un second changement de variable

$$t' = \sqrt{\frac{2}{3}}t, \ \text{ donc } \ dt' = \sqrt{\frac{2}{3}}dt,$$

alors

$$I_4 = \int \frac{1}{\sqrt{6}}\frac{1}{t'^2 + 1} dt' = \frac{1}{\sqrt{6}}\arctan(t') + c = \frac{1}{\sqrt{6}}\arctan(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\tan(x)) + c.$$

5. $I_5 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x)}{\sin^2(x) - \sin(x) + 6} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin(x)\cos(x)}{\sin^2(x) - \sin(x) + 6} dx,$
on pose alors $t = \sin(x)$*, donc* $dt = \cos(x)dx$*, par suite,*

$$I_5 = \int_0^1 \frac{2t}{t^2 - t + 6} dt,$$

on effectue une décomposition en éléments simples

$$\frac{2t}{t^2 - t + 6} = \frac{6}{t-3} - \frac{4}{t-2}$$

et on obtient

$$I_5 = \int_0^1 \frac{1}{t^2 - t + 6} dt = \int_0^1 \frac{6}{t-3} dt - \int_0^1 \frac{4}{t-2} dt$$

$$= \left[6\ln|t-3| - 4\ln|t-2|\right]_0^1,$$

alors

$$I_5 = 10\ln|2| - 6\ln|3|.$$

6. $I_6 = \displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx$,

on pose $y = \sqrt{x-1}$ *soit* $x = y^2+1$ *donc* $dy = \dfrac{dx}{2\sqrt{x-1}}$, *notre intégrale s'écrit alors*

$$I_6 = \int_0^1 \frac{2y^2-2+2}{y^2+1}dy = 2 - \int_0^1 \frac{2}{y^2+1}dy = 2 - 2\big[\arctan(y)\big]_0^1 = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

Finalement

$$I_6 = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 11.4. *Calculer ce qui suit*

1. $I_1 = \displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+5}dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+4}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{(\frac{x+1}{2})^2+1}dx$, *on pose* $t = \dfrac{x+1}{2}$ *alors* $dt = \dfrac{dx}{2}$, *donc*

$$I_1 = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}dx = \frac{1}{2}\arctan(t) = \frac{1}{2}\arctan(\frac{x+1}{2}) + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

2. $I_2 = \displaystyle\int \frac{1}{x^2-6x+5}dx = \int \frac{1}{(x-1)(x-5)}dx$

une décomposition en éléments simples donne

$$\frac{1}{x^2-6x+5} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-5},$$

après identification on obtient

$$I_2 = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-5}dx - \int \frac{1}{4}\frac{1}{x-1}dx = \frac{1}{4}(\ln|x-5| - \ln|x-1|) + c.$$

3.
$$\begin{aligned} I_3 = \int \frac{x-1}{x^2+2x+3}dx &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)-2}{x^2+2x+3}dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}dx - \int \frac{2}{x^2+2x+3}dx \\ &= \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+3| - \int \frac{2}{x^2+2x+3}dx + c, \end{aligned}$$

et $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+3}dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+2}dx = \int \frac{1}{2((\frac{x+1}{\sqrt{2}})^2+1)}dx$,

on pose alors $t = \dfrac{x+1}{\sqrt{2}}$ et donc $dt = \dfrac{dx}{\sqrt{2}}$ *ce qui donne*

$$\int \frac{1}{\sqrt{2}(t^2+1)}dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\frac{x+1}{\sqrt{2}}) + c,$$

et par suite

$$I_3 = \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+3| - \sqrt{2}\arctan(\frac{x+1}{\sqrt{2}}) + c.$$

4. $I_4 = \displaystyle\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)-2}{(x^2+2x+3)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2}dx$
$- \displaystyle\int \frac{2}{(x^2+2x+3)^2}dx = \frac{-1}{2(x^2+2x+3)} - \int \frac{2}{(x^2+2x+3)^2}dx,$
et $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+2x+3)^2}dx = \int \frac{1}{((x+1)^2+2)^2}dx = \int \frac{1}{4\big[(\frac{x+1}{\sqrt{2}})^2+1\big]^2}dx,$
on pose $t = \frac{x+1}{\sqrt{2}}$ *soit* $dt = \frac{dx}{\sqrt{2}}$ *d'où*

$$\int \frac{1}{2\sqrt{2}(t^2+1)^2}dt = \frac{1}{2\sqrt{2}}I_4' + c,$$

et par suite

$$I_4 = \frac{-1}{2(x^2+2x+3)} - \frac{1}{\sqrt{2}}I_4'.$$

$$I_4' = \int \frac{1}{(t^2+1)^2}dt = \int \frac{1+t^2-t^2}{(t^2+1)^2}dt = \int \frac{dt}{t^2+1} - \int \frac{t^2}{(t^2+1)^2}dt$$
$$= \arctan(t) - \int \frac{t^2}{(t^2+1)^2}dt.$$

Enfin une intégration par parties donne

$$\int \frac{t^2}{(t^2+1)^2}dt = \frac{1}{2}\big[\frac{-t}{t^2+1} + \int \frac{dt}{t^2+1}\big] = \frac{1}{2}\big[\frac{-t}{t^2+1} + \arctan(t)\big]$$

soit encore

$$I_4 = \frac{-1}{2(x^2+2x+3)} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big[\frac{\frac{x+1}{\sqrt{2}}}{(\frac{x+1}{\sqrt{2}})^2+1} + \arctan(\frac{x+1}{\sqrt{2}})\Big],$$

et finalement

$$I_4 = \frac{-x-2}{2x^2+4x+6} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\frac{x+1}{\sqrt{2}}) + c.$$

Exercice 11.5. *Calculer ce qui suit*

1. $I_1 = \int \frac{1}{5-3\cos(x)}dx$
On utilise le changement de variable dit "universel"
$t = \tan(\frac{x}{2})$ *avec* $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, *et* $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$
notre intégrale devient
$$I_1 = \int \frac{1}{5-3\cos(x)}dx = \int \frac{1}{5-3\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{1}{1+4t^2}dt$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+(2t)^2}d(2t) = \frac{1}{2}\arctan(2\tan(\frac{x}{2})) + c.$$

2. $I_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^3(x)}dx = \int_{\tan(\frac{\pi}{8})}^{1} \frac{(t^2+1)^2}{4t^3}dt = \int_{\tan(\frac{\pi}{8})}^{1} \frac{t}{4}dt + \int_{\tan(\frac{\pi}{8})}^{1} \frac{1}{2t}dt +$
$\int_{\tan(\frac{\pi}{8})}^{1} \frac{1}{4t^3}dt = \frac{1}{8}(1-\tan^2(\frac{\pi}{8})) - \frac{1}{2}\ln(\tan(\frac{\pi}{8})) - \frac{1}{8}(1 - \frac{1}{\tan^2(\frac{\pi}{8})}).$

3. $I_3 = \int \frac{1}{\cos(x)}dx = \int \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{2}{1-t^2}dt$
$$= \int \frac{1}{1+t}dt + \int \frac{1}{1-t}dt = \ln|1+\tan(\frac{x}{2})| - \ln|1-\tan(\frac{x}{2})| + c.$$

4. $I_4 = \int \frac{1}{4-5\sin(x)}dx = \int \frac{1}{4-5\frac{2t}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{1}{2t^2-5t+2}dt$
$= \int \frac{1}{(t-2)(t-\frac{1}{2})}dt = \frac{2}{3}\int \frac{1}{t-2}dt - \frac{2}{3}\int \frac{1}{t-\frac{1}{2}}dt$
$$= \ln|\tan(\frac{x}{2}) - 2| - \ln|\tan(\frac{x}{2}) - \frac{1}{2}| + c.$$

5. $I_5 = \int cos^4(x)dx = \int (1-\sin^2(x))\cos^2(x)dx$
$$= \int \cos^2(x)dx - \int \sin^2(x)\cos^2(x)dx.$$

On a plusieurs méthodes, parmi lesquelles l'utilisation de la formule d'Euler pour le cosinus et le sinus
$$\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, \sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}.$$

En substituant dans notre intégrale on obtient

$$\begin{aligned}I_5 &= \int (\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2})^2 dx - \int (\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i})^2 (\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2})^2 dx \\ &= \frac{1}{4}[\frac{1}{2i}e^{2ix} - \frac{1}{2i}e^{-2ix} + 2x] + \frac{1}{16}\int (e^{2ix}-e^{-2ix})^2 dx \\ &= \frac{1}{4}[\frac{1}{2i}e^{2ix} - \frac{1}{2i}e^{-2ix} + 2x] + \frac{1}{16}[\frac{1}{4i}e^{4ix} - \frac{1}{4i}e^{-4ix} - 2x],\end{aligned}$$

après simplification on aboutit à

$$I_5 = \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{\sin(4x)}{32} + \frac{3x}{8} + c.$$

Exercice 11.6.

1. *Pour la vitesse maximale*
   $v'(t) = 0 \Rightarrow 1 - 2t = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$, *donc* $v(\frac{1}{2}) = \frac{v_0}{4}$.
2. *La distance parcourue*
   $\int_0^1 v_0(t-t^2)dt = v_0\big[(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3})\big]_0^1 = \frac{v_0}{6}$.

Exercice 11.7. *Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[-a, a]$; $a > 0$.*

1. *Si f est paire alors* $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$
   f étant paire on a $f(-x) = f(x)$, alors

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = I_1 + I_2$$

Pour le calcul de $I_1 = \int_{-a}^{0} f(x)dx$, on effectue un changement de variable en posant $t = -x$, et donc $dt = -dx$
Alors $I_1 = -\int_a^0 f(-t)dt = \int_0^a f(t)dt = I_2$ car f est paire.
ce qui nous permet de conclure

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$$

2. *Si f est impaire alors* $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$
   On suit les mêmes étapes que le cas précédent, du fait que f est impaire, on a $f(-x) = -f(x)$, alors

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = I_1' + I_2'$$

Pour le calcul de $I_1' = \int_{-a}^{0} f(x)dx$*, on effectue le changement de variable* $t = -x$*, et donc* $dt = -dx$*, on obtient alors*
$I_1' = -\int_a^0 f(-t)dt = -\int_0^a f(t)dt = -I_2$ *car f est impaire.*
et par suite

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

Exercice 11.8. $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx$ *où* $n \in \mathbb{N}$ *(Intégrale de Wallis)*
On a
$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^2 \sin^{n-2}(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos(x)^2)\sin^{n-2}(x)dx$
$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^2 \sin^{n-2}(x)dx = I_{n-2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^2 \sin^{n-2}(x)dx.$
On intègre alors par parties la seconde intégrale du second membre, en posant :
$u'(x) = \cos(x)\sin(x)^{n-2}$ *dont la primitive* $u(x) = \frac{1}{n-1}\sin^{n-1}(x)$
$v(x) = \cos(x)$ *de dérivee* $v'(x) = -\sin(x)$ *ce qui donne :*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^2 \sin^{n-2}(x)dx = [\frac{1}{n-1}\sin^{n-1}(x)\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\sin^{n-1}(x)dx$$

$$= 0 + \frac{1}{n-1} I_n.$$

On obtient ainsi la relation récurrente suivante :

$$I_n = I_{n-2} - \frac{1}{n-1} I_n,$$

ou encore

$$nI_n = (n-1)I_{n-2} \text{ pour tout } n \geq 2.$$

Il est facile de calculer $I_0 = \frac{\pi}{2}$ *et* $I_0 = 1$*, et de proche en proche on obtient la formule*

$$\begin{aligned} I_n &= (n-1)I_{n-2} \\ &= (n-1)(n-3)I_{n-4} \\ &= (n-1)(n-3)(n-5)I_{n-6} \\ &\vdots \end{aligned}$$

et finalement selon la parité de n *on a les formules*

$$I_{2k} = \frac{(2k)!}{2^{2k}k!^2} \cdot \frac{\pi}{2} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*,$$

et

$$I_{2k+1} = \frac{2^{2k}k!^2}{(2k+1)!} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

11.3 Exercices supplémentaires

Exercice 11.9. *Calculer les intégrales suivantes :*

1. $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{-x}+e^x}dx,$
2. $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^3\sqrt{4-x^2},$
3. $\displaystyle\int \frac{2x\sin(x)+x^2\cos(x)}{x^2\sin(x)}dx,$
4. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}\arctan(x)dx,$
5. $\displaystyle\int \frac{\sin^3(x)}{\cos^5(x)}dx,$
6. $\displaystyle\int x\cos(x^2-2)dx,$
7. $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+x+3}dx,$
8. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin(x)}dx,$
9. $\displaystyle\int x\ln(x^2+x-1)dx,$
10. $\displaystyle\int \frac{x^7+x^3-1}{(x^2+2x+3)(x+1)^2}dx.$

Exercice 11.10. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*, \beta \in \mathbb{R}^* - \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$. Trouver les valeurs de α, β pour avoir les résultats suivants :*

1. $$\int_0^{2\sqrt{\alpha}} \frac{1}{x^2+4\alpha}dx = \frac{\pi}{2}.$$

2. $$\int_0^1 \frac{1}{x^2-4\beta^2}dx = \ln\mid 1-2\beta\mid - \ln\mid 1+2\beta\mid.$$

Exercice 11.11. *Soit*

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}, n \in \mathbb{N}$$

1. *Montrer que* $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$.
2. *Calculer* $I_n + I_{n+1}$.
3. *Déterminer*

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \Big).$$

Chapitre 12

Equations Différentielles

Sommaire

12.1 Exercices

Exercice 12.1. *Trouver les équations différentielles qui ont pour solution les fonctions suivantes :*

1. $f(x) = ax,\ \ a \in \mathbb{R}$.
2. $f(x) = a\mathrm{e}^{x},\ a \in \mathbb{R}$.
3. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{x}}$.

Exercice 12.2. *Résoudre les équations différentielles suivantes*

1. $y' \sin(x) = y \cos(x)$.
2. $y^2 + (x+1)\, y' = 0$.
3. $xy\prime - ay = 0\ \ a \in \mathbb{R}^*$.
4. $y' = 2x\sqrt{1-y^2}$.
5. $y' - xe^{-y} = 0$.
6. $y = \ln(y')$.

Exercice 12.3. *Intégrer les équation suivantes*

1. $xy' = x - y$.
2. $xy^2y' = x^3 + y^3$.
3. $x - y + xy' = 0$.

Exercice 12.4. *Résoudre par deux méthodes les équations différentielles suivantes*

1. $y' + y = x$.
2. $\left(\dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right) y' + \left(\dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right) y = \dfrac{1}{1 + x^2}$.
3. $xy\prime - y = x^2$.

Exercice 12.5. *Résoudre les équations différentielles suivantes*

1. $xy' + y = y^2 \ln(x)$.
2. $x^3y' + y^2 + yx^2 + 2x^4 = 0$.
3. $\left(x^2 + 1\right)\, y' = y^2 - 1$.

Exercice 12.6. *Résoudre ce qui suit*

1. $y'' + y = (x + 1)$.
2. $y'' + 2y' + y = e^{3x}$.
3. $y'' + 5y' + 6y = \left(x^2 + 1\right)$.

12.2 Solutions

Exercice 12.1. *Pour trouver les équations différentielles qui ont pour solution les fonctions $y = f(x)$ suivantes : on utilise la dérivation, plus précisement*

1. $f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$ *en dérivant on obtient,* $y' = a$ *donc* $y' = \frac{1}{x}y$ *où* $xy' = y$.
2. $f(x) = a\mathrm{e}^x$, $a \in \mathbb{R}$ *en dérivant on obtient,* $y' = a\mathrm{e}^x$ *donc* $y' = y$.
3. $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$, *donc,* $y' = \frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}$ *donc* $(1+\mathrm{e}^x)y' = y$.

Exercice 12.2. *Le but de cet exercices est de traiter les équation à variables séparables (séparées), la procédure à suivre étant de mettre les y d'un côté et les x de l'autre, puis d'utiliser la définition $y' = \frac{dy}{dx}$, et finalement il suffira d'intégrer*

1.
$$y' \sin(x) = y\cos(x) \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}, \textit{ si } y \neq 0$$
(on remarque que $y = 0$ est une solution il ne faudra pas l'oublier !)
On pose à présent $y' = \frac{dy}{dx}$, ce qui donne
$$\frac{dy}{y} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}dx \Rightarrow \ln|y| = \ln|\sin(x)| + c$$
$$\Rightarrow |y| = e^{\ln|\sin(x)|+c} \Rightarrow |y| = ke^{\ln|\sin(x)|} \; (k > 0, k = e^c)$$
$$\Rightarrow |y| = k|\sin(x)| \Rightarrow y = \pm k\sin(x) \Rightarrow y = K\sin(x), \quad K \in I\!R^*$$
(N'oublions pas que $y = 0$ est une solution), alors
$$y = K\sin(x) \qquad K \in I\!R.$$

2.
$$y^2 = -(x+1)\,y' \Rightarrow \frac{y'}{y^2} = \frac{1}{x+1}, \; y \neq 0$$
(On remarque que $y = 0$ est une solution qu'il ne faudra pas oublier, d'un autre côté, bien que l'on ait divisé par $(x+1)$ il n'est pas nécessaire de dire $x \neq -1$, car $x = -1$ est un point singulier dans l'équation de départ. Pour faire simple ; on ne se soucie que de la fonction inconnue y)
On pose à présent $y' = \frac{dy}{dx}$, ce qui donne
$$\frac{-dy}{y^2} = \frac{1}{x+1}dx \Rightarrow \int \frac{-dy}{y^2} = \int \frac{1}{x+1}dx$$
$$\Rightarrow \frac{1}{y} = \ln|x+1| + c \Rightarrow y = \frac{1}{\ln|x+1|+c}.$$

3.
$$xy\prime = ay \;\; a \in \mathbb{R}^*.$$

En utilisant le même procédé que plus haut on trouve :

$$y = K|x|^a \qquad K \in I\!R.$$

4.
$$y' = 2x\sqrt{1-y^2}$$

si $y \neq \pm 1$ alors

$$y' = 2x\sqrt{1-y^2} \Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{1-y^2}} = 2x \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 2xdx$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int 2xdx \Rightarrow \arcsin(y) = x^2 + c \Rightarrow y = \sin(x^2+c).$$

Sans oublier que $y = \pm 1$ sont aussi des solutions.

5.
$$y' - x\mathrm{e}^{-y} = 0$$

$$y' - x\mathrm{e}^{-y} = 0 \Rightarrow y' = x\mathrm{e}^{-y} \Rightarrow y'\mathrm{e}^{y} = x$$

$$\Rightarrow \mathrm{e}^{y}dy = xdx \Rightarrow \int \mathrm{e}^{y}dy = \int xdx \Rightarrow \mathrm{e}^{y} = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\Rightarrow y = \ln|\frac{x^2}{2} + c|.$$

6. $y = \ln(y') \Rightarrow y' = \mathrm{e}^{y} \Rightarrow y'\mathrm{e}^{-y} = 1 \Rightarrow \mathrm{e}^{-y}dy = dx$

$$\Rightarrow \int \mathrm{e}^{-y}dy = \int dx \Rightarrow \mathrm{e}^{-y} = -x + c \Rightarrow -y = \ln(c-x)$$

$$\Rightarrow y = \ln(\frac{1}{c-x}) \qquad c \in I\!R.$$

Exercice 12.3. *Les équations présentées dans cet exercice sont des équations homogènes, donc de la forme $y' = f(\frac{y}{x})$, pour les résoudre la procédure consiste à poser le changement de fonction $u = \frac{y}{x}$, et ainsi se ramèner à une équation à variables séparables.*

1. $xy' = x - y \Rightarrow y' = 1 - \frac{y}{x}$ *on pose* ($u = \frac{y}{x}, y = ux$ *donc* $y' = u + xu'$)
$\Rightarrow u + xu' = 1 - 2u \Rightarrow \frac{u'}{1-2u} = \frac{1}{x} \qquad (u \neq \frac{1}{2})$, *(on remarque que si*

$u = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}x$ *qui est bien une solution)*
$\Rightarrow \int \frac{u'}{1-2u} = \int \frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{du}{1-2u} = \int \frac{1}{x}dx$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\ln|1-2u| = \ln|x| + c \Rightarrow \ln|1-2u| = \ln(\frac{1}{x^2}) + c'$$

$\Rightarrow |1-2u| = \frac{k}{x^2}, \qquad (k = e^c > 0) \Rightarrow (1-2u) = \frac{K}{x^2}, K = \pm k, K \in I\!R^*$
$\Rightarrow u = \frac{1}{2}(1 - \frac{K}{x^2})$
comme $y = ux \Rightarrow y = \frac{1}{2}x(1-\frac{K}{x^2}) \qquad K \in I\!R^*$ *;*
or $y = \frac{1}{2}x$ *est aussi une solution, donc en définitive*

$$y = \frac{1}{2}x(1-\frac{K}{x^2}) \qquad K \in I\!R.$$

2. $xy^2y' = x^3 + y^3 \Rightarrow y' = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y}{x}$*, on pose* $U = \frac{y}{x}$ *alors* $y' = U'x + U$ *en remplaçant dans l'équation, on obtient*

$$U'x + U = \frac{1}{U^2} + U \Rightarrow U'U^2 = \frac{1}{x} \Rightarrow U^2 dU = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \int U^2 dU = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{1}{3}U^3 = \ln|x| + c \Rightarrow U^3 = \ln|x|^3 + k$$

$$\Rightarrow U = (\ln|x|^3 + k)^{\frac{1}{3}} \Longrightarrow y = x(\ln|x|^3 + k)^{\frac{1}{3}}, \quad k \in \mathbb{R}$$

3. $x - y + xy' = 0 \Rightarrow xy' = \frac{y}{x} - 1.$
On pose $U = \frac{y}{x}$ *alors* $y' = U'x + U$ *en remplaçant dans l'équation, on obtient*

$$U'x + U = U - 1 \Rightarrow U' = -\frac{1}{x} \Rightarrow \int dU = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow U = -\ln|x| + c \Rightarrow y = x(-\ln|x| + c), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Exercice 12.4. *Cet exercice est consacré aux équations différentielles linéaire du premier ordre. Pour résoudre ce type d'équation, il existe deux méthodes, l'une étant de trouver le facteur intégrant qui transforme l'équation en la dérivée d'un produit de fonction. L'autre consiste à résoudre l'équation sans second membre, qui est en fait une équation à variables séparables, ensuite résoudre l'équation avec second membre par la technique dite de la variation de la constante.*

1. $y' + y = x$

1ère Méthode : On résout l 'équation sans second membre $y' + y = 0$

$$y' + y = 0 \Rightarrow y' = -y \Rightarrow \frac{y'}{y} = -1$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int dx$$

$$\Rightarrow \ln |y| = -x + c \Rightarrow y_0 = K\mathrm{e}^{-x}, \quad K \in \mathbb{R}$$

Pour l'équation avec second membre on utilise la méthode de variation de la constante $y_* = K(x)e^{-x}$

$y'_* + y_* = K'(x)\mathrm{e}^{-x} - K(x)\mathrm{e}^{-x} + K(x)\mathrm{e}^{-x} = x \Rightarrow K'(x) = x\mathrm{e}^{x}$

$$K(x) = \int x\mathrm{e}^{x} dx = x\mathrm{e}^{x} - \int \mathrm{e}^{x} dx = (x-1)\mathrm{e}^{x}$$

$$\Rightarrow y_* = (x-1)\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{-x} = x - 1$$

La solution générale est donnée par $y = y_* + y_0 = K\mathrm{e}^{-x} + x - 1$

$$y = K\mathrm{e}^{-x} + x - 1, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

2ème Méthode :

$$y' + y = x \Rightarrow y'\mathrm{e}^{x} + y\mathrm{e}^{x} = x\mathrm{e}^{x}$$

$$\Rightarrow (y\mathrm{e}^{x})' = x\mathrm{e}^{x} \Rightarrow y\mathrm{e}^{x} = \int x\mathrm{e}^{x} dx \Rightarrow y\mathrm{e}^{x} = (x-1)\mathrm{e}^{x} + K$$

$$\Rightarrow y = (x-1) + K\mathrm{e}^{-x}$$

$$y = (x-1) + K\mathrm{e}^{-x}, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

2.
$$\left(\frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right) y' + \left(\frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right) y = \frac{1}{1+x^2}$$

1ère Méthode :Equation Sans Second Membre ensuite Equation Avec Second Membre ; en utilisant la méthode de la variation de la constante.

