Chapitre 5

Logique des prédicats

5.1 Introduction

Dans la logique des propositions on considère une proposition comme un tout, représenté par une variable, dont on ne détaille pas le contenu. On ne s'intéresse qu'à la vérité ou à la fausseté d'une proposition. La logique des prédicats, également appelée logique du premier ordre, regarde les propositions de plus près. Dans l'analyse des propositions élémentaires en langue naturelle on peut distinguer

- un sujet (ce dont on parle) et d'éventuels compléments
- un prédicat (ce qu'on dit à propos du sujet et de ses compléments)

Par exemple, dans la proposition « Jules est grand » on a

- un sujet : *Jules*
- le prédicat : *est grand*

Dans la proposition « Maya mange une pomme » on a

- un sujet *Maya* et un complément *pomme*
- le prédicat : *mange*

On pourrait réécrire les propositions précédentes sous une forme qui met en évidence le prédicat, soit :

$$\textit{est grand}(\textit{Jules})$$

$$mange(Maya, pomme)$$

Suivant ce modèle, la logique des prédicats représente les propositions élémentaires (atomiques) son la forme :

$$\textit{nom-prédicat}(objet_1, objet_2, \ldots)$$

où $objet_1, objet_2, \ldots$ sont les objets sur lesquels porte le prédicat (le sujet et ses éventuels compléments)

En logique des prédicats les variables représentent non pas des propositions mes des objets sur lesquels portent les prédicats. L'introduction de variables permet de formuler deux types d'énoncés.

Les énoncés universels. Dans ce cas les variables représentent tous les objets d'un domaine. Comme dans

Si X est une girafe alors X est un animal.

Les énoncés existentiels. Ici une variable représente un objet particulier du domaine, qu'on le connaisse précisément ou non. Comme dans

Il y a au moins un nombre entier Z tel que $Z > 3$ et $Z^2 < 30$.

Contrairement aux variables, les constantes représentent des objets particulier et connus : 1642 (un nombre entier), *