2ème Méthode : Il suffit de remarquer que

$$\left(\frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)' = \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

Ainsi

$$\left(\frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right) y' + \left(\frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right) y = \left[\frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2} y\right]' = \frac{1}{1+x^2},$$

après intégration on trouve

$$\int [\frac{e^x + e^{-x}}{2} y]' dx = \int \frac{1}{1+x^2} dx,$$

soit encore

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} y = \arctan(x) + K \Rightarrow y = 2\frac{\arctan(x) + K}{e^x + e^{-x}}, \qquad K \in I\!R.$$

3.

$$xy\prime - y = x^2$$

1ère Méthode :Equation Sans Second Membre ensuite Equation Avec Second Membre ; en utilisant la méthode de la variation de la constante.
2ème Méthode : Il suffit de remarquer que

$$xy\prime - y = x^2 \Rightarrow \frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2} y = 1 \Rightarrow (\frac{1}{x} y)' = 1 \Rightarrow \frac{1}{x} y = x + K.$$

Donc

$$y = x^2 + Kx, \qquad K \in I\!R.$$

Exercice 12.5. *Résolution déquations différentielles suivantes :*

1. $xy' + y = y^2 \ln(x)$. *(C'est une équation de Bernoulli)*
   Pour $y \neq 0$ *on a*

$$xy' + y = y^2 \ln(x) \Rightarrow x\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{y} - \ln(x) = 0,$$

on pose alors

$$u = y^{-1}$$

et par suite

$$u = -y'y^{-2},$$

on remplace dans notre équation pour obtenir

$$-xu' + u - \ln(x) = 0,$$

et cette dernière équation est une équation linéaire que l'on sait résoudre. On résout l'équation sans second membre $-xu' + u = 0$

$$-xu' + u = 0 \Rightarrow xu' = u \Rightarrow \frac{u'}{u} = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \ln|u| = \ln|x| + c \Rightarrow u_0 = Kx, \quad K \in I\!R,$$

pour l'équation avec second membre il suffit de remarquer que

$$u_* = \ln(x) + 1$$

est une solution particulière, alors la solution générale est

$$u = u_* + u_0 = Kx + \ln(x) + 1 \quad K \in I\!R,$$

comme $y = u^{-1}$, *alors*

$$y = \frac{1}{Kx + \ln(x) + 1} \quad K \in I\!R.$$

Sans oublier que $y = 0$ *est aussi une solution.*

2. $x^3y' + y^2 + yx^2 + 2x^4 = 0$. *C'est une équation de Riccati, ayant comme solution particulière*

$$y_* = -x^2,$$

puisque la solution particulière est $y_* = -x^2$, *la solution générale s'écrira sous la forme*

$$y = y_* + u = -x^2 + u,$$

pour déterminer u *remplaçons* y *dans l'équation*

$$x^3y' + yx^2 + y^2 = -2x^4 \Rightarrow x^3u' - x^2u + u^2 = 0,$$

et cette dernière équation est une équation de Bernoulli en u, *équation que l'on sait résoudre,* $u = 0$ *est une solution et :*

$$x^3u'u^{-2} - x^2u^{-1} + 1 = 0,$$

on pose $w = u^{-1}$, *on remplace dans l'équation, et on obtient*

$$-x^3w' - x^2w + 1 = 0,$$

et cette équation est une équation linéaire, on résout l'équation sans second membre

$$-x^3w' - x^2w = 0 \Rightarrow \frac{w'}{w} = -\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dw}{w} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \ln|w| = -\ln|x| + c \Rightarrow w_0(x) = \frac{K}{x}, \quad K \in I\!R,$$

pour l'équation avec second membre, on utilise la méthode de la variation de la constante : on pose $w_*(x) = \dfrac{K(x)}{x}$*, et on remplace dans l'équation avec second membre, on trouve l'équation*

$$-x^3(\frac{K'}{x} - \frac{K}{x^2}) - x^2\frac{K}{x} + 1 = 0 \Rightarrow K'(x) = x^{-2} \Rightarrow K(x) = \frac{-1}{x},$$

alors $w^*(x) = \dfrac{K(x)}{x} = \dfrac{-1}{x^2}$*, donc la solution générale de l'équation sans second membre est donnée par*

$$w(x) = w_0(x) + w_*(x) = \frac{K}{x} + \frac{-1}{x^2} = \frac{Kx-1}{x^2},$$

comme $w = u^{-1}$ *alors*

$$u(x) = \frac{x^2}{Kx-1},$$

alors la solution générale de l'équation de Riccati est donnée par

$$y = y_* + u = -x^2 + u = -x^2 + \frac{x^2}{Kx-1} = \frac{x^2(2-Kx)}{Kx-1}.$$

3.

$$\left(x^2+1\right)\ y' = y^2 - 1$$

$$\left(x^2+1\right)\ y' = y^2 - 1 \Rightarrow \frac{y'}{y^2-1} = \frac{1}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y^2-1} = \frac{dx}{x^2+1},$$

or

$$\frac{1}{y^2-1} = \frac{1}{2}[\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}],$$

alors

$$\frac{dy}{y^2-1} = \frac{dx}{x^2+1} \Rightarrow \frac{1}{2}[\frac{dy}{y-1} - \frac{dy}{y+1}] = 2\frac{dx}{x^2+1}$$

$$\int[\frac{dy}{y-1} - \frac{dy}{y+1}] = 2\int\frac{dx}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow \ln|y-1| - \ln|y+1| = 2\arctan(x) + c \Rightarrow \ln|\frac{y-1}{y+1}| = 2\arctan(x) + c$$

$$\Rightarrow |\frac{y-1}{y+1}| = \mathrm{e}^{(2\arctan(x)+c)} = K\mathrm{e}^{(2\arctan(x))}$$

$$\Rightarrow y-1 = (y+1)K\mathrm{e}^{(2\arctan(x))} \Rightarrow y(1-K\mathrm{e}^{(2\arctan(x))}) = (1+K\mathrm{e}^{(2\arctan(x))})$$

$$\Rightarrow y = \frac{1+K\mathrm{e}^{(2\arctan(x))}}{1-K\mathrm{e}^{(2\arctan(x))}}$$

avec $K > 0$.

Exercice 12.6. *Cet exercice est consacré aux équations différentielles du deuxième ordre, linéaires à coefficients constants.*

1. $y'' + y = (x+1)$
   ESSM : $y'' + y = 0$, *l'équation caractéristique associée*

$$r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r = \pm i.$$

On en déduit la solution générale de l'ESSM

$$y_0 = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x), \qquad (c_1, c_2 \in I\!R).$$

En observant que $y_* = (x+1)$ *est une solution particulière de l'EASM, on a*

$$y = y_0 + y_* \Rightarrow y = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) + (x+1), \qquad (c_1, c_2 \in I\!R).$$

2. $y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^{3x}$.
   ESSM : $y'' + 2y' + y = 0$ *l'équation caractéristique associée*

$$r^2 + 2r + 1 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = -1.$$

On en déduit la solution générale de l'ESSM

$$y_0 = (c_1 + c_2 x)\mathrm{e}^{-x} \qquad (c_1, c_2 \in I\!R).$$

En observant que $y_* = c_2 \mathrm{e}^{3x}$ *est une solution particulière de l'EASM, on a*

$$y = y_0 + y_* \Rightarrow y = (c_1 + c_2 x)\mathrm{e}^{-x} + c\mathrm{e}^{3x}, \qquad (c_1, c_2 \in I\!R).$$

3. $y'' + 5y' + 6y = \left(x^2 + 1\right)$
   ESSM : $y'' + 5y' + 6y = 0$ *l'équation caractéristique associée*

$$r^2 + 5r + 6 = 0 \Rightarrow r_1 = -3, r_2 = -2.$$

On en déduit la solution générale de l'ESSM

$$y_0 = c_1 \mathrm{e}^{-3x} + c_2 \mathrm{e}^{-2x}, \qquad (c_1, c_2 \in I\!R).$$

En observant que $y_* = \frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{18}x + \frac{37}{108}$ *est une solution particulière de l'EASM, on a*

$$y = y_0 + y_* \Rightarrow y = c_1 \mathrm{e}^{-3x} + c_2 \mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{18}x + \frac{37}{108}, \qquad (c_1, c_2 \in I\!R).$$

12.3 Exercices supplémentaires

Exercice 12.7. *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$y^{(3)} + 2y^{(2)} + y' = 0.$$

Exercice 12.8. *Soit l'équation*

$$x^2 y'' + xy' + 2y = 0. \qquad (E)$$

1. $z(t) = y(\mathrm{e}^x)$ *avec* $(t = \mathrm{e}^x)$ *vérifie une équation différentielle à coefficients constants.*
2. *Résoudre* (E).

Quatrième partie

Examens

Chapitre 13

Examens Algèbre

Sommaire

13.1 Examen Final 2011-2012

Université Abou-Bakr-Belkaid de Tlemcen
Département de Génie Eléctrique et Eléctronique

Niveau : GI/L1/S1
2011-2012

Examen Final

Exercice-1 (07 points)

1. Résoudre l'équation diophantienne suivante :

$$74x + 54y = 2000$$

2. Trouver la solution (x, y), telle que $x > 0$ et $y > 0$.

Exercice-2 (08 points)

Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Soit la matrice $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
   Calculer le produit des matrices $P^{-1}AP$.
2. Déduire de ce qui précède l'expression de A^n ; où n est un entier naturel.

Exercice-3 (05 points)

Soient a, b, k et n des entiers naturels non nuls.
Montrer par deux méthodes différentes l'implication suivante :

$$a \equiv b[k] \Longrightarrow a^n \equiv b^n[k]$$

Solution

Exercice-1 **(07 points)**

1. Résolution de : $74x + 54y = 2000$
   On commence par calculer pgcd(74,54)
   $74 = 54.1 + 20, 54 = 20.2 + 14, 20 = 14.1 + 6, 14 = 6.2 + 2, 6 = 2.3 + 0.$
   Ainsi $\text{pgcd}(74, 54) = 2, 2|2000$ l'équation donnée possède des solutions dans $\mathbb{Z}$.
   On divise l'équation par le pgcd, i.e :
   $$74x + 54y = 2000 \Leftrightarrow 37x + 27y = 1000.$$
   Comme 37 et 27 sont premiers entre eux, alors d'après le théorème de Bezout, il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que : $37u + 27v = 1$.
   $37 = 27.1 + 10, 27 = 10.2 + 7, 10 = 7.1 + 3, 7 = 3.2 + 1, 3 = 1.3 + 0$
   Pour trouver u et v on remonte les divisions successives, on trouve : $u = -8$ et $v = 11$ soit donc $37(-8) + 27(11) = 1$.
   Alors $37(-8000)+27(11000) = 1000$, par suite ; $(x_0, y_0) = (-8000, 11000)$ est solution particulière.
   $\begin{cases} 37x + 27y = 1000 \\ 37(-8000) + 27(11000) = 1000 \end{cases} \Rightarrow 37(x + 8000) = 27(11000 - y).$
   Comme 37 et 27 sont premiers entre eux ; d'après le lemme Gauss
   $27|(x + 8000) \Rightarrow x + 8000 = 27k, k \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow x = 27k - 8000 \quad k \in \mathbb{Z}.$
   Et par suite $11000 - y = 37k \Rightarrow y = -37k + 11000, k \in \mathbb{Z}$.
   L'ensemble des solutions :
   $$\{(x, y) = (27k - 8000, -37k + 11000), k \in \mathbb{Z}.\}$$

2. $x > 0 \Longrightarrow 27k - 8000 > 0 \Rightarrow k > 296.296$
   $y > 0 \Rightarrow -37k + 11000 > 0 \Rightarrow k < 297.297.$
   Ainsi $k \in \mathbb{Z}, 296.296 < k < 297.297 \Rightarrow k = 297.$
   $x = 27(297) - 8000 = 19, y = -37(297) + 11000 = 11$
   Alors $\quad (x, y) = (19, 11).$

Exercice-2 (08 points)

Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. $\det(P) = -2 \neq 0$, alors P est inversible et P^{-1} existe.

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} {}^{t}\mathrm{com}(P) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{Alors, } \; P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Notons que $B = P^{-1}AP \Rightarrow AP = PB \Rightarrow A = PBP^{-1}$. Ainsi $A^n = AA...A = (PBP^{-1})(PBP^{-1})...(PBP^{-1})$, et on a $P^{-1}P = I$, nous obtenons que $A^n = P.B.B.B...P^{-1} = PB^nP^{-1}$
   Il suffit alors de remarquer que $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$, et donc

$$A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (-1)^n + 1 & (-1)^{n+1} + 1 & (-1)^{n+1} + 1 \\ 1 - 2^n & 1 + 2^n & 1 - 2^n \\ (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^n - 2^n & (-1)^n + 2^n \end{pmatrix}.$$

Exercice-3 (05 points)

Soient a, b, k et n des entiers naturels non nuls.

$$a \equiv b[k] \Rightarrow a^n \equiv b^n[k]$$

– **1ère méthode :** Par récurrence :
  $n = 1, a \equiv b[k]$ est vérifie c'est l'hypothèse.
  On suppose que $a^n \equiv b^n[k]$, il faut montrer que $a^{n+1} \equiv b^{n+1}[k]$
  $a^n \equiv b^n[k]$ et comme $a \equiv b[k]$ alors $a^n.a \equiv b^n.b[k] \Rightarrow a^{n+1} \equiv b^{n+1}[k]$.
  Donc
$$a \equiv b[k] \Rightarrow a^n \equiv b^n[k].$$

– **2ème méthode :** Il suffit de remarquer l'identité

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Comme par hypothèse :$a \equiv b[k] \Rightarrow k|(b-a) \Rightarrow a-b = k.k'$.
Ainsi

$$a^n - b^n = k.k'(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}) = kK.$$

Donc

$$k|(a^n - b^n) \Rightarrow a^n \equiv b^n[k].$$

13.2 Examen Final 2012-2013

Université Abou-Bakr-Belkaid de Tlemcen **Niveau : GI/L1/S1**
Département de Génie Eléctrique et Eléctronique **2012-2013**

Examen Final

Exercice-1 (10 points)

Soient les deux matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-2}{3} & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$.

1. Calculer MN.
2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, par deux méthodes différentes calculer $\det(A)$.
3. Calculer A^{-1}. (On rappelle que $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\,{}^t\text{com}(A)$)
4. En déduire la solution du sysème :

$$\begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ y - 2z = 16 \\ 2x - y = 12 \end{cases}$$

Exercice-2 (10 points)

Soit l'application f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = |x-2| + 2x$.

1. f est-elle injective ?
2. f est-elle surjective ?
3. Calculer $(f \circ f)(x)$.
4. Montrer que $(f \circ f)$ est bijective.

Solution

Exercice-1 (10 points)

1. $M.N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-2}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$

2. – Première méthode : $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2.3 + 1.(-2) + 0 = 4.$
   – Deuxième méthode :
   On remarque que $A = M.N$, donc $\det(A) = \det(M).\det(N)$, or M et N sont deux matrices triangulaires :
   $\det(M) = 1.1.1 = 1, \det(N) = 2.\frac{3}{2}.\frac{4}{3} = 4$. Donc
   $$\det(A) = \det(M).\det(N) = 1.4 = 4.$$

3. $\det(A) = 4 \neq 0$, donc A est inversible, $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}{}^t\text{com}(A)$.
   Les cofacteurs $c_{1,1} = 3, c_{1,2} = 2, c_{1,3} = 1; c_{2,1} = 2, c_{2,2} = 4, c_{2,3} = 2; c_{3,1} = 1, c_{3,2} = 2, c_{3,3} = 3,$ donc
   $$\text{com}(A) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$
   $$A^{-1} = \frac{1}{|A|}{}^t(\text{com}(P)) \Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

4.
   $$\begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ y - 2z = 16 \\ 2x - y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 12 \\ -x + 2y - z = -4 \\ -y + 2z = -16 \end{cases} \Rightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ -16 \end{pmatrix}$$
   Donc
   $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Alors
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -11 \end{pmatrix}$$

<u>Exercice-2</u> (10 points)

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow f(x) = |x-2| + 2x$$

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \leq 2 \\ 3x-2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

1. Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$,
   - $x_1 \leq 2$ et $x_2 \leq 2$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + 2 = x_2 + 2 \Rightarrow x_1 = x_2$.
   - $x_1 \geq 2$ et $x_2 \geq 2$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 3x_1 - 2 = 3x_2 - 2 \Rightarrow x_1 = x_2$
   - $x_1 \leq 2$ et $x_2 \geq 2$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + 2 = 3x_2 - 2 \Rightarrow x_2 = 3x_1 - 4$. C'est impossible d'avoir $x_2 = 3x_1 - 4$, en effet $x_1 \geq 2 \Rightarrow 3x_1 - 4 \geq 2$ et on a $x_1 \leq 2$.
   - $x_1 \geq 2$ et $x_2 \leq 2$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + 2 = 3x_2 - 2 \Rightarrow x_1 = 3x_2 - 4$, comme dans le cas précédent, c'est impossible d'avoir $x_1 = 3x_2 - 4$ avec $x_1 \geq 2$ et $x_2 \leq 2$.

   En conclusion
   $$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

2. Soit $y \in \mathbb{R}$
   $$y = f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \leq 2 \\ 3x-2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$
   On remarque que
   $$\begin{cases} x \leq 2 \Rightarrow x + 2 \leq 4 \Rightarrow y \leq 4 \\ x \geq 2 \Rightarrow 3x - 2 \geq 4 \Rightarrow y \geq 4. \end{cases}$$
   Donc, si $y \leq 4 \Rightarrow y = x + 2 \Rightarrow x = y - 2, (x \leq 2)$.
   Si $y \geq 4 \Rightarrow y = 3x - 2 \Rightarrow x = \frac{y+2}{3}; (x \geq 2)$.
   Donc $\forall x \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = y - 2 & \text{si } y \leq 4 \\ x = \frac{y+2}{3} & \text{si } y \geq 4 \end{cases}$ tel que $y = f(x)$.
   Donc f est surjective.

3. $(f \circ f)(x)$

$$= f(f(x)) = |f(x) - 2| + 2f(x) = ||x-2| + 2x - 2| + 2(|x-2| + 2x)$$

$$= \begin{cases} |x| + 2(x+2) & \text{si } x \leq 2 \\ \\ |3x-4| + 2(3x-2) & \text{si } x \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} -x + 2(x+2) & \text{si } x \leq 0 \\ x + 2(x+2) & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 3x - 4 + 2(3x-2) & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x+4 & \text{si } x \leq 0 \\ 3x+4 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 9x-8 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Remarque : Il existe une autre méthode qui consiste à procéder comme suit :

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \begin{cases} f(x) + 2 & \text{si } f(x) \leq 2 \\ \\ 3f(x) - 2 & \text{si } f(x) \geq 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x+4 & \text{si } x \leq 0 \\ 3x+4 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 9x-8 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

4. D'après la première question, f est injective et surjective donc f bijective .

$$f \text{ est bijective } \Rightarrow (f \circ f) \text{ est bijective .}$$

Remarque : Il existe une autre méthode (plus longue) qui consiste à montrer que $f \circ f$ est injective et surjective ; dans ce cas :
$(f \circ f)$ injective
$(f \circ f)$ surjective . Alors $(f \circ f)$ est bijective

13.3 Rattrapage 2012-2013

Université Abou-Bakr-Belkaid de Tlemcen **Niveau : GI/L1/S1**
Département de Génie Eléctrique et Eléctronique **2012-2013**

Rattrapage

Exercice-1 (10 points)

1. Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, est inversible et calculer P^{-1}.
2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$, trouver une matrice diagonale D telle que $A = PDP^{-1}$.
3. On considère les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par $u_0 = 1$ et $v_0 = 1$, et
$$\begin{cases} u_n = \frac{4}{5}u_{n-1} + \frac{2}{5}v_{n-1} \\ v_n = \frac{1}{5}u_{n-1} + \frac{3}{5}v_{n-1} \end{cases}$$
Calculer les limites : $\lim_{n\to\infty} u_n$ et $\lim_{n\to\infty} v_n$

Exercice-2 (10 points)

1. Soit l'application g définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :
$$g(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{si } x < 0 \\ -x+2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$
Montrer que g n'est ni injective ni surjective.
2. Soit l'application f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{si } x < 0 \\ x+2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$
Montrer que f est injective et surjective, et donner l'expression de sa fonction réciproque $f^{-1}(x)$.
3. Donner l'epression de $(gof)(x)$

Solution

Exercice-1 (10 points)

1. $\det(P) = -3 \neq 0$, donc P est inversible.

$$P^{-1} = \frac{1}{|D|}{}^{t}(\mathrm{com}(P)) \Longrightarrow P^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

2. On a $A = PDP^{-1} \Longrightarrow D = P^{-1}AP$. Ainsi

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

3. $u_0 = 1$ et $v_0 = 1$, et

$$\begin{cases} u_n = \frac{4}{5}u_{n-1} + \frac{2}{5}v_{n-1} \\ v_n = \frac{1}{5}u_{n-1} + \frac{3}{5}v_{n-1} \end{cases} \quad \text{......................}(S)$$

Le système (S) peut être mis sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix} = A^2\begin{pmatrix} u_{n-2} \\ v_{n-2} \end{pmatrix}.$$

On obtient alors,

$$\begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'un autre côté :

$$A = PDP^{-1} \Longrightarrow A^n = A.A....A = PDP^{-1}.PDP^{-1}...PDP^{-1} = PD^nP^{-1}.$$

Donc

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\frac{2}{5})^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(\frac{2}{5})^n & \frac{2}{3} - \frac{2}{3}(\frac{2}{5})^n \\ \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(\frac{2}{5})^n & \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(\frac{2}{5})^n \end{pmatrix}.$$

Donc
$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \lim_{n\to\infty} A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$
Comme $\lim_{n\to\infty} (\frac{2}{5})^n = 0$, on obtient
$$\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$
En conclusion : $\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{4}{3}$ et $\lim_{n\to\infty} v_n = \frac{4}{3}$.

Exercice-2 (10 points)

1. $$g(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{si } x < 0 \\ -x+2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$
   Pour montrer que g n'est pas injective, choisissons $x_1 < 0$ et $x_2 \geq 0$
   $$g(x_1) = g(x_2) \Longrightarrow 2x_1 + 2 = -x_2 + 2 \Longrightarrow x_2 = -2x_1.$$
   Il suffit par exemple de considérer $x_1 = -1$ et $x_2 = 2$.
   $g(-1) = g(2) =$ mais $-1 \neq 2$ donc g n'est pas injective.
2. Pour montrer que g n'est pas surjective, observons que
   $$\begin{cases} \text{si } x < 0 \Longrightarrow g(x) = 2x+2 < 2 \\ \text{si } x \geq 0 \Longrightarrow g(x) = -x+2 \leq 2 \end{cases}$$
   Ainsi $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) \leq 2$.
   Soit ($y > 2$) par exemple $y = 3$, alors $y = g(x)$ n'admet pas de solution.
   En effet, $3 = g(x) = \begin{cases} 3 = 2x+2 < 2 & \text{si } x < 0 \\ 3 = -x+2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$
   $$\Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} & \text{si } x < 0 \\ x = -1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \text{(Absurde).}$$
   Donc g n'est pas surjective.
3. $$f(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{si } x < 0 \\ x+2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$
   Pour l'injectivité :
   Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $f(x_1) = f(x_2)$.

- $x_1 < 0$ et $x_2 < 0$, $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow 2x_1 + 2 = 2x_2 + 2 \Longrightarrow x_1 = x_2$
- $x_1 < 0$ et $x_2 \geq 0$, $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow 2x_1 + 2 = x_2 + 2 \Longrightarrow 2x_1 = x_2$ rejeté (car $x_1 < 0$ et $x_2 \geq 0$)
- $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$ et $x_1 \geq 0$ et $x_2 < 0$, se traitent de la même façon.

Ainsi la conclusion :

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2.$$

Surjectivité :

$$\begin{cases} \text{si } x < 0 \Longrightarrow f(x) = 2x + 2 < 2 \\ \text{si } x \geq 0 \Longrightarrow f(x) = -x + 2 \geq 2 \end{cases}$$

Soit $y \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} y < 2, y = f(x) \Longrightarrow y = 2x + 2 < 2 \Longrightarrow x = \frac{y-2}{2} < 0 \\ y \geq 2, y = f(x) \Longrightarrow y = -x + 2 \Longrightarrow x = 2 - y \geq 0 \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{cases} y < 2, \exists x = \frac{y-2}{2} & \text{tel que } y = f(x) \\ y \geq 2, \exists x = 2 - y & \text{tel que } y = f(x) \end{cases}$$

Donc

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} \text{ tel que } y = f(x)$$

Alors f est surjective.

En conclusion f est bijective, et de ce qui précède on déduit que :

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{2} & \text{si } x < 2 \\ x + 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

4.

$$(gof)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} 2f(x) + 2 & \text{si } f(x) < 0 \\ f(x) + 2 & \text{si } f(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2(2x + 2) + 2 & \text{si } x < -1 \\ -(2x + 2) + 2 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ -(x + 2) + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Donc

$$(gof)(x) = \begin{cases} 4x + 6 & \text{si } x < -1 \\ -2x & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ -x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

13.4 Examen Final 2013-2014

Université Abou-Bakr-Belkaid de Tlemcen **Niveau : GI/L1/S1**
Département de Génie Eléctrique et Eléctronique **2013-2014**

Examen Final

Exercice-1(07 points)

Soit α un paramètre réel on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Pour quelles valeurs du paramètre α, la matrice A est -elle inversible ?
2. Lorsque cela est possible, calculer A^{-1},
   (On rappelle que $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\,{}^t\text{com}(A)$) où n est un entier naturel.
3. En déduire la solution du système : $\begin{cases} y + z = 4 \\ 2x + 2y = 16 \\ 3x + 3z = 12 \end{cases}$

Exercice-2 (07 points)

Soit les deux applications suivantes :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad\qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

$$(x_1, x_2) \to f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \qquad\qquad x \to g(x) = (x^2, -x^2)$$

1. f est-elle injective ?f est-elle surjective ?
2. g est-elle injective ?g est-elle surjective ?
3. Calculer $(f \circ g)(x)$.
4. $(f \circ g)(x)$est-elle injective ? $(f \circ g)(x)$ est-elle surjective ?

Exercice-3 **(06 points)**

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a

$$M^n = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^n+1}{2} & \frac{1-(-1)^n}{2} & \frac{1-(-1)^n}{2} \\ \frac{1-2^n}{2} & \frac{1+2^n}{2} & \frac{1-2^n}{2} \\ \frac{2^n-(-1)^n}{2} & \frac{(-1)^n-2^n}{2} & \frac{2^n+(-1)^n}{2} \end{pmatrix}.$$

Solution

Exercice-1 (07 points)

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \end{pmatrix}$, det$(A) = -(1+\alpha^3)$.
   det$(A) = 0 \Longrightarrow -(1+\alpha^3) = 0 \Longrightarrow \alpha^3 = -1 \Longrightarrow \alpha = -1$.
   La matrice A est inversible SSI det$(A) \neq 0$, donc A est inversible SSI $\alpha \neq -1$.

2. On suppose que $\alpha \neq -1$ donc A^{-1} existe, det$(A) = -(1+\alpha^3) \neq 0$. Donc

$$\text{com}(A) = \begin{pmatrix} -1 & \alpha & -\alpha^2 \\ \alpha & -\alpha^2 & -1 \\ -\alpha^2 & -1 & \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{-1}{\alpha^3+1} \begin{pmatrix} -1 & \alpha & -\alpha^2 \\ \alpha & -\alpha^2 & -1 \\ -\alpha^2 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$$

3.
$$\begin{cases} y+z=4 \\ 2x+2y=16 \\ 3x+3z=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+3z=12 \\ y+z=4 \\ 2x+2y=16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+z=4 \\ y+z=4 \\ x+y=8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ où } \alpha = 1$$

Pour $\alpha = 1$, $A^{-1} = \dfrac{-1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Et donc

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$x = 4, y = 4, z = 0.$$

Exercice-2 (07 points)

Soit les deux applications suivantes :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad\qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

$$(x_1, x_2) \to f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \qquad\qquad x \to g(x) = (x^2, -x^2)$$

1.
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x_1, x_2) \to f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

- Il suffit de remarquer que par exemple : $X_1 = (1, 4)$ et $X_2 = (3, 2)$, $f(X_1) = f(X_2) = 5$ mais $X_1 \neq X_2$ donc f n'est pas injective.
- Il suffit de remarquer

  $$\forall y \in \mathbb{R}, \exists X = (x_1, x_2) = (0, y) \in \mathbb{R}^2, y = f(0, y) = 0 + y = y.$$

  Donc f est surjective.

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$
$$x \to g(x) = (x^2, -x^2)$$

2. – Injectivité : Il suffit de remarquer que par exemple $x_1 = 2$ et $x_2 = -1$, $g(2) = g(-2) = (4, -4)$ mais $x_1 \neq x_2$ donc g n'est pas injective.
   – Surjectivité : Il suffit de remarquer, par exemple pour $y = (1, 4) \in \mathbb{R}; y = g(x)$ donne $(1, 4) = (x^2, -x^2) \equiv x^2 = 1$ et $-x^2 = 4$ ce qui est impossible. Donc g n'est pas surjective.

3.
$$(f \circ g) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2, -x^2) = x^2 - x^2 = 0.$$
$$Alors, \forall x \in \mathbb{R}\, (f \circ g)(x) = 0.$$

4.
$$(f \circ g) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to (f \circ g)(x) = 0$$

$(f \circ g)$ n'est ni injective ni surjective.
On peut toujours donner des contres exemples $(f \circ g)(1) = (f \circ g)(13) = 0$ mais $1 \neq 13$, de même $y = 5 = (f \circ g)(x) = 0$ (impossible).

Exercice-3 (06 points)

Nous allons procéder par récurrence :

- $n = 2$,

$$M^2 = M.M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

Donc

$$M^2 = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^2+1}{2} & \frac{1-(-1)^2}{2} & \frac{1-(-1)^2}{2} \\ \frac{1-2^2}{2} & \frac{1+2^2}{2} & \frac{1-2^2}{2} \\ \frac{2^2-(-1)^2}{2} & \frac{(-1)^2-2^2}{2} & \frac{2^2+(-1)^2}{2} \end{pmatrix}$$
, la formule est vérifiée pour $n = 2$.

- On suppose que

$$M^n = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^n+1}{2} & \frac{1-(-1)^n}{2} & \frac{1-(-1)^n}{2} \\ \frac{1-2^n}{2} & \frac{1+2^n}{2} & \frac{1-2^n}{2} \\ \frac{2^n-(-1)^n}{2} & \frac{(-1)^n-2^n}{2} & \frac{2^n+(-1)^n}{2} \end{pmatrix},$$

et il faut démontrer que

$$M^{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^{n+1}+1}{2} & \frac{1-(-1)^{n+1}}{2} & \frac{1-(-1)^{n+1}}{2} \\ \frac{1-2^{n+1}}{2} & \frac{1+2^{n+1}}{2} & \frac{1-2^{n+1}}{2} \\ \frac{2^{n+1}-(-1)^{n+1}}{2} & \frac{(-1)^{n+1}-2^{n+1}}{2} & \frac{2^{n+1}+(-1)^{n+1}}{2} \end{pmatrix}.$$

Pour cela on éffectue le calcul $M^{n+1} = M^n.M$

$$M^{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^n+1}{2} & \frac{1-(-1)^n}{2} & \frac{1-(-1)^n}{2} \\ \frac{1-2^n}{2} & \frac{1+2^n}{2} & \frac{1-2^n}{2} \\ \frac{2^n-(-1)^n}{2} & \frac{(-1)^n-2^n}{2} & \frac{2^n+(-1)^n}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- Après le calcul, on trouve que pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a

$$M^{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^{n+1}+1}{2} & \frac{1-(-1)^{n+1}}{2} & \frac{1-(-1)^{n+1}}{2} \\ \frac{1-2^{n+1}}{2} & \frac{1+2^{n+1}}{2} & \frac{1-2^{n+1}}{2} \\ \frac{2^{n+1}-(-1)^{n+1}}{2} & \frac{(-1)^{n+1}-2^{n+1}}{2} & \frac{2^{n+1}+(-1)^{n+1}}{2} \end{pmatrix}.$$

13.5 Rattrapage 2013-2014

Université Abou-Bakr-Belkaid de Tlemcen **Niveau : GI/L1/S1**
Département de Génie Eléctrique et Eléctronique **2013-2014**

R a t t r a p a g e

Exercice-1 (5 points)
Soit l'application f définie comme suit :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow [3, +\infty[$$

$$x \longrightarrow f(x) = |x + 3| + 5$$

1. f est-elle injective ?
2. f est-elle surjective ?

Exercice-2 (5 points)

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n^3 + 5n)$ est divisible par 6.

Exercice-3 (10 points)
Soit A est une matrice carrée telle que

$$A^{2014} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} = [0]$$

(la matrice nulle).
Montrer que $(I - A)$ est inversible, où I est la matrice identité et donner l'expression de $(I - A)^{-1}$

Solution

Exercice-1 (5 points)

Soit l'application f définie comme suit :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow [3, +\infty[$$

$$x \longrightarrow f(x) = |x + 3| + 5$$

1. Injectivité : il suffit de remarquer par exemple que pour $x_1 = 0$ et $x_2 = -6$ on a $f(x_1) = f(0) = 8$ et $f(x_2) = f(-6) = 8$
$f(x_1) = f(x_2)$ mais $x_1 \neq x_2$, alors f n'est pas injective.
2. Surjectivité : il suffit de remarquer par exemple que $y = 4 \in [3, \infty[$, l'équation $y = f(x)$ donne $4 = |x+3|+5$, donc $|x+3| = -1$ ce qui est impossible, donc f n'est pas surjective.

Exercice-2 (5 points)

Il faut montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}; (n^2 + 5n) = 6k \qquad k \in \mathbb{N}$$

- Pour $n = 0$, $n^3 + 5n = 0 = 6.0$, vérifiée
- On suppose que $(n^3+5n) = 6k$, il faut montrer que $((n+1)^3+5(n+1)) = 6k'$
$((n + 1)^3 + 5(n + 1)) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5 = (n^3 + 5n) + 6 + 3n^2 + 3n = 6k + 6 + 3n(n + 1)$ (d'après l'hypothèse de récurrence).
Analysons le terme $3n(n + 1)$: soit n est pair et dans ce cas $3n(n + 1) = 3.2.l.(n + 1) = 6l'$ ou n est impair et dans ce que $3n(n + 1) = 3.n(2.l + 1 + 1) = 6l''$, dans les deux cas $3n(n + 1) = 6m$, alors
$((n + 1)^3 + 5(n + 1)) = 6k + 6 + 6m = 6k'$ ce qu'il fallait démontrer.

Exercice-3 (10 points)

On a $A^{2014} = [0]$. Il faut observer l'identité suivante :

$$(I^n - A^n) = (I - A)(I^{n-1} + I^{n-2}A + I^{n-3}A^2 + ... + A^{n-1})$$

Prenons $n = 2014$, et comme $I^k = I$ (matrice identité), on obtient alors

$$(I - A^{2014}) = (I - [0]) = I = (I - A)(I + A + A^2 + ... + A^{2013}).$$

Ainsi $(I - A)$ est inversible et $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + ... + A^{2013}$.

13.6 Examen Final 2014-2015

Université Abou-Bakr-Belkaid de Tlemcen **Niveau : GI/L1/S1**
Département de Génie Eléctrique et Eléctronique **2014-2015**

Examen Final

Exercice-1 (07 points)

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. La matrice A est-elle inversible ?
2. Calculer A^3
3. En déduire que $(I - A)$ est inversible et en déduire l'expression $(I - A)^{-1}$.
4. Retrouver $(I - A)^{-1}$ par la méthode classique (en utilisant la comatrice).

Exercice-2 (06 points)

1. Montrer que $\forall n, \in \mathbb{N}^* \ 2^{n-1} \leq n!$
2. Montrer que $\forall n, \in \mathbb{N} \ (4^n + 6n - 1)$ est un multiple de 9.

Exercice-3 (07 points)

Soit l'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définies par :

$$f(x) = 2x \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{si } x \text{ est pair} \\ \dfrac{x-1}{2} & \text{si } x \text{ est impair} \end{cases}$$

1. Les applications f et g sont-elles injectives ?surjectives ?
2. Les applications $(f \circ g)$ et $(g \circ f)$ sont-elles injectives ?surjectives ?

Solution

<u>Exercice-1</u> (07 points)

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. $\det(A) = 2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$. Donc A est n'est pas inversible

2.
$$A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Alors} \quad A^3 = A^2.A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Comme $A^3 = [0]$, alors $I = I - A^3$, d'un autre coté
$I = I - A^3 = (I - A)(I + A + A^2)$, ce qui permet de conclure que $(I - A)$ est inversible et $(I - A)^{-1} = I + A + A^2$.

$$(I-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.
$$I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det(I - A) = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 5 = 1 \neq 0$, alors $(I - A)$ est inversible.

$$\text{com}(I-A) = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \ (I-A)^{-1} = \frac{1}{det(I-A)} {}^t\text{com}(I-A),$$

alors

$$(I-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice-2 (06 points)

1. Démontrons pas récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2^{n-1} \leq n!$.
   - Pour $n = 1$, $2^0 = 1 \leq 1! = 1$ ce qui est vrai.
   - Supposons que $2^{n-1} \leq n!$ (Hypothèse de récurrence), et il faut montrer que : $2^n \leq (n+1)!$
     D'un coté $2^{n-1} \leq n!$ et d'un autre coté $\forall n \geq 1, 2 \leq n+1$.
     Donc $2^{n-1} \leq n! \Rightarrow 2.2^{n-1} \leq 2.n! \leq (n+1)n! \Rightarrow 2^n \leq (n+1)!$
   - En conclusion :$\forall n \in \mathbb{N}^*, 2^{n-1} \leq n!$
2. Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, (4^n + 6n - 1) = 9k, \forall k \in \mathbb{N}$.
   - Pour $n = 0$, $4^0 + 6.0 - 1 = 0 = 9.0$, ce qui est vrai pour $k = 0$.
   - Supposons que $(4^n + 6n - 1) = 9k$ (Hypothèse de récurrence), et il faut montrer que : $(4^{n+1} + 6(n+1) - 1) = 9k'$ pour un certain $k' \in \mathbb{N}$.
     Observons que $(4^{n+1}+6(n+1)-1) = 4.4^n+6n+6-1 = 4.4^n+6n-1+6$ or par l'hypothèse de récurrence $4^n + 6n - 1 = 9k \Rightarrow 6n - 1 = 9k - 4^n$. Ainsi $4^{n+1} + 6(n+1) - 1 = 4.4^n + 6 + 9k - 4^n = 3.4^n + 6 + 9k$. Or par l'hypothèse de récurrence $4^n + 6n - 1 = 9k \Rightarrow 4^n = 9k - 6n + 1$. Ainsi $4^{n+1} + 6(n+1) - 1 = 9k + 3.4^n + 6 = 9k + 3(9k - 6n + 1) + 6 = 9k + 27k - 18n + 9 = 9(4k - 2n + 1) = 9k'$
   - En conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, (4^n + 6n - 1)$ est un multiple de 9.

Exercice-3 (07 points)

1.

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$x \longrightarrow f(x) = 2x$$

– Injectivité : Soient

$$x_1, x_2 \in \mathbb{N}, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2,$$

alors f est injective.

– Surjectivité :clairement f n'est pas surjective car si y est impair il ne possède pas d'antécédent.
En effet, par exemple $y = 3, y = f(x) \Rightarrow 3 = 2x \Rightarrow x = \frac{3}{2} \notin \mathbb{N}$.

2.
$$g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$x \longrightarrow g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{si } x \text{ est pair} \\ \dfrac{x-1}{2} & \text{si } x \text{ est impair} \end{cases}$$

– Injectivité :Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$, x_1 pair et x_2 est impair,
$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow \frac{x_1}{2} = \frac{x_2-1}{2} \Rightarrow x_1 = x_2 - 1$, par exemple :
$(x_1 = 4$ pair$)$ et $(x_2 = 5$ impair$)$, $g(x_1) = \frac{4}{2} = 2, g(x_2) = \frac{5-1}{2} = 2$,
alors $g(x_1) = g(x_2)$ mais $x_1 \neq x_2$, donc g n'est pas injective.

– Surjectivité : Soit $y \in \mathbb{N}$,

$$y = g(x) \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x}{2} & \text{si } x \text{ est pair} \\ y = \dfrac{x-1}{2} & \text{si } x \text{ est impair} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y & \text{si } x \text{ est pair} \\ x = 2y+1 & \text{si } x \text{ est impair} \end{cases}$$

y possède deux antécédents $x_1 = 2y$ et $x_2 = 2y + 1$ alors g est surjective.

3. Il faut commencer par noter que $(f \circ g)$ et $(g \circ f)$ existent, en effet :

$$f \circ g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \text{ et } g \circ f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x) = 2\frac{x}{2} = x$ alors $(g \circ f)(x) = x$, (application identique). Donc $(g \circ f)$ est injective et surjective (donc bijective).
-
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ est pair} \\ x-1 & \text{si } x \text{ est impair} \end{cases}$$

En prenant les mêmes contre exemples que la première question, on obtient :
Soit $x_1 = 4, x_2 = 5$, $(f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(4) = 4, (f \circ g)(x_2) = (f \circ g)(5) = 4$.
alors $(f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2)$ mais $x_1 \neq x_2$ donc $(f \circ g)$ n'est pas

injective.
Il faut remarquer que $(f \circ g)$ est toujours un nombre pair, si $y = 3$, alors

$$3 = (f \circ g)(x) \Rightarrow \begin{cases} y = x & \text{si } x \text{ est pair} \\ y = x - 1 & \text{si } x \text{ est impair} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = x & \text{si } x \text{ est pair} \\ 4 = x & \text{si } x \text{ est impair} \end{cases}$$

ce qui est impossible, donc $(f \circ g)$ n'est pas surjective.

13.7 Examen Final 2015-2016

Université Abou-Bakr-Belkaid de Tlemcen **Niveau : GI/L1/S1**
Département de Génie Eléctrique et Eléctronique **2015-2016**

Examen Final

Exercice-1 **(08 points)**
Soit l'application f définie comme suit :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow f(x) = x^2 + 3x + \frac{9}{4}$$

1. f est-elle injective ?
2. f est-elle surjective ?

Et soit l'application g définie comme suit :

$$g :]-2, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$$

$$x \longrightarrow g(x) = x^2 + 3x + \frac{9}{4}$$

1. g est-elle injective ?
2. g est-elle surjective ?

Exercice-2 **(07 points)**
Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $\det(A)$

   Soient a, b, c, d des réels donnés, soit la matrice $B = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$

2. Calculer $\det(B)$.

3. Résoudre l'équation $\det(B) = 0$.

Exercice-3 (05 points)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel non nul donné, soient $x_0, x_1, ..., x_n, (n+1)$ nombres réels dans $[0, 1]$ tels que :

$$x_0 \leq x_1 \leq ... \leq x_n \leq 1.$$

Montrer par l'absurde que

$$\exists i \in \{1, 2, ..., n\} \text{ tel que } |x_i - x_{i-1}| \leq \frac{1}{n}.$$

Solution

Exercice-1 (08 points)

Soit l'application f définie comme suit :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow f(x) = x^2 + 3x + \frac{9}{4}$$

1. Injectivité :
   Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$,

   $$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 + 3x_1 + \frac{9}{4} = x_2^2 + 3x_2 + \frac{9}{4}$$

   $$\Rightarrow x_1^2 - x_2^2 + 3(x_1 - x_2) = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + 3(x_1 - x_2) = 0$$

   $$\Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 3) = 0 \Longrightarrow x_1 = x_2 \text{ où } x_1 = -x_2 - 3$$

   Soit par exemple :
   $x_1 = -3$ et $x_2 = 0$ alors $f(x_1) = f(-3) = \frac{9}{4}, f(x_2) = f(0) = \frac{9}{4}$
   Ainsi $f(x_1) = f(x_2)$ mais $x_1 \neq x_2$ alors f n'est pas injective.
2. Surjectivité :
   Soit $y \in \mathbb{R}$, $y = f(x) \Rightarrow y = x^2 + 3x + \frac{9}{4} \Rightarrow x^2 + 3x + \frac{9}{4} - y = 0$.

   $$\Delta = 4y \text{ ainsi } \Delta \geq 0 \text{ SSI } y \geq 0.$$

   Donc si $y < 0$ l'équation $y = f(x)$ ne possède pas de solution.
   Soit par exemple

   $$y = -\frac{3}{4} < 0, y = f(x) \Rightarrow x^2 + 3x + \frac{9}{4} = -\frac{3}{4} \Rightarrow x^2 + 3x + 3 = 0$$

   Comme $\Delta = -3 < 0$, alors l'équation $y = f(x)$ n'a pas de solution $x \in \mathbb{R}$.
   Donc f n'est pas surjective.
   Remarque : l'exercice est déja facile ; mais en remarquant que :

   $$y = x^2 + 3x + \frac{9}{4} = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2$$

   l'exercice devient encore plus facile.

Et soit l'application g définie comme suit :

$$g :]-2, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$$

$$x \longrightarrow g(x) = x^2 + 3x + \frac{9}{4}$$

1. Injectivité :
   Soient $x_1, x_2 \in]-2, +\infty[$,

   $$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 3) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ où } x_1 = -x_2 - 3$$

   Soit par exemple :
   $x_1 = -\frac{7}{5} \in]-2, +\infty[$ et $x_2 = -\frac{8}{5} \in]-2, +\infty[$ alors $g(x_1) = g(-\frac{7}{5}) = \frac{1}{100}$, $g(x_2) = g(-\frac{5}{5}) = \frac{1}{100}$.
   Ainsi $g(x_1) = g(x_2)$ mais $x_1 \neq x_2$ alors g n'est pas injective.
   Remarque : Il est éssentiel de choisir $x_1, x_2 \in]-2, +\infty[$, donc $x_1 > -2$ et $x_2 > -2$.
   Pour que g soit injective, il aurait fallu prendre pour l'ensemble de départ $]-\frac{3}{2}, +\infty[$

2. Surjectivité :
   Soit $y \in \mathbb{R}$, $y = g(x) \Rightarrow y = x^2 + 3x + \frac{9}{4} \Rightarrow x^2 + 3x + \frac{9}{4} - y = 0$. $\Delta = 4y \geq 0$, (c'est le même calcul que celui de f, mais ici $y \in [0, +\infty[$).
   $x_1 = \dfrac{-3 - \sqrt{4y}}{2}, x_2 = \dfrac{-3}{2} + \sqrt{y}$
   Reste à vérifier qu'au moins une des deux solutions est dans l'ensemble de départ $]-2, +\infty[$, en effet $x_2 = \dfrac{-3}{2} + \sqrt{y} \geq \dfrac{-3}{2} > -2$,
   ainsi que $x_2 \in]-2, +\infty[$, donc g est surjective.

<u>Exercice-2</u> (07 points)

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. $\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$
   $= -3 - 3 - 0 - 0 = -6 \neq 0$, alors A est inversible.

2.

$$B = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$$

$$\det(B) = a \begin{vmatrix} b & b & b \\ b & c & c \\ b & c & d \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} a & b & b \\ a & c & c \\ a & c & d \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} a & b & b \\ a & b & c \\ a & b & d \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} a & b & b \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix}.$$

Remarquons que $\begin{vmatrix} a & b & b \\ a & b & c \\ a & b & d \end{vmatrix} = 0$, car les deux premières colonnes sont liées alors le déterminant vaut 0 .
Alors

$$\det(B) = a[b(cd - c^2) - b(bd - bc) - (a(cd - c^2) - b(ad - ac)]$$

$$= a[bc(d - c) - b^2(d - c) - ac(d - c) + ab(d - c)]$$

$$= a(d - c)[bc - b^2 - ac + ab]$$

$$= a(d - c)[b(c - d) - a(c - d)] = a(d - c)(c - d)(b - a)$$

Par suite

$$\det(B) = a(d - c)(c - d)(b - a)$$

3.

$$(\det(B) = 0) \Rightarrow (a = 0 \text{ ou } d = c \text{ ou } c = b \text{ ou } a = b)$$

<u>Exercice-3</u> (05 points)

$n \in \mathbb{N}^*, x_0 \leq x_1 \leq ... \leq x_n \leq 1$. Montrons par l'absurde que

$$\exists i \in \{1, 2, ..., n\} \text{ tel que } |x_i - x_{i-1}| \leq \frac{1}{n}.$$

Supposons par l'absurde que

$$\forall i \in \{1, 2, ..., n\} \text{ tel que } |x_i - x_{i-1}| > \frac{1}{n}.$$

Observons que $x_{i-1} \leq x_i \Longrightarrow |x_i - x_{i-1}| = x_i - x_{i-1}$. Alors, on a

$$\begin{gathered} x_1 - x_0 > \tfrac{1}{n} \\ x_2 - x_1 > \tfrac{1}{n} \\ x_3 - x_2 > \tfrac{1}{n} \\ \vdots \\ x_{n-1} - x_{n-2} > \tfrac{1}{n} \\ x_n - x_{n-1} > \tfrac{1}{n} \end{gathered}$$

En additionnant toutes ces inégalités on obtient

$$(x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + ... + (x_3 - x_2) + (x_2 - x_1) + (x_1 - x_0) > \frac{1}{n} + ... + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$$

$$\Leftrightarrow x_n - x_0 > n\frac{1}{n} = 1$$

donc $x_n - x_0 > 1$ ce qui est impossible car $x_0 \leq x_1 \leq ... \leq x_n \leq 1$. Et par suite,

$$\exists i \in \{1, 2, ..., n\} \text{ tel que } |x_i - x_{i-1}| \leq \frac{1}{n}.$$

13.8 Rattrapage 2015-2016

Université Abou-Bakr-Belkaid de Tlemcen **Niveau : GI/L1/S1**
Département de Génie Eléctrique et Eléctronique **2015-2016**

R a t t r a p a g e

Exercice-1 (08 points)
Soit l'application f définie comme suit :

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$n \longrightarrow f(n) = n + (-1)^n$$

1. f est-elle injective ?
2. f est-elle surjective ?
3. Calculer $(f \circ f)(n)$.

Exercice-2 (07 points)
Soient a, b deux réels donnés. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & b \\ a^2 & 1 & b^2 \end{pmatrix}$$

Pour quelles valeurs de a et b la matrice A est-elle inversible ?

Exercice-3 (05 points)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel non nul donné, soient $x_0, x_1, ..., x_n$, $(n+1)$ nombres réels dans $[0, 1]$ tels que :

$$x_0 \leq x_1 \leq ... \leq x_n \leq 1.$$

Montrer par l'absurde que

$$\exists i \in \{1, 2, ..., n\} \text{ tel que } |x_i - x_{i-1}| \leq \frac{1}{n}.$$

Solution

Exercice-1(08 points)

Soit l'application f définie comme suit :

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$n \longrightarrow f(n) = \begin{cases} n-1 & \text{si } n \text{ impair} \\ n+1 & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

1. Soient $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$,
   - 1^{er} cas : n_1, n_2 pairs ;
   $$f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow n_1 + 1 = n_2 + 1 \Rightarrow n_1 = n_2.$$
   - 2^{eme} cas : n_1, n_2 impairs ;
   $$f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow n_1 - 1 = n_2 - 1 \Rightarrow n_1 = n_2.$$
   - 3^{eme} cas : n_1 pair, n_2 impair ;
   $$f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow n_1 + 1 = n_2 - 1 \Rightarrow n_2 = n_1 + 2 \quad \text{(impossible) car}$$
   $$n_1 \text{ pair} \Rightarrow (n_1 + 2) \text{ pair} \quad \text{or on a } n_2 \text{ impair.}$$
   - 4^{eme} cas : n_1 impair, n_2 pair ;
   $$f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow n_1 - 1 = n_2 + 1 \Rightarrow n_1 = n_2 + 2 \quad \text{(impossible) car}$$
   $$n_2 \text{ pair } \Rightarrow (n_2 + 2) \text{ pair} \quad \text{or on a } n_1 \text{ impair.}$$

   En conclusion $f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow n_1 - 1 = n_2 - 1 \Rightarrow n_1 = n_2$, donc f est injective.
2. Soit $y \in \mathbb{N}$,
   - Si y est pair alors il existe $n \in \mathbb{N}$ impair tel que $y = n - 1 = f(n)$, donc $n = y + 1$.
   - Si y est impair alors il existe $n \in \mathbb{N}$ pair tel que $y = n + 1 = f(n)$, donc $n = y - 1$. Alors
   $$\forall y \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, y = f(n).$$

   En conclusion f est surjective.

3. $(f \circ f)(n)$.

   On commmence par observer que $f \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $(f \circ f)$ est bien définie.

   $$(f \circ f)(n) = \begin{cases} f(n) - 1 & \text{si } f(n) \text{ impair} \\ f(n) + 1 & \text{si } f(n) \text{ pair} \end{cases} \Rightarrow f(n) = \begin{cases} n + 1 - 1 = n & \text{si } n \text{ impair} \\ n - 1 + 1 = n & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

   Ainsi $(f \circ f)(n) = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

   Remarque : $(f \circ f) = I_{\mathbb{N}}$ donc f est bijective (ce qu'on savait dejà) et $f^{-1} = f$

<u>Exercice-2</u> (07 points)

$a, b \in \mathbb{R}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & b \\ a^2 & 1 & b^2 \end{pmatrix}$$

Pour que A soit inversible.

$$det(A) = (b^2 - b) - (ab^2 - a^2 b) + (a - a^2) = b(b-1) - ab(b-a) + a(1-a)$$

$$= b[(b-1) - a(b-a)] + a(1-a) = b[b - 1 - ab + a^2] + a(1-a)$$

$$= b[b(1-a) + (a^2 - 1)] + a(1-a) = (1-a)[b(b - (a+1)) + a]$$

$$= (1-a)[b^2 - b(a+1) + a] = (1-a)[b^2 - ba - b + a]$$

$$= (1-a)[b(b-1) - a(b-1)] = (1-a)(b-1)(b-a)$$

A est inversible $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 1$ et $b \neq 1$ et $a \neq b$.

<u>Exercice-3</u> (05 points)

$n \in \mathbb{N}^*, x_0 \leq x_1 \leq ... \leq x_n \leq 1$. Montrons par l'absurde que

$$\exists i \in \{1, 2, ..., n\} \text{ tel que } |x_i - x_{i-1}| \leq \frac{1}{n}.$$

Supposons par l'absurde que

$$\forall i \in \{1, 2, ..., n\} \text{ tel que } |x_i - x_{i-1}| > \frac{1}{n}.$$

Observons que $x_{i-1} \leq x_i \Longrightarrow |x_i - x_{i-1}| = x_i - x_{i-1}$. Alors, on a

$$\begin{gathered} x_1 - x_0 > \tfrac{1}{n} \\ x_2 - x_1 > \tfrac{1}{n} \\ x_3 - x_2 > \tfrac{1}{n} \\ \vdots \\ x_{n-1} - x_{n-2} > \tfrac{1}{n} \\ x_n - x_{n-1} > \tfrac{1}{n} \end{gathered}$$

En additionnant toutes ces inégalités on obtient

$$(x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + ... + (x_3 - x_2) + (x_2 - x_1) + (x_1 - x_0) > \frac{1}{n} + ... + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$$

$$\Leftrightarrow x_n - x_0 > n\frac{1}{n} = 1$$

donc $x_n - x_0 > 1$ ce qui est impossible car $x_0 \leq x_1 \leq ... \leq x_n \leq 1$. Et par suite,

$$\exists i \in \{1, 2, ..., n\} \text{ tel que } |x_i - x_{i-1}| \leq \frac{1}{n}.$$

Chapitre 14

Examens d’Analyse

Sommaire

14.1 Examen Final 2012-2013

Université Abou-Bakr-Belkaid de Tlemcen **Niveau : GI/L1/S1**
Département de Génie Eléctrique et Eléctronique **2012-2013**

E x a m e n F i n a l

Exercice-1 (5 points)

Soit a un réel tel que $0 < a < 1$. On considère la suite (U_n) définie par $U_1 = a$, et pour tout $n > 0$,

$$U_{n+1} = \frac{n + U_n}{n+1}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < U_n < 1$.
2. Montrer que la suite (U_n) est croissante.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$U_{n+1} - 1 = \frac{U_n - 1}{n+1}.$$

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$U_n = 1 + \frac{a-1}{n!}$$

5. Déduire la limite de (U_n).

Exercice-2 (3 points)
Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}-3}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x\sin(x)}{1-\cos(x)}, \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\cos(x)}{x}.$$

Exercice-3 (4 points)

Pour quelle(s) valeur(s) du réel a la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(ax)}{x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{\ln(1+2x)}{x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

est-elle prolongeable par continuité en 0 ? On précisera alors ce prolongement.

Exercice-4 (4 points)

Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \arcsin(x) + \arcsin(\frac{x}{2}) - \frac{\pi}{2}$. L'équation $f(x) = 0$ admet-elle une solution dans $[0,1]$?

Exercice-5 (4 points)

Calculer les dérivées (et les simplifier si c'est possible) des fonctions

$$\begin{aligned} x &\mapsto f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x > 1, \\ x &\mapsto f(x) = \arctan(\sqrt{x}), \quad x > 0. \end{aligned}$$

Bonne chance.

Solution

Exercice-1 (5 points)

Soit a un réel tel que $0 < a < 1$. On considère la suite (U_n) définie

$$\forall n > 0,\ U_1 = a,\ U_{n+1} = \frac{n + U_n}{n+1}.$$

1. **Montrons par récurrence que :** $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < U_n < 1.$
   - Vérification :Pour $n = 1$, on a $0 < U_1 = a < 1$, donc la propriété est vraie au rang 1.
   - Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < U_n < 1$, et on démontre que

     $$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < U_{n+1} < 1,$$

     alors $0 < U_n < 1 \Rightarrow n < U_n + n < n + 1$, multiplions cette inégalité par $\frac{1}{n+1}$, on trouve

     $$0 < \frac{n}{n+1} < U_{n+1} = \frac{U_n + n}{n+1} < \frac{n+1}{n+1} = 1.$$

     Ainsi, si la propriété est vraie au rang n alors elle est vraie au rang $n + 1$. alors

     $$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < U_n < 1.$$

2. $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_{n+1} - U_n = \frac{n + U_n}{n+1} - U_n = \frac{n}{n+1}(1 - U_n) > 0,$$

car d'après la question (1) ($\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n < 1$), et par suite (U_n) est croissante, on en déduit que (U_n) est convergente (suite croissante et majorée)

3. **Montrons par récurrence que** $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_{n+1} - 1 = \dfrac{U_n - 1}{n+1}.$
   - Vérification :Pour $n = 1$, on a $U_2 - 1 = \dfrac{U_1 - 1}{2} = \dfrac{a-1}{2}$, d'autre part $U_2 = \dfrac{U_1 + 1}{2} = \dfrac{a+1}{2} \Rightarrow U_2 - 1 = \dfrac{a-1}{2}$ donc la propriété est vraie au rang 1.
   - Supposons que $U_{n+1} - 1 = \dfrac{U_n - 1}{n+1}$, et on démontre que

     $$\forall n \in \mathbb{N}^*, U_{n+2} - 1 = \frac{U_{n+1} - 1}{n+2},$$

alors on calcule $U_{n+2}-1$, par définition de U_n, soit $n\in\mathbb{N}^*$

$$U_{n+2}=\frac{U_{n+1}+n+1}{n+2}=\frac{U_{n+1}-1+n+2}{n+2}$$

$$=\frac{U_{n+1}-1}{n+2}+1\Rightarrow U_{n+2}-1=\frac{U_{n+1}-1}{n+2}$$

ce qu'il fallait démontrer

Ainsi, si la propriété est vraie au rang n alors elle est vraie au rang $n+1$.

alors

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, U_{n+1}-1=\frac{U_n-1}{n+1}.$$

4. **Montrons par récurrence que $n\in\mathbb{N}^*, U_n=1+\frac{a-1}{n!}$**

– Vérification :Pour $n=1$, on a $U_1=1+\dfrac{a-1}{1!}=1+\dfrac{a-1}{1}=a$, donc la propriété est vraie au rang 1.

– Supposons que $n\in\mathbb{N}^*, U_n=1+\dfrac{a-1}{n!}$, et on démontre que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, U_{n+1}=1+\frac{a-1}{(n+1)!},$$

soit $n\in\mathbb{N}^*$,

$$U_{n+1}=\frac{U_n+n}{n+1}=\frac{U_n-1+n+1}{n+1}=\frac{U_n-1}{n+1}+1$$

$$=1+\frac{1+\frac{a-1}{n!}-1}{n+1}=1+\frac{a-1}{n!(n+1)}=1+\frac{a-1}{(n+1)!}$$

ce qu'il fallait démontrer

Ainsi, si la propriété est vraie au rang n alors elle est vraie au rang $n+1$.

alors

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, U_n=1+\frac{a-1}{n!}.$$

5. On en déduit que $\lim\limits_{n\to\infty}U_n=\lim\limits_{n\to\infty}1+\dfrac{a-1}{n!}=1+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a-1}{n!}=1.$

Exercice-2 (3 points)

Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}-3}=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}{(\sqrt{x}+2)(x-4)}=\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x+5}+3}{\sqrt{x}+2}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2},$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x\sin(x)}{1-\cos(x)}=\lim_{x\to0}\frac{x\sin(x)}{2\sin^2(\frac{x}{2})}=\lim_{x\to0}2\frac{\sin(x)}{x}\frac{\frac{x^2}{4}}{\sin^2(\frac{x}{2})}=\lim_{x\to0}2\frac{\sin(x)}{x}\frac{1}{(\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}})^2}=2,$$

(car $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$).

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(x)}{x} = 0.$$

produit d'une fonction bornée $x \mapsto \cos(x)$ par une fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

<u>Exercice-3</u> (4 points)

Pour quelle(s) valeur(s) du réel a la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(ax)}{x} & \text{si } \ x < 0 \\ \dfrac{\ln(1+2x)}{x} & \text{si } \ x > 0. \end{cases}$$

est-elle prolongeable par continuité en 0 ? On précisera alors ce prolongement.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+2x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} 2\frac{\ln(1+2x)}{2x} = 2$$

car $\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(ax)}{x} = \lim_{x\to 0^-} a\frac{\sin(ax)}{ax} = a.$$

Si $a = 2$, la fonction f admet une limite finie en 0 et par suite elle est prolongeable par continuité en 0 et ce prolongement a pour expression

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(2x)}{x} & \text{si } \ x < 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\ln(1+2x)}{x} & \text{si } \ x > 0. \end{cases}$$

<u>Exercice-4</u> (4 points)

Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \arcsin(x) + \arcsin(\frac{x}{2}) - \frac{\pi}{2}$. L'équation $f(x) = 0$ admet-elle une solution dans $[0,1]$?

f est définie et continue sur $[-1,1]$, en particulier elle est continue sur $[0,1]$, de plus on a

$$f(0) = \arcsin(0) + \arcsin(0) - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} < 0$$
$$f(1) = \arcsin(1) + \arcsin(\frac{1}{2}) - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} > 0$$

i.e. $f(0).f(1) < 0$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires (T.V.I) il existe au moins un réel $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = 0$.

Exercice-5 (4 points)

Calculer les dérivées (et les simplifier si c'est possible) des fonctions

$$\begin{aligned} x &\mapsto f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1}), \quad x > 1, \\ x &\mapsto f(x) = \arctan(\sqrt{x}), \quad x > 0. \end{aligned}$$

•$x \mapsto f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$ est dérivable pour $x > 1$
(composée de fonctions dérivables : $x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $x \mapsto x + \sqrt{x^2-1}$ est dérivable pour $x > 1$) et

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}(x+\sqrt{x^2-1})' \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}.\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \end{aligned}$$

•$x \mapsto f(x) = \arctan(\sqrt{x})$ est dérivable pour $x > 0$ (composée de fonctions dérivables : $x \mapsto \arctan(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable pour $x > 0$), sachant que $(\arctan(y))' = \dfrac{1}{1+y^2}$, $\forall y \in \mathbb{R}$ on obtient

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}.(\sqrt{x})' \\ &= \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}.\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}. \end{aligned}$$

14.2 Rattrapage 2012-2013

Université Abou-Bakr-Belkaid de Tlemcen **Niveau : GI/L1/S1**
Département de Génie Eléctrique et Eléctronique **2012-2013**

Rattrapage

Exercice-1 (7 points)
On considère la suite (U_n) définie par

$$\begin{cases} U_0 = 2, \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n^2+3}{2U_n} \end{cases}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n > \sqrt{3}$.
2. Montrer que la suite $(U_n)_n$ est décroissante.
3. En déduire que $(U_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice-2 (5 points)
Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \arctan(x) + \arcsin(\frac{x}{2}) - \frac{\pi}{4}$. L'équation $f(x) = 0$ admet-elle une solution dans $[0,1]$?

Exercice-3 (8 points)
I. Etudier la dérivabilité de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

II. Calculer les dérivées (et les simplifier si c'est possible) des fonctions

$$\begin{aligned} x &\mapsto f(x) = \ln\left(\frac{2+\cos(x)}{2-\cos(x)}\right), \\ x &\mapsto f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right). \end{aligned}$$

Solution

Exercice-1 (7 points)

On considère la suite $(U_n)_n$ définie par

$$\begin{cases} U_0 = 2, \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n^2+3}{2U_n} & , \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Démonstration par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > \sqrt{3}.$ (P_n)
   - Vérification : $n = 0$, $U_0 = 2 > \sqrt{3}$, Vraie
   - On suppose que (P_n) est vraie, alors $U_n > \sqrt{3}$

     On calcule $U_{n+1} - \sqrt{3} = \dfrac{U_n^2 + 3 - 2\sqrt{3}U_n}{2U_n} = \dfrac{(U_n - \sqrt{3})^2}{2U_n} > 0$,

     alors $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} > \sqrt{3}$.

     On en déduit que :$\forall n \in \mathbb{N}, U_n > \sqrt{3}$.
2. $U_{n+1}-U_n = \dfrac{U_n^2+3}{2U_n} - U_n = \dfrac{U_n^2+3-2U_n^2}{2U_n} = \dfrac{-U_n^2+3}{2U_n} = \dfrac{(\sqrt{3}+U_n)(\sqrt{3}-U_n)}{2U_n}$,
   on étudie le signe de $-U_n^2+3$:
   Comme $U_n > \sqrt{3}$, on en déduit que $U_{n+1} - U_n < 0$, et par suite (U_n) est décroissante.
3. - Puisque (U_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{3}$ alors (U_n) est convergente.
   - $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \lim\limits_{n\to\infty} U_{n+1} = l$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{U_n^2+3}{2U_n} = \frac{l^2+3}{2l} = l \Rightarrow 2l^2 = l^2 + 3 \Rightarrow l^2 = 3 \Rightarrow l = \sqrt{3}$ ou $l = -\sqrt{3}$(réfusé car $U_n > \sqrt{3}$), alors $l = \sqrt{3}$.

Exercice-2 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \arctan(x) + \arcsin(\frac{x}{2}) - \frac{\pi}{4}$.
f est continue sur $[0,1]$ c'est la somme de deux fonctions continues et $f(0) = \arctan(0) + \arcsin(0) - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} < 0, f(1) = \arctan(1) + \arcsin(\frac{1}{2}) - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} > 0$, alors puisque $f(0)f(1) < 0$ alors d'après le théoreme des valeurs intermédiaires, il existe au moins $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = 0$.

Exercice-3 (8 points)

I. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Etude de la dérivabilité : il est clair que f est continue sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$

- Etude de la dérivabilité en 0 : $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
  $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1.$
  Alors f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.
- Etude de la dérivabilité en 1 : $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{x-1} = 1$
  $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{-x+1}{x(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{-1}{x} = -1$
  Puisque $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x} \neq \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x}$, alors f n'est pas dérivable en 1.

II. Calcul des dérivées

- $f(x) = \ln\left(\dfrac{2+\cos(x)}{2-\cos(x)}\right)$, $f'(x) = \dfrac{-4\sin(x)}{(2-\cos(x))^2}\dfrac{2-\cos(x)}{2+\cos(x)} = \dfrac{-4\sin(x)}{4-\cos(x)^2}$
- $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$ une fonction composée de genre : $(h\circ g)$ où $(h\circ g)' = h'(g)g'$, on pose $h(x) = \arcsin(x)$, $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, et par suite
  $h'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}(x^2+1)}$ alors
  $f'(x) = \sqrt{x^2+1}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}(x^2+1)} = \dfrac{1}{x^2+1}$, et par suite

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1}.$$

14.3 Examen Final 2013-2014

Université Abou-Bakr-Belkaid de Tlemcen **Niveau : GI/L1/S1**
Département de Génie Eléctrique et Eléctronique **2013-2014**

Examen Final

Exercice-1 (10 points)

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites définies par $u_0 = 2$, $v_0 = 1$ pour tout $n \geq 0$

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \qquad v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2}.$$

1. Montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont strictement positives et majorées par 2.
2. Établir une relation simple entre $u_{n+1} - v_{n+1}$ et $u_n - v_n$ et en déduire l'expression de $u_n - v_n$ en fonction de n.
3. Montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ ont une limite commune qu'on notera l.
4. Etudier la suite $(u_n + 2v_n)_n$ et en déduire la valeur de l.

Exercice-2 (06 points)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue en zéro et qui vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(2x)$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, tout $n \in \mathbb{N}$
$$f(x) = f(\frac{x}{2^n}).$$
2. Soit $x \in \mathbb{R}^*$, posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{x}{2^n}$. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} f(u_n)$.
3. En déduire que f est une fonction constante et déterminer cette constante.

Exercice-3 (03 points)

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} (\frac{n+1}{n-3})^n, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^x}{x^{x+1}}.$$

N.B : Un point est consacré à la qualité de la rédaction.

Solution

<u>Exercice-1</u> (10 points)

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites définies par $u_0 = 2$, $v_0 = 1$ pour tout $n \geq 0$;

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \qquad v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2}.$$

1. Démonstration par récurrence : $(P_n) \begin{cases} 0 < u_n \leq 2 & \forall n \in \mathbb{N}, \\ \text{et} & \\ 0 < v_n \leq 2 & \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

   - Vérification : $n = 0$, $0 < u_0 = 2 \leq 2$, $0 < v_0 = 1 \leq 2$.
   - On suppose que (P_n) est vraie, alors $0 < u_n \leq 2$ et $0 < v_n \leq 2$ alors $0 < u_n + v_n \leq 4 \Rightarrow 0 < \frac{u_n+v_n}{2} \leq \frac{4}{2} \Rightarrow 0 < u_{n+1} \leq 2$.
     D'autre part, $0 < v_n \leq 2$ et $0 < u_{n+1} \leq 2$ alors $0 < u_{n+1} + v_n \leq 4 \Rightarrow 0 < \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \leq \dfrac{4}{2} \Rightarrow 0 < v_{n+1} \leq 2$.
     On en déduit que $(P_n) \begin{cases} 0 < u_n \leq 2 & \forall n \in \mathbb{N}, \\ \text{et} & \\ 0 < v_n \leq 2 & \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

2. – $u_{n+1} - v_{n+1} = u_{n+1} - \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} = \dfrac{u_n - v_n}{4}$.
   D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{u_n - v_n}{4}$.
   Par suite : $\forall n \geq 1, u_n - v_n = \dfrac{u_{n-1} - v_{n-1}}{4} = \dfrac{u_{n-2} - v_{n-2}}{4^2}$
   $$= \ldots = \frac{u_0 - v_0}{4^n} = \frac{1}{2^{2n}}.$$
   Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, u_n - v_n = \dfrac{1}{2^{2n}}$.

3. On a pour $n \geq 0$,
   $$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{1}{2}(v_n - u_n)$$
   $$= \frac{-1}{2}(u_n - v_n) = \frac{-1}{2}\frac{1}{2^{2n}} = -\frac{1}{2^{2n+1}} < 0.$$
   Donc $(u_n)_n$ est strictement décroissante mais $u_n > 0$ donc minorée, elle est donc convergente. Posons $l = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$
   On a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n - v_n = \dfrac{1}{2^{2n}}$. Alors $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(u_n - \dfrac{1}{2^{2n}}\right) = l$
   Ainsi $l = \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

4. – la nature de suite $(u_n + 2v_n)_n$
   On a $n \geq 0, u_{n+1} + 2v_{n+1} = u_{n+1} + (u_{n+1} + v_n) = 2u_{n+1} + v_n = (u_n + v_n) + v_n = u_n + 2v_n$.
   D'où
   $$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} + 2v_{n+1} = u_n + 2v_n.$$
   La suite $(u_n + 2v_n)_n$ est donc constante.
   – On a
   $$\forall n \in \mathbb{N}, u_n + 2v_n = u_0 + 2v_0 = 4.$$
   $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = l$, d'où $\lim\limits_{n\to\infty} u_n + 2v_n = 3l = 4 \Rightarrow l = \dfrac{4}{3}$.

<u>Exercice-2</u> (06 points)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue en zéro et qui vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(2x)$$

1. Nous allons démontrer par récurrence que
   $$f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$$
   On sait, par hypothèse que
   $$f(x) = f(2x)$$
   pour tout x dans $\mathbb{R}$, donc cette égalité reste vraie si l'on remplace x par $\frac{x}{2}$ on obtient alors
   $$f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(2\frac{x}{2}\right)$$
   ce qui donne que
   $$f\left(\frac{x}{2}\right) = f(x)$$
   ainsi notre propriété est démontrée pour $n = 1$.
   On pose l'hypothèse de récurrence
   $$f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$$
   et il faut montrer que
   $$f(x) = f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$$
   en effet, comme
   $$f\left(\frac{x}{2}\right) = f(x)$$

on remplace x par $\dfrac{x}{2^n}$ et on obtient

$$f\left(\frac{1}{2}\frac{x}{2^n}\right) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

soit

$$f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

or par l'hypothèse de récurrence

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

donc

$$f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = f(x)$$

en conclusion $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

2. Pour $x \in \mathbb{R}^*$ (fixé) et pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $u_n = \frac{x}{2^n}$, d'un côté

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

d'un autre côté, par la continuité de f on a

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right)$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(0).$$

3. Récapitulons ce que l'on a déjà montré :

$\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right),$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(0).$$

En combinant ces deux résultats

$$\lim_{n\to+\infty} f(x) = \lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(0)$$

or

$$\lim_{n\to+\infty} f(x) = f(x)$$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = f(0)$$

f est bien une fonction constante identiquement égale à $f(0)$.

Exercice-3 (03 points)

Les résultats des limites :

1. $\lim_{n\to+\infty}(\frac{n+1}{n-3})^n = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^n(1+\frac{1}{n})^n}{n^n(1-\frac{3}{n})^n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1-\frac{3}{n})^n} = \frac{\mathrm{e}^1}{\mathrm{e}^{-3}} = \mathrm{e}^4.$
2. $\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^x}{x^{x+1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^x(1+\frac{1}{x})^x}{x^{x+1}}$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{(1+\frac{1}{x})^x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^1}{x} = 0.$$

14.4 Rattrapage 2013-2014

Université Abou-Bakr-Belkaid de Tlemcen **Niveau : GI/L1/S1**
Département de Génie Eléctrique et Eléctronique **2013-2014**

Rattrapage

Exercice-1 (07 points)

Soit la suite $(u_n)_n$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2}, \\ u_{n+1} = u_n^2 + \frac{2}{9} \quad , \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{3} < u_n < \frac{2}{3}$.
2. Etudier la monotonie de $(u_n)_n$.
3. En déduire que $(u_n)_n$ est une suite convergente, et donner sa limite.

Exercice-2 (08 points)

Soient $u_0 = 1, v_0 = 2$. On définit les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ par

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

1. Montrer que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que $(v_n)_n$ est une suite décroissante.
3. Montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont convergentes et qu'elles ont la même limite.

Exercice-3 (05 points)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique et non constante. Montrer qu'elle n'admet pas de limite en $+\infty$.

Solution

Exercice-1 (07 points)

Soit la suite $(u_n)_n$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2}, \\ u_{n+1} = u_n^2 + \frac{2}{9} \quad, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. On démontre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{3} < u_n < \frac{2}{3}$.
   Pour $n = 0$, $\frac{1}{3} < u_0 = \frac{1}{2} < \frac{2}{3}$. (vrai) On suppose que $\frac{1}{3} < u_n < \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{9} < u_n^2 < \frac{4}{9}$. (et cela est possible car $0 < \frac{1}{3} < u_n < \frac{2}{3}$).
   $\frac{1}{9} < u_n^2 < \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{1}{9} + \frac{2}{9} < u_n^2 + \frac{2}{9} < \frac{4}{9} + \frac{2}{9} \Rightarrow \frac{1}{3} < u_{n+1} < \frac{2}{3}$.
   On en déduit $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{3} < u_n < \frac{2}{3}$.
2. La monotonie de $(u_n)_n$.
   $u_{n+1} - u_n = u_n^2 + \frac{2}{9} - u_n = u_n^2 - u_n + \frac{2}{9}$, considérons l'équation $x^2 - x + \frac{2}{9} = 0$, $\Delta = (\frac{1}{3})^2$, $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{2}{3}$, or d'après la question précédente : on a que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{3} < u_n < \frac{2}{3}$, donc $u_{n+1} - u_n < 0$.
   $(u_n)_n$ est (strictement) décroissante (il est possible de le démontrer par récurrence).
3. Comme $(u_n)_n$ est une suite décroissante et minorée(par $\frac{1}{3}$), alors $(u_n)_n$ est convergente. Soit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ alors l vérifier par le fait que $u_{n+1} = u_n^2 + \frac{2}{9}$

   $$l = l^2 + \frac{2}{9} \Rightarrow l = \frac{1}{3} \text{ ou } l = \frac{2}{3} \text{ la limite est unique.}$$

   Reprenons depuis le début que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{3} < u_n < \frac{2}{3}$, et aussi $(u_n)_n$ est décroissante avec $u_0 = \frac{1}{2}$.
   Donc la limite ne peut pas etre $\frac{2}{3}$, et par suite $l = \frac{2}{3}$ (réfusée).
   Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{3}$.

Exercice-2 (08 points)

Soient $u_0 = 1, v_0 = 2$. On définit les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ par

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

1. On démontre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$.
   Pour $n = 0,\ u_0 = 1 \leq v_0 = 2$. On suppose que $u_n \leq v_n$: on rappelle que $a, b > 0$ alors $(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow (a-b)^2 + 4ab \geq 4ab \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab$ alors $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ donc $\sqrt{u_n v_n} \leq \frac{u_n + v_n}{2} \Rightarrow u_{n+1} \leq v_{n+1}$.
   On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.
2. On a $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \leq \frac{v_n + v_n}{2} = v_n$ (car $u_n \leq v_n$).
   Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} \leq v_n$ alors $(v_n)_n$ est décroissante.
3. • Remarquons que $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \geq \sqrt{u_n u_n} = u_n$ (car $u_n \leq v_n$).
   Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$ alors $(u_n)_n$ est croissante.
   Posons $w_n = v_n - u_n$, $w_n \geq 0$, et w_n est décroissante car $w_{n+1} - w_n = v_{n+1} - v_n + u_n - u_{n+1} \leq 0$ puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} \leq v_n, u_{n+1} \geq u_n$ donc $(w_n)_n$ converge vers une limite $l \in [0, \infty[$.
   • De même $(v_n)_n$ est décroissante et minorée par 0, donc elle converge, ainsi $u_n = v_n - w_n$ converge aussi.
   • Posons $l_1 = \lim\limits_{n\to\infty} u_n, l_2 = \lim\limits_{n\to\infty} v_n$, on a $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ alors $l_1 = \sqrt{l_1 l_2} \Rightarrow l_1^2 = l_1 l_2 \Rightarrow l_1 = l_2$.

Exercice-3 (05 points)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique et non constante.
Soit T la periode de f alors on a

- $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)$.
- $\exists x, y \in \mathbb{R} / f(x) \neq f(y)$ (f est non constante).

Supposons que f admet une limite en $+\infty$, alors $l = \lim\limits_{u\to\infty} f(u)$
Posons $x_n = x + nT$ et $y_n = y + nT$, alors $x_n, y_n \to \infty$ quand $n \to \infty$,
Et par suite $l = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$, et $l = \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$, mais $f(x_n) = f(x+nT) = f(x)$ et $f(y_n) = f(y+nT) = f(y)$ (car f est périodique), d'où $l = f(x) = f(y)$ ce qui est absurde car f est non constante.

14.5 Examen Final 2014-2015

Université Abou-Bakr-Belkaid de Tlemcen **Niveau : GI/L1/S1**
Département de Génie Eléctrique et Eléctronique **2014-2015**

Examen Final

Exercice-1 (07 points)

1. Soit la suite $(v_n)_n$ de terme général $v_n = \dfrac{2n+\sqrt{4n^2+1}}{n+\sqrt{n^2+1}}$, et soit la suite $(w_n)_n$ de terme général $w_n = \dfrac{2n-\sqrt{4n^2+1}}{n-\sqrt{n^2+1}}$. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$ et en déduire $\lim\limits_{n\to\infty} w_n$.
2. Soit la suite $(u_n)_n$ de terme général
$$u_n = \frac{2n+1}{3n^2+1} + \frac{2n+1}{3n^2+2} + \frac{2n+1}{3n^2+3} + ... + \frac{2n+1}{3n^2+n}.$$
Montrer que $(u_n)_n$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice-2 (06 points)

Donner l'expression de la dérivée nième de la fonction suivante :
$$g(x) = \frac{ax+b}{cx+d}.$$
Où a, b, c et d sont des nombres réels non nuls.

Exercice-3 (07 points)

Soit f une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle $[a, b]$, telle que $f(a) = f(b) = 0$ et pour tout $x \in]a, b[$ on a $f''(x) \leq 0$. Montrer que
$$\forall x \in [a, b], f(x) \geq 0$$

Solution

Exercice-1 (07 points)

1. • $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+\sqrt{4n^2+1}}{n+\sqrt{n^2+1}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n+n\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}}{n+n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 2.$$

• Pour trouver la limite de $\lim\limits_{n\to\infty} w_n$, il faut avoir une relation entre w_n et v_n.

$\dfrac{2n-\sqrt{4n^2+1}}{n-\sqrt{n^2+1}} = \dfrac{(2n-\sqrt{4n^2+1})(2n+\sqrt{4n^2+1})(n+\sqrt{n^2+1})}{(n-\sqrt{n^2+1})(n+\sqrt{n^2+1})(2n+\sqrt{4n^2+1})}$

$= \dfrac{(4n^2-(4n^2+1))(n+\sqrt{n^2+1})}{(n^2-(n^2+1))(2n+\sqrt{4n^2+1})}$

$$= \frac{-(n+\sqrt{n^2+1})}{-(2n+\sqrt{4n^2+1})} = \frac{(n+\sqrt{n^2+1})}{(2n+\sqrt{4n^2+1})} = \frac{1}{v_n}.$$

Ainsi, $w_n = \dfrac{1}{v_n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} w_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{v_n} = \frac{1}{2}$, alors

$$\lim_{n\to\infty} w_n = \frac{1}{2}.$$

2. Il suffit de remarquer que

$$\left.\begin{array}{ccccc}
\frac{2n+1}{3n^2+n} & \leq & \frac{2n+1}{3n^2+1} & \leq & \frac{2n+1}{3n^2+1} \\
\frac{2n+1}{3n^2+n} & \leq & \frac{2n+1}{3n^2+2} & \leq & \frac{2n+1}{3n^2+1} \\
\frac{2n+1}{3n^2+n} & \leq & \frac{2n+1}{3n^2+3} & \leq & \frac{2n+1}{3n^2+1} \\
\vdots & \leq & \vdots & \leq & \vdots \\
\frac{2n+1}{3n^2+n} & \leq & \frac{2n+1}{3n^2+n} & \leq & \frac{2n+1}{3n^2+1}
\end{array}\right\} \text{En faisant la somme, on obtient}$$

$$n\frac{2n+1}{3n^2+n} \leq w_n \leq n\frac{2n+1}{3n^2+1}$$

En passant à la limite

$$\lim_{n\to\infty} n\frac{2n+1}{3n^2+n} \leq \lim_{n\to\infty} w_n \leq \lim_{n\to\infty} n\frac{2n+1}{3n^2+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq \lim_{n\to\infty} w_n \leq \frac{2}{3}.$$

Par le théorème des trois suites (gendarmes, encadrement), on peut conclure que $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = \frac{2}{3}$.

Exercice-2 (06 points)

L'expression de la dérivée nième de la fonction

$$g(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

g est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$

$$g'(x) = \frac{a(cx+d) - c(ax+b))}{(cx+b)^2} = \frac{ad-cb}{(cx+b)^2} = (ad-cb)(cx+b)^{-2}$$

Si $ad - cb = 0$ alors $g^{(n)}(x) = 0$ pour $n \geq 1$.
Si $ad - cb \neq 0$, on peut continuer le calcul :

$$g''(x) = (ad-cb)[(-2)c(cx+d)^{-3}] = (ad-cb)[(-1).2(cx+d)^{-3}.c]$$

$$(g(x))^{(3)} = (ad-cb)[(-1)^2.2.3(cx+d)^{-4}.c^2]$$

$$(g(x))^{(4)} = (ad-cb)[(-1)^3.2.3.4.(cx+d)^{-5}.c^3]$$

Ainsi, on peut supposer légitimement que

$$(g(x))^{(n)} = (ad-cb)[(-1)^{n-1}.n!.(cx+d)^{-(n+1)}.c^{n-1}] \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}.....(P_n).$$

Formule qu'il est nécessaire de démontrer par récurrence :

- Vérification : $n = 1$,

$$g'(x) = (ad-cb)(cx+b)^{-2} = (ad-cb)[(-1)^{1-1}.1!.(cx+d)^{-(1+1)}.c^{1-1}] \text{ Vraie}$$

- Hypothèse de récurrence : (P_n).
- Résultat

$$(g(x))^{(n+1)} = (ad-cb)[(-1)^n(n+1)!(cx+d)^{-(n+2)}c^n] \ \forall n \in \mathbb{N}..... \quad (P_{n+1})$$

En effet

$$(g(x))^{(n+1)} = [(g(x))^{(n)}]' = \left[(ad-cb)[(-1)^{n-1}n!(cx+d)^{-(n+1)}c^{n-1}]\right]'$$
$$= (ad-cb)[(-1)^{n-1}n!c^{n-1}](-(n+1)c(cx+d)^{-(n+2)})$$
$$= (ad-cb)[(-1)^{n}(n+1)!(cx+d)^{-(n+2)}c^{n}].$$

Et par suite,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad (g(x))^{(n)} = (ad-cb)[(-1)^{n-1}n!(cx+d)^{-(n+1)}c^{n-1}].$$

<u>Exercice-3</u> (07 points)

f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$ (car elle est dérivable), et f est dérivable sur $]a,b[$ et $f(a)=f(b)=0$, alors d'après le théorème de Rolle, on peut conclure que

$$\exists c \in]a,b[, \text{ tel que } f'(c)=0.$$

D'un autre côté l'hypothèse $\forall x \in]a,b[,$ tel que $f''(x) \leq 0$, nous indique que f' est décroissante, ce qui nous permet de dire que :
Soit $x \in]a,c], x \leq c \Rightarrow f'(x) \geq f'(c) \Rightarrow f'(x) \geq 0.$
Soit $x \in [c,b[, x \geq c \Rightarrow f'(x) \leq f'(c) \Rightarrow f'(x) \leq 0.$
Donc f est croissante sur $]a,c]$ (car $f'(x) \geq 0$).
f est décroissante sur $[c,b[$ (car $f'(x) \leq 0$).
Si $x \in]a,c], x > a \Rightarrow f(x) \geq f(a) = 0 \Rightarrow f(x) \geq 0.$
Si $x \in [c,b[, x < b \Rightarrow f(x) \geq f(b) = 0 \Rightarrow f(x) \geq 0.$
Ainsi

$$\forall x \in [a,b], f(x) \geq 0.$$

14.6 Examen Final 2015-2016

Université Abou-Bakr-Belkaid de Tlemcen **Niveau : GI/L1/S1**
Département de Génie Eléctrique et Eléctronique **2015-2016**

E x a m e n   F i n a l

Exercice-1(06 points)

Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{x\to\alpha^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}+\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x^2-\alpha^2}}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x^2+2|x|}{x}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+5)^{x-2}}{(x+1)^{x+1}}.$$

N.B : L'utilisation de la Règle de l'Hôpital n'est pas autorisée.

Exercice-2 (06 points)

1. Pour quelle(s) valeur(s) du réel α la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-\alpha}{4x^2+4} & \text{si } x > 0 \\ \beta x - \frac{1}{4} & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

   est-elle prolongeable par continuité en 0 ? On précisera alors ce prolongement que l'on notera par F.

2. Pour quelle valeur de β, la fonction F est-elle dérivable en 0 ?

Exercice-3 (08 points)

Soit $a \in I\!R_*^+$, on considère la suite $\left(u_n\right)_{n\in N}$ définie par :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right),$$

et on note $\left(v_n\right)_n$ la suite définie par :

$$v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}.$$

1. Montrer que, pour tout entier n, $v_{n+1} = v_n^2$.

2. Calculer v_n en fonction de v_0 et montrer que $|v_0| < 1$. En déduire que v_n converge vers 0.

3. Exprimer u_n en fonction de v_n et montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{a}$.

4. Calculer les deux premiers termes de la suite $\left(v_n\right)_n$, pour $u_0 = 1$ et $a = 2$.

Solution

Exercice-1 (06 points)

1. $\lim_{x\to\alpha^+} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}+\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x^2-\alpha^2}} =$
   - Si $\alpha = 0$, $\lim_{x\to 0} \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}^2} = +\infty$
   - Si $\alpha \neq 0$, $\lim_{x\to\alpha^+} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}+\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x^2-\alpha^2}} = \lim_{x\to\alpha^+} [\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{x^2-\alpha^2}} + \dfrac{\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x-\alpha}\sqrt{x+\alpha}}]$

$$= \lim_{x\to\alpha^+} [\frac{x-\alpha}{\sqrt{x^2-\alpha^2}(\sqrt{x}+\sqrt{\alpha})} + \frac{\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x-\alpha}\sqrt{x+\alpha}}]$$

$$= \lim_{x\to\alpha^+} [\frac{\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x+\alpha}(\sqrt{x}+\sqrt{\alpha})} + \frac{1}{\sqrt{x+\alpha}}] = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}$$

2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2+2|x|}{x} =$
   - $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x^2+2x}{x} = \lim_{x\to 0^+} x+2 = 2.$
   - $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{x^2-2x}{x} = \lim_{x\to 0^-} x-2 = -2.$

3. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{(x+5)^{x-2}}{(x+1)^{x+1}} = \lim_{x\to+\infty} (\dfrac{x+5}{x+1})^x \dfrac{1}{(x+1)(x+5)^2}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x(1+\frac{5}{x})}{x(1+\frac{1}{x})}\right)^x \frac{1}{(x+1)(x+5)^2} = 0.$$

Exercice-2 (06 points)

1. - $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x-\alpha}{4x^2+4} = \dfrac{-\alpha}{4}$
   - $\lim_{x\to 0^-} \beta x - \dfrac{1}{4} = \dfrac{-1}{4}$

   Pour que f soit prolongeable par continuité en 0, il faut que $\dfrac{-\alpha}{4} = \dfrac{-1}{4}$ donc $\alpha = 1$.

On définit la fonction F (la fonction prolongeable de f)

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{4x^2+4} & \text{si } \ x > 0 \\ \dfrac{-1}{4} & \text{si } \ x = 0 \\ \beta x - \dfrac{1}{4} & \text{si } \ x < 0. \end{cases}$$

2. La valeur de β pour que F soit dérivable en 0.
   - $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\frac{x-1}{4x^2+4} + \frac{1}{4}}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2 + x}{4x(x^2+1)} = \dfrac{1}{4}$
   - $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\beta x - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\beta x}{x} = \beta.$

   Pour que f soit dérivable, en 0 il faut que $\beta = \dfrac{1}{4}$.

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{4x^2+4} & \text{si } \ x > 0 \\ \dfrac{-1}{4} & \text{si } \ x = 0 \\ \dfrac{1}{4}x - \dfrac{1}{4} & \text{si } \ x < 0. \end{cases}$$

<u>Exercice-3</u> (08 points)

Soit $a \in I\!R_*^+$, on considère la suite $\left(u_n\right)_{n \in N}$ définie par :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right),$$

et on note $\left(v_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}.$$

1. Raisonnement par récurrence que : , pour tout entier n, $v_{n+1} = v_n^2 \qquad (P_n)$
   - Vérification : $n = 0$, $v_1 = v_0^2$
   - Hypothèse de récurrence : (P_n).
   - Résultat (P_{n+1}).
2. – pour tout entier n, $v_n = (v_0)^{2n}$.
   – $|v_0| < 1$, (par définition $|v_n| = |\dfrac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}| < \dfrac{u_n}{u_n + \sqrt{a}} < \dfrac{u_n}{u_n} = 1$).
   – $\lim\limits_{n \to \infty} v_n = \lim\limits_{n \to \infty} (v_0)^{2n} = 0$, (car $|v_0| < 1$).

3. • pour tout entier n, $u_n = \dfrac{\sqrt{a}(v_n+1)}{1-v_n}$.
   • $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{a}(v_n+1)}{1-v_n} = \sqrt{a}$ (car $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$)
4. $v_0 = \dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}, v_1 = \dfrac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}$.

14.7 Rattrapage 2015-2016

Université Abou-Bakr-Belkaid de Tlemcen **Niveau : GI/L1/S1**
Département de Génie Eléctrique et Eléctronique **2015-2016**

Rattrapage

Exercice-1 (6 points)

Calculer les dérivées (et les simplifier si c'est possible) des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$
2. $f_2(x) = x^2 \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$
3. $f_3(x) = \arctan(\sqrt{1 - x})$
4. $f_4(x) = \cos^3(\sqrt{1 - x})$

Exercice-2 (6 points)

Donner l'expression de la dérivée nième de la fonction suivante :

$$f(x) = \ln[(ax + b)^\alpha].$$

Où a, b et α sont des nombres réels non nuls.

Exercice-3 (08 points)

Etant donné les nombres a et b vérifiant $0 < a < b$, on considère les deux suites :

$$U_n = \sqrt{U_{n-1}V_{n-1}} \quad \text{et} \quad V_n = \frac{U_{n-1} + V_{n-1}}{2} \quad \text{avec} \quad U_0 = a \text{ et } V_0 = b.$$

Montrer que ces deux suites convergent et admettent une même limite.

Solution

Exercice-1 (06 points)

En utilisant la dérivée de la composition entre deux fonctions $(hog)'(x) = h'(g(x))g'(x)$.

1. $f_1'(x) = [(1+\frac{1}{x})^x]' = [\mathrm{e}^{(x\ln(1+\frac{1}{x}))}]' = \big[-\frac{1}{x+1} + \ln(1+\frac{1}{x})\big](1+\frac{1}{x})^x$.
2. $f_2(x) = [x^2\ln(x+\sqrt{1+x^2})]' = 2x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$.
3. $f_3(x) = [\arctan(\sqrt{1-x})]' = \frac{-1}{2(2-x)\sqrt{1-x}}$.
4. $f_4'(x) = [\cos^3(\sqrt{1-x})]' = \frac{3}{2\sqrt{1-x}}\sin(\sqrt{1-x})\cos^2(\sqrt{1-x})$.

Exercice-2 (06 points)

L'expression de la dérivée nième de la fonction suivante :

$$f(x) = \ln[(ax+b)^\alpha].$$

Où a, b et α sont des nombres réels non nuls. f est dérivable sur $]-\frac{b}{a}, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{\alpha a}{ax+b}$$

$$f''(x) = \frac{-\alpha a^2}{(ax+b)^2}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{2\alpha a^3}{(ax+b)^3}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{-2.3.\alpha a^3}{(ax+b)^4}$$

.

.

.

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{a^n n!(-1)^n\alpha}{(ax+b)^{n+1}} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}.....(P_n)$$

Formule qu'il est nécessaire de démontrer par récurrence :

- Vérification : $n = 0$, $f'(x) = \dfrac{\alpha a}{ax+b}$ Vraie
- Hypothèse de récurrence : (P_n).
- Résultat $f^{(n+2)}(x) = \dfrac{a^{n+1}(n+1)!(-1)^{n+1}\alpha}{(ax+b)^{n+2}}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}.....$ $\quad (P_{n+1})$.

  En effet

$$f^{(n+2)}(x) = [f^{(n+1)}(x)]' = [\frac{a^n n!(-1)^n\alpha}{(ax+b)^{n+1}}]' = -(n+1)a\frac{a^n n!(-1)^n\alpha}{(ax+b)^{n+2}}$$

$$= \frac{a^{n+1}(n+1)!(-1)^{n+1}\alpha}{(ax+b)^{n+2}}$$

  Et par suite,

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f^{(n+1)}(x) = \frac{a^n n!(-1)^n\alpha}{(ax+b)^{n+1}}.$$

Exercice-3 (08 points)

Etant donné les nombres a et b vérifiant $0 < a < b$, on considère les deux suites :

$$U_n = \sqrt{U_{n-1}V_{n-1}} \quad \text{et} \quad V_n = \frac{U_{n-1}+V_{n-1}}{2} \quad \text{avec} \quad U_0 = a \text{ et } V_0 = b.$$

Montrer que ces deux suites convergent et admettent une même limite.

1. Démonstration par réccurence que : pour tout entier n, $0 < U_n \leq V_n$ (P_n)
   - Vérification : $n = 0$, $0 < U_0 = a < b = V_0$
   - Hypothèse de récurrence : (P_n).
   - Résultat $0 < U_{n+1} \leq V_{n+1}$ $\qquad (P_{n+1})$.

     On a $0 < U_n \leq V_n$ alors $0 < \frac{U_n+V_n}{2} = V_{n+1}$ et $0 < U_{n+1}$,
     on remarque aussi que : $V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{U_n+V_n}{2} - \sqrt{U_nV_n} = \frac{(V_n-U_n)^2}{2} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.
2. La monotonie de U_n et V_n
   - pour tout entier n, $U_n < V_n$, alors $U_n^2 < V_nU_n$ alors $U_n < \sqrt{V_nU_n} = U_{n+1}$, alors U_n est croissante $\forall n \in \mathbb{N}$.
   - $0 < U_n \leq V_n$ alors $2V_n > U_n + V_n$, on peut déduire : $V_n > \frac{U_n+V_n}{2} = V_{n+1}$, on obtient V_n est décroissante $\forall n \in \mathbb{N}$.

3. On a U_n est croissante et majorée par b alors elle converge, et V_n est décroissante et minorée par a alors elle converge.

4. Si on pose $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \alpha$ et $\lim\limits_{n\to\infty} V_n = \beta$
$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{U_{n-1}V_{n-1}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{U_{n-1}+V_{n-1}}{2}$
$\alpha = \sqrt{\alpha\beta}$ et $\beta = \frac{\alpha+\beta}{2} \Rightarrow \alpha = \beta$ donc les deux suites sont adjacentes.

Chapitre 15

Examens d'Outils Mathématiques

Sommaire

15.1 Examen Final 2011-2012

Université Abou-Bakr-Belkaid de Tlemcen **Niveau : GI/L1/S1**
Département de Génie Eléctrique et Eléctronique **2011-2012**

E x a m e n   F i n a l

Exercice-1 (06 points)

Calculer la dérivée nième de la fonction suivante :

$$f(x) = \ln(x+1).$$

Exercice-2 (07 points)

Calculer ce qui suit :

1. $I_1 = \displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+x+3}dx.$
2. $I_2 = \displaystyle\int \frac{1}{x^2-6x+5}dx.$

Exercice-3 (07 points)

1. Résoudre en fonctions des valeurs du paramètre réel $\alpha \in \mathbb{R}$, l'équation différentielle suivante :
$$y'' + \alpha y = 0.$$
2. On suppose que $\lambda > 0$, trouver toutes les solutions non nulles de l'équation
$$y'' + \lambda y = 0.$$
vérifiant $y(0) = 0$ et $y(\pi) = 0$.

Solution

Exercice-1 (06 points)

La dérivée nième de la fonction suivante :

$$f(x) = \ln(x+1),$$

où a, b et α sont des nombres réels non nuls. f est dérivable sur $]-1, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{-2.3}{(x+1)^4}$$

.

.

.

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{n!(-1)^n}{(x+1)^{n+1}} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}.....(P_n).$$

Formule qu'il est nécessaire de démontrer par récurrence :

- Vérification : $n = 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{x+1}$ Vraie
- Hypothèse de récurrence : (P_n).
- Résultat $f^{(n+2)}(x) = \dfrac{(n+1)!(-1)^{n+1}}{(x+1)^{n+2}} \quad \forall n \in \mathbb{N}..... \quad (P_{n+1})$.

  En effet

$$f^{(n+2)}(x) = [f^{(n+1)}(x)]' = [\frac{n!(-1)^n}{(x+1)^{n+1}}]'$$

$$= -(n+1)\frac{n!(-1)^n}{(x+1)^{n+2}} = \frac{(n+1)!(-1)^{n+1}}{(x+1)^{n+2}}$$

  Et par suite,

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f^{(n+1)}(x) = \frac{n!(-1)^n}{(x+1)^{n+1}}.$$

Exercice-2 (06 points)

1. $$I_1 = \int \frac{x-1}{x^2+x+3}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+1)-\frac{3}{2}}{x^2+x+3}dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+3}dx - \frac{1}{2}\int \frac{3}{x^2+x+3}dx$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+x+3| - \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+3}dx,$$
$$\int \frac{1}{x^2+x+3}dx = \int \frac{1}{(\frac{2x+1}{2})^2+\frac{11}{4}}dx = \frac{4}{11}\int \frac{1}{(\frac{2x+1}{\sqrt{11}})^2+1}dx,$$
on pose $t = \frac{2x+1}{\sqrt{11}}$,
$\int \frac{2}{\sqrt{11}(t^2+1)}dt = \frac{2}{\sqrt{11}}\arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{11}}) + c$, donc
$$I_1 = \frac{1}{2}\ln|x^2+x+3| - \frac{3}{\sqrt{11}}\arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{11}}) + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

2. $I_2 = \int \frac{1}{x^2-6x+5}dx,$

   on a, $\frac{1}{x^2-6x+5} = \frac{1}{(x-5)(x-1)} + \frac{1}{4}\frac{1}{x-5} - \frac{1}{4}\frac{1}{x-1}.$

   Alors
$$I_2 = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-5}dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1}dx$$
$$= \frac{1}{4}\ln|x-5| - \frac{1}{4}\ln|x-1| + c.$$

Exercice-03(07 points)

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $y'' + \alpha y = 0$
   L'équation caractéristique $r^2 + \alpha = 0 \Longrightarrow r^2 = \alpha$.
   - 1^{er} cas :$\alpha < 0$, deux solutions réelles : $r_1 = \sqrt{-\alpha}, r_2 = -\sqrt{-\alpha}$, alors
$$y = c_1 e^{\sqrt{-\alpha}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\alpha}x}.$$
   - 2^{eme} cas :$\alpha = 0$, une solution double $r_1 = r_2 = 0$
$$y = (c_1 + c_2 x).$$

- 3^{eme} cas :$\alpha > 0$, deux solutions complexes conjuguées
  $z_1 = i\sqrt{\alpha}$, $z_2 = -i\sqrt{\alpha}$, alors

$$y = c_1 \cos(\sqrt{\alpha}x) + c_2 \sin(\sqrt{\alpha}x).$$

2. Soit $\lambda > 0$, $y'' + \lambda y = 0$, alors il est clair que

$$y = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

$$\left\{\begin{array}{l} y(0) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} c_1 \cos(\sqrt{\lambda}0) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}0) = 0 \\ c_1 \cos(\sqrt{\lambda}\pi) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} c_1 = 0 \\ c_2 \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \end{array}\right.$$

La deuxième équation donne $c_2 = 0$, ou $\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$;

- si $c_2 = 0$ (comme $c_1 = 0$) alors $y \equiv 0$, (refusé, car on cherche des solutions non nulles).
- si $\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = k, k \in \mathbb{Z}, \Rightarrow \lambda = k^2$.
  Donc pour $\lambda = k^2$, $k \in \mathbb{Z}, y = c_2 \sin(kx)$.

15.2 Examen Final 2012-2013

Université Abou-Bakr-Belkaid de Tlemcen **Niveau : GI/L1/S1**
Département de Génie Eléctrique et Eléctronique **2012-2013**

Examen Final

Exercice-1 (06 points)

En utilisant un développement de Taylor Maclaurin de la fonction $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$, en déduire que la valeur de la limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - (1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24})}{7x^6}$.

Exercice-2 (04 points)

1. Calculer les racines carrées de $z = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.
2. En déduire les valeurs de $\cos(\dfrac{9\pi}{8})$ et $\sin(\dfrac{9\pi}{8})$.

Exercice-3 (06 points)

Calculer ce qui suit :

1. $I_1 = \displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+x+3}dx$.
2. $I_2 = \displaystyle\int \frac{1}{\sin(x)}dx$.
3. $I_3 = \displaystyle\int_{-1}^{1} x^3\sqrt{4-x^2}dx$.

Exercice-4 (04 points)

1. Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = e^{-3x}$.
2. Trouver la solution qui vérifie $y'(0) = y(0) = 0$.

Solution

Exercice-1 (06 points)

- $f(x) = \cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow f(0) = 1, f'(x) = \sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow f'(0) = 0.$
- $f''(x) = \cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow f''(0) = 1, f^{(3)}(x) = \sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow f^{(3)}(0) = 0.$
- $f^{(4)}(x) = \cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow f^{(4)}(0) = 1, f^{(5)}(x) = \sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow f^{(5)}(0) = 0.$
- $f^{(6)}(x) = \cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow f^{(6)}(0) = 1, f^{(7)}(x) = \sinh(x).$

$$f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!}\sinh(\theta x), 0 < \theta < 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - (1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24})}{7x^6} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!}\sinh(\theta x)}{7x^6} = \frac{1}{7.6!} = \frac{1}{7!}.$$

Exercice-2 (04 points)

1. Les racines carrées de $z = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$

$$(x+iy)^2 = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x^2 + y^2 = 1 \\ 2xy = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}} \\ y = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} \\ 2xy = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

   Donc les racines carrées de z sont

$$z_1 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}, z_2 = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}$$

2. Les valeurs de $\cos\left(\dfrac{9\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{9\pi}{8}\right)$.

   On cherche la forme géométrique de $z = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \text{ alors } \theta = \frac{\pi}{4} \text{ donc } z = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Et comme $(e^{i\frac{9\pi}{8}})^2 = e^{i(\frac{\pi}{4}+2\pi)} = e^{i\frac{\pi}{4}}$, donc $e^{i\frac{\pi}{8}}$ est une racine carrée de z

$$e^{i\frac{9\pi}{8}} = \cos(\frac{9\pi}{8}) + i\sin(\frac{9\pi}{8})$$

Comme $\cos(\frac{9\pi}{8}) < 0$ et $\sin(\frac{9\pi}{8}) < 0$ alors

$$e^{i\frac{9\pi}{8}} = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}$$

On en déduit que

$$\cos(\frac{9\pi}{8}) = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}},\ \sin(\frac{9\pi}{8}) = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}.$$

Exercice-3 (06 points)

1. $I_1 = \displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+x+3}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+1)-\frac{3}{2}}{x^2+x+3}dx$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+3}dx - \frac{1}{2}\int \frac{3}{x^2+x+3}dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+x+3| - \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+3}dx,$$

et $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x+3}dx = \int \frac{1}{(\frac{2x+1}{2})^2+\frac{11}{4}}dx = \frac{4}{11}\int \frac{1}{(\frac{2x+1}{\sqrt{11}})^2+1}dx,$
on pose $t = \frac{2x+1}{\sqrt{11}}$,

$$\int \frac{1}{x^2+x+3}dx = \int \frac{2}{\sqrt{11}(t^2+1)}dt = \frac{2}{\sqrt{11}}\arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{11}}) + c,$$

donc

$$I_1 = \frac{1}{2}\ln|x^2+x+3| - \frac{3}{\sqrt{11}}\arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{11}}) + c.$$

2. $I_2 = \displaystyle\int \frac{1}{\sin(x)}dx$, on pose $t = \tan(\frac{x}{2})$ alors $dx = \frac{2dt}{t^2+1}$, $\sin(x) = \frac{2t}{t^2+1}$,
donc, $I_2 = \displaystyle\int \frac{1}{\frac{2t}{t^2+1}}\frac{2dt}{t^2+1} = \int \frac{dt}{t}$, et par suite

$$I_2 = \ln|t| + c = \ln|\tan(\frac{x}{2})| + c.$$

3. $I_3 = \displaystyle\int_{-1}^{1} x^3\sqrt{4-x^2}dx = 0$, car $f(x) = x^3\sqrt{4-x^2}$ est définie sur $[-1,1]$
et elle est impaire.

Exercice-4 (04 points)

1. $y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^{-3x}$
   On commence par la résolution de l'équation sans second membre
   $$y'' + 2y' + y = 0,$$
   on lui associe l'équation caractéristique $r^2 + 2r + 1 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = -1$, alors la solution générale est de la forme $y = (c_1 + c_2 x)\mathrm{e}^{-x}$ avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Il suffit de remarquer que $y_*(x) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-3x}$ est une solution particulière, (on peut utiliser la méthode de variation de la constante pour la recherche de solution particulière).
   Alors la solution générale est
   $$y(x) = (c_1 + c_2 x)\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-3x} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. La solution qui vérifie : $y'(0) = y(0) = 0$
   $\begin{cases} c_1 + \frac{1}{4} = 0 \\ c_2 - c_1 = \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -\frac{1}{4} \\ c_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$ Alors la solution générale qui vérifie les conditions initiales est :
   $$y(x) = (\frac{-1}{4} + \frac{1}{2}x)\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-3x}.$$

15.3 Rattrapage 2012-2013

Université Abou-Bakr-Belkaid de Tlemcen **Niveau : GI/L1/S1**
Département de Génie Eléctrique et Eléctronique **2012-2013**

R a t t r a p a g e

Exercice-1 (06 points)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$Z^6 - iZ^3 - 1 - i = 0.$$

Exercice-2 (08 points)

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, calculer en fonction de m et n l'intégrale définie suivante :

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n dx.$$

Exercice-03 (06 points)

Soit $\omega \in \mathbb{R}$, résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' + \omega^2 y = x.$$

Solution

Exercice-1 (06 points)

Pour résoudre l'équation

$$Z^6 - iZ^3 - 1 - i = 0,$$

on pose $w = Z^3$, on obtient alors l'équation :

$$w^2 - iw - 1 - i = 0.$$

$\Delta = (2+i)^2$, ainsi

$$w_1 = 1+i, w_2 = -1 \text{ sont des solutions de l'équation } w^2 - iw - 1 - i = 0,$$

pour obtenir les solutions de l'équation

$$Z^6 - iZ^3 - 1 - i = 0.$$

Il suffit de chercher les racines cubique de w_1, w_2.

$$\text{On a : } w_1 = 1+i = re^{i\theta} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow r^3\mathrm{e}^{i3\theta} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}},$$

alors,

$$|w_1|^3 = \sqrt{2} \text{ et } \arg(w_1^3) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z},$$

donc $|w_1| = 2^{\frac{1}{6}}$, et $\arg(w_1) = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{2k\pi}{3}, k = 0, 1, 2$

$$z_1 = 2^{\frac{1}{6}}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{12}}, z_2 = 2^{\frac{1}{6}}\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}, z_3 = 2^{\frac{1}{6}}\mathrm{e}^{i\frac{17\pi}{12}}.$$

D'autre part,

$Z^3 = -1 = \mathrm{e}^{i\pi}$ alors $|z|^3 = 1, arg(z) = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2k\pi}{3}, k = 0, 1, 2$

$$z_4 = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}, z_5 = \mathrm{e}^{i\pi} = -1, z_6 = \mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{3}}.$$

Alors, l'ensemble des solutions

$$E = \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6\}.$$

Exercice-2 (08 points)

Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$;

$$I = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx$$

En utilisant l'intégration par parties $f(x) = x^m \to f'(x) = mx^{m-1}$ donc $g'(x) = (1-x)^n \to g(x) = -\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}$, alors

$$I = \left[-x^m \frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 + \frac{m}{n+1} \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n+1} dx = \frac{m}{n+1} \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n+1} dx.$$

Une deuxième intégration par parties $f(x) = x^{m-1} \to f'(x) = mx^{m-2}$ donc $g'(x) = (1-x)^{n+1} \to g(x) = -\frac{(1-x)^{n+2}}{n+2}$.
On obtient alors,

$$I = \frac{m}{n+1} \Big[\Big[-x^{m-1} \frac{(1-x)^{n+2}}{n+2} \Big]_0^1 + \frac{m-1}{n+2} \int_0^1 x^{m-2}(1-x)^{n+2} dx \Big]$$

On aura alors

$$I = \frac{m(m-1)}{(n+1)(n+2)} \int_0^1 x^{m-2}(1-x)^{n+2} dx.$$

Après m intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} I &= \frac{m(m-1)(m-2)...2.1}{(n+1)(n+2)...(n+m)} \int_0^1 (1-x)^{n+m} dx \\ &= \frac{m(m-1)(m-2)...2.1}{(n+1)(n+2)...(n+m)} \Big[-\frac{(1-x)^{n+m+1}}{n+m+1} \Big]_0^1 \end{aligned}$$

$$I = \frac{m(m-1)(m-2)...2.1}{(n+1)(n+2)...(n+m)(n+m+1)} \Rightarrow I = \frac{n!m!}{(n+m+1)!}$$

Exercice-3 (06 points)

Soit $\omega \in \mathbb{R}$, résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' + \omega^2 y = x$$

1. Si $\omega = 0$, alors l'équation

caractéristique donne $r^2 = 0$ (racine double) et l'équation $y'' + \omega^2 y = x$ devient $y'' = x$ pour trouver y il suffit d'intégrer deux fois $y'' = x \Rightarrow y' = \frac{1}{2}x^2 + c_2 \Rightarrow y(x) = \frac{1}{6}x^3 + c_2 x + c_1$. Ainsi

$$y(x) = \frac{1}{6}x^3 + c_2 x + c_1, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Si $\omega \neq 0$,
   – On commence par la résolution de l'équation sans second membre

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

On lui associe l'équation caractéristique $r^2 + \omega^2 = 0 \Rightarrow r^2 = -\omega^2 \Rightarrow r^2 = i^2\omega^2 \Rightarrow r_1 = i|\omega|, r_2 = -i|\omega|$, où cette équation possède deux racines complexes conjuguées

$$y_0 = c_1 \cos(|\omega|x) + c_2 \sin(|\omega|x).$$

Il est facile de remarquer que $y_* = \frac{1}{\omega^2}x$ est une solution particulière (sans utiliser la méthode de la variation de la constante), ainsi

$$y = y_0 + y_* \Rightarrow y = c_1 \cos(|\omega|x) + c_2 \sin(|\omega|x) + \frac{1}{\omega^2}x \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

15.4 Examen Final 2013-2014

Université Abou-Bakr-Belkaid de Tlemcen **Niveau : GI/L1/S1**
Département de Génie Eléctrique et Eléctronique **2013-2014**

E x a m e n   F i n a l

Exercice-1 (06 points)

1. Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' + 3y' + 2y = \mathrm{e}^{-x}.$$

2. Trouver la solution qui vérifie :

$$y(0) = y'(0) = 0.$$

Exercice-2 (07 points)

Calculer ce qui suit :

1. $I_1 = \displaystyle\int \frac{3x-1}{x^2+x+5}dx.$
2. $I_2 = \displaystyle\int \frac{x}{x^4+4}dx.$
3. $I_3 = \displaystyle\int (\ln(x))^2 dx.$

Exercice-3 (07 points)

Soit $n \in \mathbb{N}, n > 2$, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$Z^{2n} + Z^n + 1 = 0.$$

Solution

Exercice-1 (06 points)

1.
$$y'' + 3y' + 2y = \mathrm{e}^{-x}.$$

– On commence par la résolution de l'équation sans second membre

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

On lui associée l'équation caractéristique $r^2 + 3r + 2 = 0$, où cette équation possède deux racines $r_1 = -2, r_2 = -1$, et par suite la solution sera de la forme
$$y(x) = c_1\mathrm{e}^{-2x} + c_2\mathrm{e}^{-x} \text{ où } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

– Recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre, on suppose que $y_*(x) = c_1(x)\mathrm{e}^{-2x}+c_2(x)\mathrm{e}^{-x}$ alors à partir de la méthode de la variation de la constante : on obtient le système suivant :
$$\left\{\begin{array}{c} c_1'(x)\mathrm{e}^{-2x} + c_2'(x)\mathrm{e}^{-x} = 0 \\ -2c_1'(x)\mathrm{e}^{-2x} - c_2'(x)\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} c_1'(x) = -\mathrm{e}^{x} \\ c_2'(x) = 1 \end{array}\right.$$
$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} c_1(x) = -\mathrm{e}^{x} \\ c_2(x) = x \end{array}\right.$$
Ainsi
$$y_*(x) = (x-1)e^{-x}.$$
Et par suite, la solution générale est :
$$y(x) = c_1\mathrm{e}^{-2x} + c_2\mathrm{e}^{-x} + (x-1)e^{-x} \qquad \text{où } \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2.
$$y(0) = y'(0) = 0$$

Pour savoir les valeurs de c_1 et c_2, on utilise les conditions
$$\left\{\begin{array}{c} c_1 + c_2 = 1 \\ -2c_1 - c_2 + 2 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} c_1 = 1 \\ c_2 = 0 \end{array}\right.$$
Finalement la solution générale :
$$y(x) = \mathrm{e}^{-2x} + (x-1)e^{-x} \text{ où } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice-2 (07 points)

Calculer ce qui suit :

1. $I_1 = \displaystyle\int \frac{3x-1}{x^2+x+5}dx$

$$= \int \frac{\frac{3}{2}(2x+1)-\frac{5}{2}}{x^2+x+5}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+5}dx - \frac{5}{2}\int \frac{1}{x^2+x+5}dx$$

$$= \frac{3}{2}\ln|x^2+x+5| - \frac{5}{2}J.$$

On a aussi $x^2+x+5 = (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{19}{4}$.

$$J = \int \frac{1}{(\frac{2x+1}{2})^2+\frac{19}{4}}dx = \frac{4}{19}\int \frac{1}{(\frac{2x+1}{\sqrt{19}})^2+1}dx.$$

On pose $t = \frac{2x+1}{\sqrt{19}}$,

$$J = \int \frac{2}{\sqrt{19}(t^2+1)}dt = \frac{2}{\sqrt{19}}\arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{19}}) + c.$$

$$\text{Alors } I_1 = \frac{3}{2}\ln|x^2+x+5| - \frac{5}{\sqrt{19}}\arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{19}}) + c.$$

2. $I_2 = \displaystyle\int \frac{x}{x^4+4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^4+4}dx,$ on pose $t = x^2 \Rightarrow dt = 2xdx.$

A l'aide d'intégration par parties : $I_2 = \frac{1}{2}\displaystyle\int \frac{dt}{t^2+4} \Rightarrow \frac{1}{8}\int \frac{dt}{(\frac{t}{2})^2+1}$,

on pose $u = \frac{t}{2} \Rightarrow du = \frac{1}{2}dx.$

$$I_2 = \frac{1}{4}\int \frac{du}{u^2+1} \Rightarrow I_2 = \frac{1}{4}\arctan(u) + c.$$

Alors

$$I_2 = \frac{1}{4}\arctan(\frac{x^2}{2}) + c.$$

3. $I_3 = \displaystyle\int (\ln(x))^2 dx.$ en utilisant la fomule d'intégration par parties : on pose $f(x) = (\ln(x))^2 \to f'(x) = 2\frac{\ln(x)}{x}$ et $g'(x) = 1 \to g(x) = x$

$I_3 = x(\ln(x))^2 - \displaystyle\int 2\frac{\ln(x)}{x}xdx = x(\ln(x))^2 - 2\int \ln(x)dx.$ En utilisant une autre fois l'intégration par parties, on trouve :

$I_3 = x(\ln(x))^2 - 2\left[x\ln(x) - \displaystyle\int dx\right] + c.$ Alors

$$I_3 = x(\ln(x))^2 - 2x\ln(x) + 2x + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Exercice-3 (07 points)

$$Z^{2n} + Z^n + 1 = 0$$

Equation Bicarrée, on pose Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, pour résoudre l'équation, on pose $z = Z^n$, alors l'équation devient :

$$z^2 + z + 1 = 0,\ \Delta = -3,\ \text{ainsi}$$

$z_1 = \dfrac{-1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2 = \dfrac{-1}{2} + \dfrac{-\sqrt{3}}{2}i$ sont des solutions de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$. pour obtenir les solutions de l'équation

$$Z^{2n} + Z^n + 1 = 0$$

Il suffit de chercher les racines nième de z_1, z_2, ainsi que

$$z_1 = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}, z_2 = \bar{z_1} = \frac{-1}{2} + \frac{-\sqrt{3}}{2}i = \mathrm{e}^{i\frac{-2\pi}{3}} = \mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{3}}.$$

- $r^n \mathrm{e}^{in\theta} = z_1 = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$, alors $|z|^n = 1$ et $\arg(z^n) = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$ alors $|z| = 1$ et $\arg(z) = \dfrac{2\pi}{3n} + \dfrac{2k\pi}{n}, k = 0, 1, 2, ..., n-1$
  $z_1 = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3n}}, z_2 = \mathrm{e}^{i\frac{8\pi}{3n}}, ..., z_{n-1} = \mathrm{e}^{i\frac{(3n-2)2\pi}{3n}}$.

- $Z^n = z_2 = \mathrm{e}^{i\frac{-2\pi}{3}}$ alors $|z|^n = 1, \arg(z) = \dfrac{-2\pi}{3n} + \dfrac{2k\pi}{n}, k = 0, 1, 2, ..., n-1$,
  $z'_1 = \mathrm{e}^{i\frac{-2\pi}{3n}}, z'_2 = \mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{3n}}, ..., z'_{n-1} = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi(3n-4)}{3n}}$.

Alors l'ensemble des solutions est donné par :

$$E = \{z_1, z_2, ..., z_{n-1}, z'_1, ..., z'_{n-1}\}$$

15.5 Rattrapage 2013-2014

Université Abou-Bakr-Belkaid de Tlemcen **Niveau : GI/L1/S1**
Département de Génie Eléctrique et Eléctronique **2013-2014**

Rattrapage

Exercice-1 (07 points)

Soit $n \in \mathbb{N}, n > 2$, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$(z-1)^n = (z+1)^n.$$

Exercice-2 (06 points)

Calculer ce qui suit :

$$I = \int \frac{2x-3}{\sqrt{4x-x^2}}dx.$$

Exercice-3 (07 points)

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$2y(y')^2 + y^2(y''+y') + y^3 = 0.$$

Solution

Exercice-1 (07 points)

$\forall n \in \mathbb{N}, n > 2$

$$(z-1)^n = (z+1)^n \Leftrightarrow \frac{(z-1)^n}{(z+1)^n} = 1.$$

(On observe que $z = -1$ n'est pas une solution donc on peut diviser par $z+1$).

$$\Leftrightarrow (\frac{z-1}{z+1})^n = 1 \quad \text{racine nième de } 1.$$

$$\Leftrightarrow \frac{z-1}{z+1} = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, ..., n-1,$$

$$\Leftrightarrow (z-1) = (z+1)\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} \quad k = 0, 1, ..., n-1$$

$$\Leftrightarrow z(1-\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}) = 1 + \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} \quad k = 0, 1, ..., n-1$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1+\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}}{1-\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}} \quad k = 1, ..., n-1,$$

(pour $k = 0, \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} = 1$ et $1 - \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} = 0$ donc on enleve le $k = 0$). (On observe aussi que $z = 1$ n'est pas une solution de $(z-1)^n = (z+1)^n$).
L'ensembles des solutions est donné par

$$S = \left\{ \frac{1+\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}}{1-\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}}, \quad k = 1, ..., n-1 \right\}.$$

Exercice-02 (06 points)

$$\begin{aligned}
I = \int \frac{2x-3}{\sqrt{4x-x^2}}dx &= \int \frac{2x-4+1}{\sqrt{4x-x^2}}dx \\
&= \int \frac{2x-4+1}{\sqrt{4x-x^2}}dx + \int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}dx \\
&= -\int \frac{-2x+4}{\sqrt{4x-x^2}}dx + \int \frac{1}{\sqrt{4-4+4x-x^2}}dx \\
&= -\int (4-2x)(4x-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx + \int \frac{1}{\sqrt{4-(x-2)^2}}dx \\
&= -2\sqrt{4x-x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x-2}{2})^2}}dx
\end{aligned}$$

On pose $u = \dfrac{x-2}{2} \Rightarrow du = \dfrac{dx}{2}$.Alors

$$I = -2\sqrt{4x - x^2} + \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}dx$$

$$= -2\sqrt{4x - x^2} + \arcsin(u) + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Donc

$$I = -2\sqrt{4x - x^2} + \arcsin(\frac{x-2}{2}) + c. \qquad c \in \mathbb{R}$$

<u>Exercice-3</u> (07 points)

$$2y(y')^2 + y^2(y'' + y') + y^3 = 0$$

$y = 0$ est une solution, pour $y \neq 0$, posons $u = \frac{1}{y} \Rightarrow y = \frac{1}{u}$

$$y = \frac{1}{u} \Rightarrow y' = \frac{u'}{u^2} \Rightarrow y'' = \frac{u''u^2 + 2u'^2 u}{u^4}.$$

On remplace dans l'équation, on obtient

$$2\frac{1}{u}(\frac{u'}{u^2})^2 - \frac{1}{u^2}(\frac{u''u^2 + 2u'^2 u}{u^4} + \frac{-u'}{u^2}) + \frac{1}{u^3} = 0$$

Multiplions les deux membres de la dernière équation par u^4, on obtient :

$$2\frac{u'^2}{u} + u'' - 2\frac{u'^2}{u} + u' + u = 0.$$

Ce qui donne l'équation linéaire sans second membre :

$$u'' + u' + u = 0$$

l'équation caractéristique : $r^2 + r + 1 = 0$ alors $\Delta = 3i^2$, et par suite $r_1 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i, r_2 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, alors

$u = (c_1 \cos(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x) + c_2 \sin(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x))e^{-\frac{1}{2}x}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ (qui ne s'annulant pas en même temps)

Comme $y = \dfrac{1}{u}$, alors

$$y = \frac{e^{\frac{1}{2}x}}{c_1 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + c_2 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)}.$$

15.6 Examen Final 2014-2015

Université Abou-Bakr-Belkaid de Tlemcen **Niveau : GI/L1/S1**
Département de Génie Eléctrique et Eléctronique **2014-2015**

E x a m e n F i n a l

Exercice-1 (06 points)

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$y' + 9y = x.$$

$$y'' + 9y = 0.$$

Exercice-2 (07 points)

Calculer ce qui suit :

1. $I_1 = \displaystyle\int \frac{-3x+1}{x^2+x+5}dx,$
2. $I_2 = \displaystyle\int (x^2+1)\arctan(x)dx,$
3. $I_3 = \displaystyle\int \frac{1}{1-x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx.$

Exercice-3 (07 points)

Soit n un entier naturel tel que $n > 3$

1. Trouver les racines nièmes de $z = 1$.
2. Soit $\alpha \neq 1$, une racine nième de $z = 1$, calculer

$$S = 1 + 2\alpha + 3\alpha^2 + ... + n\alpha^{n-1}.$$

Solution

Exercice-1 (06 points)

1. Pour résoudre l'équation $y' + 9y = x$ (Equation linéaire du premier ordre). Il suffit de multiplier les deux membres de l'équation par e^{9x}.
$y' + 9y = x \Leftrightarrow y'\mathrm{e}^{9x} + 9y\mathrm{e}^{9x} = xe^{9x} \Leftrightarrow (y\mathrm{e}^{9x})' = x\mathrm{e}^{9x}$.
Soit $y\mathrm{e}^{9x} = \int x\mathrm{e}^{9x}dx$. Une intégration par parties permet de calculer
$y\mathrm{e}^{9x} = \int x\mathrm{e}^{9x}dx = \frac{x}{9}\mathrm{e}^{9x} - \frac{1}{9}\int \mathrm{e}^{9x}dx = \frac{x}{9}\mathrm{e}^{9x} - \frac{1}{81}\mathrm{e}^{9x} + c, c \in \mathbb{R}$. Alors
$$y = \frac{x}{9} - \frac{1}{81} + c\mathrm{e}^{-9x} \quad c \in \mathbb{R}.$$

2. Pour résoudre l'ESSM : $y'' + 9y = 0$, on considère l'équation caractéristique :
$$r^2 + 9 = 0 \Rightarrow r_1 = 3i \text{ et } r_2 = -3i$$
La solution générale de l'ESSM est donnée par :
$$y_0 = c_1\cos(3x) + c_2\sin(3x), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice-2 (07 points)

Calculer ce qui suit :

1. $I_1 = \int \frac{-3x+1}{x^2+x+5}dx$
$$= \int \frac{\frac{-3}{2}(2x+1)+\frac{5}{2}}{x^2+x+5}dx = \frac{-3}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+5}dx + \frac{5}{2}\int \frac{1}{x^2+x+5}dx$$
$$= \frac{-3}{2}\ln|x^2+x+5| + \frac{5}{2}J.$$
On a aussi $x^2+x+5 = (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{19}{4}$.
$$J = \int \frac{1}{(\frac{2x+1}{2})^2 + \frac{19}{4}}dx = \frac{4}{19}\int \frac{1}{(\frac{2x+1}{\sqrt{19}})^2+1}dx.$$
On pose $t = \frac{2x+1}{\sqrt{19}}$,
$$J = \int \frac{2}{\sqrt{19}(t^2+1)}dt = \frac{2}{\sqrt{19}}\arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{19}}) + c.$$

Alors
$$I_1 = \frac{-3}{2}\ln|x^2+x+5| + \frac{5}{\sqrt{19}}\arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{19}}) + c.$$

2. $I_2 = \int (x^2+1)\arctan(x)dx$
A l'aide d'intégration par parties :
$$I_2 = \int (x^2+1)\arctan(x)dx = (\frac{1}{3}x^3+x)\arctan(x) - \int \frac{\frac{1}{3}x^3+x}{1+x^2}dx$$
Il faut observer que
$$\frac{\frac{1}{3}x^3+x}{1+x^2} = \frac{1}{3}\frac{x^3+3x}{1+x^2} = \frac{1}{3}\frac{x^3+x+2x}{1+x^2} = \frac{1}{3}(x+\frac{2x}{1+x^2})$$
(On peut faire une division Euclidienne). Alors
$$I_2 = (\frac{1}{3}x^3+x)\arctan(x) - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{3}\ln(x^2+1) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

3. $I_3 = \int \frac{1}{1-x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$. On supposera que l'expression à intégrer est bien définie $x \in]-1,1[$, on pose
$$y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \Rightarrow x = \frac{1-y^2}{1+y^2} \Rightarrow dx = \frac{-4y}{(1+y^2)^2}dy.$$
En remarquant que $\frac{1}{1+x} = \frac{1+y^2}{2y^2}$ donc,
$$I_3 = \int \frac{1+y^2}{2y^2}y\frac{-4y}{(1+y^2)^2}dy = -2\int \frac{dy}{1+y^2} = -2\arctan(y) + c$$
$$I_3 = -2\arctan(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}) + c.$$

<u>Exercice-3</u> (07 points)

Soit n un entier naturel tel que $n > 3$

1. Les racines nièmes de $z = 1$, α tel que $\alpha^n = 1$.
$\alpha = re^{i\varphi}, \alpha^n = r^n e^{in\varphi} = 1 \Rightarrow \begin{cases} r^n = 1 \\ n\varphi = 2k\pi \end{cases}$ ....$k \in \mathbb{Z}, r = 1$ et $\varphi = \frac{2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, ..., n-1$
Alors les racines nième de 1 sont :
$$\{\alpha_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k = 0, 1, ..., n-1\}.$$

2. Soit $\alpha \neq 1$ une racine nième de $z = 1$. Pour calculer

$$S = 1 + 2\alpha + 3\alpha^2 + ... + n\alpha^{n-1}.$$

Considérons la fonction

$$f(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^n.$$

Donc

$$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + ... + nx^{n-1}.$$

D'un autre coté, pour $x \neq 1$, on a

$$f(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Utilisons cette formule pour calculer f'

$$f'(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + (1 - x^{n+1})}{(1-x)^2}$$

Soit $\alpha \neq 1$, alors $S = 1 + 2\alpha + 3\alpha^2 + ... + n\alpha^{n-1} = f'(\alpha)$ et donc

$$S = \frac{-(n+1)\alpha^n(1-\alpha) + (1 - \alpha^{n+1})}{(1-\alpha)^2}$$

Or $\alpha^n = 1$ (racine nième de l'unité) $\alpha^{n+1} = \alpha^n.\alpha = \alpha$, donc

$$S = \frac{-(n+1)\alpha^n(1-\alpha) + (1-\alpha)}{(1-\alpha)^2} = \frac{n}{\alpha - 1}.$$

Ainsi

$$S = 1 + 2\alpha + 3\alpha^2 + ... + n\alpha^{n-1} = \frac{n}{\alpha - 1}.$$

Remarque : cette formule est valable si $\alpha^n = 1$ et $\alpha \neq 1$.

15.7 Examen Final 2015-2016

Université Abou-Bakr-Belkaid de Tlemcen **Niveau : GI/L1/S1**
Département de Génie Eléctrique et Eléctronique **2015-2016**

E x a m e n   F i n a l

Exercice-1 **(05 points)**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$Z^{6n} - iZ^{3n} - 1 - i = 0.$$

Exercice-2 **(05 points)**

Calculer ce qui suit :

1. $I_1 = \displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+x+3}dx.$
2. $I_2 = \displaystyle\int \frac{(\arctan(x))^2}{x^2+1}dx.$
3. $I_3 = \displaystyle\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx.$

Exercice-3 **(05 points)**
Trouver une relation entre I et J, puis calculer I et J

$$I = \int_0^{\pi} x^2\cos^2(x)\,dx, \qquad J = \int_0^{\pi} x^2\sin^2(x)\,dx.$$

Exercice-4 **(05 points)**

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} xy'\ln(x) - y = (\ln(x))^2 \\ \\ y(\mathrm{e}) = 3. \end{cases}$$

Solution

Exercice-1 (05 points)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, pour résoudre l'équation

$$Z^{6n} - iZ^{3n} - 1 - i = 0.$$

On pose $w = Z^{3n}$, on obtient alors l'équation :

$$w^2 - iw - 1 - i = 0, \ \ \Delta = (2+i)^2, \text{ ainsi}$$

$$w_1 = 1 + i, w_2 = -1 \text{ sont des solutions de l'équation } w^2 - iw - 1 - i = 0.$$

Pour obtenir les solutions de l'équation

$$Z^{6n} - iZ^{3n} - 1 - i = 0.$$

Il suffit de chercher les racines w_1, w_2 ainsi que $w = re^{i\theta}$

- $r^{3n}e^{i3n\theta} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, alors $|z|^{3n} = \sqrt{2}$ et $arg(z^{3n}) = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$, donc $|z| = 2^{\frac{1}{6n}}$ et $arg(z) = \dfrac{\pi}{12n} + \dfrac{2k\pi}{3n}, k = 0, 1, ..., 3n-1$
  $z_0 = 2^{\frac{1}{6n}}e^{i\frac{\pi}{12n}}, z_1 = 2^{\frac{1}{6n}}e^{i\frac{9\pi}{12n}}, ..., z_{3n-1} = 2^{\frac{1}{6n}}e^{i\frac{24n\pi-7}{12n}}.$

- $Z^{3n} = -1 = e^{i\pi}$ alors $|z|^{3n} = 1, arg(z) = \dfrac{\pi}{3n} + \dfrac{2k\pi}{3n}, k = 0, 1, ..., 3n-1,$
  $z'_0 = e^{i\frac{\pi}{3n}}, z'_1 = -1, ..., z'_{3n-1} = e^{i\frac{\pi(6n-1)}{3n}}.$

Alors l'ensemble des solutions est donné par :

$$S = \left\{z_0, z_1, z_2, ..., z_{3n-1}, z'_0, z'_1, ..., z'_{3n-1}\right\}.$$

Exercice-2 (05 points)

1. $$I_1 = \int \frac{x-1}{x^2+x+3}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+1) - \frac{3}{2}}{x^2+x+3}dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+3}dx - \frac{1}{2}\int \frac{3}{x^2+x+3}dx$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+x+3| - \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+3}dx,$$

et $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x+3}dx = \int \frac{1}{(\frac{2x+1}{2})^2+\frac{11}{4}}dx = \frac{4}{11}\int \frac{1}{(\frac{2x+1}{\sqrt{11}})^2+1}dx,$
on pose $t = \frac{2x+1}{\sqrt{11}}$,
$\displaystyle\int \frac{2}{\sqrt{11}(t^2+1)}dt = \frac{2}{\sqrt{11}}\arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{11}}) + c,$ donc

$$I_3 = \frac{1}{2}\ln|x^2+x+3| - \frac{3}{\sqrt{11}}\arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{11}}) + c.$$

2. $I_2 = \displaystyle\int \frac{(\arctan(x))^2}{x^2+1}dx$, on pose $t = \arctan(x)$ alors $dt = \dfrac{dx}{x^2+1}$,
donc, $I_2 = \displaystyle\int t^2 dt$ et par suite

$$I_2 = \frac{1}{3}t^3 + c = \frac{1}{3}(\arctan(x))^3 + c.$$

3. $I_3 = \displaystyle\int \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx$, on pose $y = \sqrt{x-1}$ et $x = y^2+1$ donc $dy = \dfrac{dx}{2\sqrt{x-1}}$, donc,

$$I_3 = \int \frac{2y^2-2+2}{y^2+1}dx = 2y - \int \frac{2}{y^2+1}dx$$
$$= 2y - 2[\arctan(y)] = 2\sqrt{x-1} - 2\arctan(\sqrt{x-1}) + c.$$

<u>Exercice-3</u> (05 points)

$$I = \int_0^\pi x^2\cos^2(x)\,dx, \qquad J = \int_0^\pi x^2\sin^2(x)\,dx.$$

Commençons par calculer

$$I + J = \int_0^\pi x^2(\cos^2(x)+\sin^2(x))\,dx = \int_0^\pi x^2\,dx = \frac{1}{3}[x^3]_0^\pi = \frac{1}{3}\pi^3.$$
$$I - J = \int_0^\pi x^2(\cos^2(x)-\sin^2(x))\,dx = \int_0^\pi x^2\cos(2x)\,dx,$$

on peut poser $t = 2x$, on trouve que

$$I - J = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} t^2\cos(t)\,dx$$

par deux fois intégration par parties, on trouve :

$$\frac{1}{8}\int_0^{2\pi} t^2\cos(t) = \frac{1}{8}\left[[t^2\sin(t)]_0^{2\pi} - 2\int_0^{2\pi} t\sin(t)\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[\left[t^2\sin(t) - 2(-t\cos(t) + \sin(t))\right]_0^{2\pi}\right] = \frac{1}{2}\pi.$$

Alors, on peut déduire que

$$I = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}\pi^3 = \frac{2\pi^3 + 3\pi}{12}.$$

$$J = \frac{-\pi}{4} + \frac{1}{6}\pi^3 = \frac{2\pi^3 - 3\pi}{12}.$$

Exercice-4(05 points)

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} xy'\ln(x) - y = (\ln(x))^2 \\ \\ y(\mathrm{e}) = 3. \end{cases}$$

On commence par la résolution de l'équation sans second membre

$$xy'\ln(x) - y = 0 \text{ alors } \frac{y'}{y} = \frac{1}{x\ln(x)},$$

et par suite

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x\ln(x)},$$

après intégration

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x\ln(x)} \Longrightarrow \ln|y| = \int \frac{dx}{x\ln(x)}$$

on pose $t = \ln(x)$ donc $dt = \frac{dx}{x}$ alors

$$\ln|y| = \int \frac{dx}{x\ln(x)} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|\ln(x)| + c.$$

On obtient finalement que $y(x) = K\ln(x)$ pour tout $K \in \mathbb{R}$ est une solution générale de l'équation sans second membre

Recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre, on peut remarquer que $y_*(x) = (\ln(x))^2$ est une solution particulière.

N.B : On peut utiliser la méthode de variation de la constante pour la recherche d'une solution particulière.

Alors la solution générale est

$$y(x) = K\ln(x) + (\ln(x))^2$$

Pour connaître la valeur de K, on utilise la condition initiale $y(\mathrm{e}) = 3$, on aura

$$y(\mathrm{e}) = K + 1 = 3 \Rightarrow K = 2.$$

La solution générale est

$$y(x) = 2\ln(x) + (\ln(x))^2.$$

15.8 Rattrapage 2015-2016

Université Abou-Bakr-Belkaid de Tlemcen **Niveau : GI/L1/S1**
Département de Génie Eléctrique et Eléctronique **2015-2016**

Rattrapage

Exercice-1 (06 points)

Calculer les primitives suivantes :

1. $I_1 = \displaystyle\int \frac{x-3}{2x^2+2x+5}dx.$
2. $I_2 = \displaystyle\int \frac{x^4}{x^3-1}\,dx.$
3. $I_3 = \displaystyle\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$

Exercice-2 (08 points)

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(x)}{\cos(x)+\sin(x)}\,dx, \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)+\sin(x)}\,dx.$$

1. Sans calculer I et J, montrer que $I = J$.
2. Trouver une relation entre I et J, puis calculer I et J.

Exercice-3 (06 points)

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} y'' - 4\lambda y' + 4\lambda^2 y = \mathrm{e}^{3\lambda x} \\ \\ y(0) = y'(0) = 1. \end{cases}$$

Solution

Exercice-1 (6 points)

1. $$I_1 = \int \frac{x-3}{2x^2+2x+5}dx = \int \frac{\frac{1}{4}(4x+2) - \frac{14}{4}}{2x^2+2x+5}dx$$
$$= \frac{1}{4}\int \frac{4x+2}{2x^2+2x+5}dx - \frac{7}{2}\int \frac{1}{2x^2+2x+5}dx$$
$$= \frac{1}{4}\ln|2x^2+2x+5| - \frac{7}{2}\int \frac{1}{2x^2+2x+5}dx+,$$
et $\int \frac{1}{2x^2+2x+5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(\frac{2x+1}{2})^2 + \frac{9}{4}}dx = \frac{2}{9}\int \frac{1}{(\frac{2x+1}{3})^2+1}dx$, on pose $t = \frac{2x+1}{3}$, $\int \frac{1}{3(t^2+1)}dt = \frac{1}{3}\arctan(\frac{2x+1}{3}) + c$, donc
$$I_1 = \frac{1}{4}\ln|x^2+x+3| - \frac{7}{6}\arctan(\frac{2x+1}{3}) + c.$$

2. $$I_2 = \int \frac{x^4}{x^3-1}\,dx = \int \frac{x^4 - x + x}{x^3-1}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2 + \int \frac{x}{x^3-1}\,dx = x + I_2',$$
et de plus $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$ alors $I_2' = \int \frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)}\,dx$
Par la décomposition en élements simples, on obtient que :
$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta x+\gamma}{x^2+x+1}$, on aura que $\alpha = \gamma = -\beta = \frac{1}{3}$, et par suite,
$$I_2' = \frac{1}{3}\Big[\int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{x-1}{x^2+x+1}dx\Big]$$
$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\big[\ln(x^2+x+1) - \int \frac{3}{x^2+x+1}dx\big]$$
$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\big[\ln(x^2+x+1) - \int \frac{3}{x^2+x+1}dx\big]$$
$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{6}I_2'',$$
avec

$$I_2'' = \int \frac{3}{x^2+x+1}dx = \int \frac{4}{(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2+1}dx,$$

on pose $t = \dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$, alors

$$I_2'' = \int \frac{2\sqrt{3}}{t^2+1}dt = 2\sqrt{3}\arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}) + c.$$

Donc

$$I_2 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}) + c$$

3. $I_3 = \displaystyle\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$, on pose $x = \sin(t), dx = \cos(t)dt$

$$I_3 = \int \frac{\cos(t)dt}{(1-\sin^2(t))^{\frac{3}{2}}}dx = \int \frac{dt}{\cos(x)^2} = \tan(t)+c = \tan(\arcsin(x))+c$$

$$= \frac{\sin(\arcsin(x))}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} + c = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + c.$$

Exercice-2(08 points)

Trouver une relation entre I et J, puis calculer I et J

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(x)}{\cos(x)+\sin(x)}dx, \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)+\sin(x)}dx.$$

1. Commençons par calculer $I - J$

$$I-J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(x)-\sin^2(x)}{\cos(x)+\sin(x)}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos(x)-\sin(x))(\cos(x)+\sin(x))}{\cos(x)+\sin(x)}dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(x)-\sin(x))\,dx = 0.$$

2. La deuxième relation

$$I+J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos(x)+\sin(x)}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos(x)+\sin(x)}dx$$

On utilise le changement de variable universel $t = \tan(\frac{x}{2})$, avec $\sin(x) = \dfrac{2t}{t^2+1}$, $\cos(x) = \dfrac{1-t^2}{t^2+1}$ et $dt = \dfrac{2}{1+t^2}$ on aura que

$$I+J = \int_0^1 \frac{2}{-t^2+2t+1}dt = \int_0^1 \frac{2}{(t-t_0)(t-t_1)}dt$$

$$= \int_0^1 \frac{\alpha}{(t-t_0)}\,dt + \int_0^1 \frac{\beta}{(t-t_1)}\,dt$$

avec $t_0 = 1+\sqrt{2}, t_1 = 1-\sqrt{2}, \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \beta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$, donc

$$I+J = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\ln|t-1-\sqrt{2}|-\ln|t-1+\sqrt{2}|\right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\ln|1+\sqrt{2}|-\ln|\sqrt{2}-1|\right]$$

$$= \sqrt{2}\ln|1+\sqrt{2}|.$$

Alors on obtient que

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln|1+\sqrt{2}|.$$

$$J = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln|1+\sqrt{2}|.$$

Exercice-3 (6 points)

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} y'' - 4\lambda y' + 4\lambda^2 y = \mathrm{e}^{3\lambda x} \\ \\ y(0) = y'(0) = 1. \end{cases}$$

1. Si $\lambda = 0$, alors l'équation réduit a

$$\begin{cases} y'' = 1 \\ \\ y(0) = y'(0) = 1. \end{cases}$$

Et par suite $y(x) = \frac{1}{2}x^2 + ax + b$, en utilisant les conditions initiales, on aura

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1.$$

2. Si $\lambda \neq 0$,

$$y'' - 4\lambda y' + 4\lambda^2 y = \mathrm{e}^{3\lambda x}$$

– On commence par la résolution de l'équation sans second membre

$$y'' - 4\lambda y' + 4\lambda^2 y = 0$$

On lui associe l'équation caractéristique $r^2 - 4\lambda r + 4\lambda^2 = 0$, où cette équation possède une racines double $r = 2\lambda$. Donc la solution sera de la forme

$$y(x) = (\alpha x + \beta)\mathrm{e}^{2\lambda x}.$$

– Recherche d'une solution particulière de l'equation avec second membre, on peut remarquer que $y_*(x) = c\mathrm{e}^{3\lambda x}$ est une solution particulière, ou c est une constante a fixée, on remplace la solution particulière dans l'équation on aura .

$$(9\lambda^2 - 12\lambda^2 + 4\lambda^2)c\mathrm{e}^{3\lambda x} = \mathrm{e}^{3\lambda x}.$$

Et par suite $c = \frac{1}{\lambda^2}$, donc la solution particulière $y_*(x) = \frac{1}{\lambda^2}\mathrm{e}^{3\lambda x}$.

N.B : On peut utiliser la méthode de variation de la constante pour la recherche de solution particulière.

Alors la solution générale est

$$y(x) = (\alpha x + \beta)\mathrm{e}^{2\lambda x} + \frac{1}{\lambda^2}\mathrm{e}^{3\lambda x}$$

Pour savoir les valeurs de α et β, on utilise les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 1$, on aura

$$y(0) = \beta + \frac{1}{\lambda^2} = 1 \Rightarrow \beta = 1 - \frac{1}{\lambda^2}.$$

$$y'(0) = \alpha + 2\lambda\beta + \frac{3}{\lambda} = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\lambda - 2\lambda^2 - 1}{\lambda}.$$

La solution générale est :

$$y(x) = (\frac{(-2\lambda^2 + \lambda - 1)x}{\lambda} + \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2})\mathrm{e}^{2\lambda x} + \frac{1}{\lambda^2}\mathrm{e}^{3\lambda x}.$$

Bibliographie

[1] Allab, Kada, *Eléments d'analyse : fonction d'une variable réelle* O.P.U., 2002.

[2] Azoulay, Elie, *Problèmes corrigés de mathématiques - 2 éd.* Paris : Dunod, 2002.

[3] Baba-Hamed. C, Benhabib. K, *Algèbre 1. Rappel de cours et exercices avec solutions.* O.P.U., 1985.

[4] Baba-Hamed. C, Benhabib. K, *Analyse 1. Rappel de cours et exercices avec solutions.* O.P.U., 1985.

[5] Stéphane Balac, Laurent Chupin, A*nalyse et algèbre : cours de mathématiques de deuxième année avec exercices corrigés et illustrations avec Maple.* PPUR presses polytechniques, 2008.

[6] Chambadal, L. *Exercices et problèmes résolus d'analyse : mathématiques spéciales.* Bordas, 1973.

[7] Hitta, Amara, Cours d'algèbre et exercices corrigés. O.P.U., 1994

[8] Miri Sofiane El-Hadi , *Algèbre et Analyse* - Faculté de Technologie, Université de Tlemcen. 2013.

[9] Zahaf Mohammed Brahim, Bensid Sabri, *Outils mathématiques. Séries numériques, séries entières et séries de Fourier. Cours et exercices avec solutions.* Faculté de Technologie, Université de Tlemcen. 2014.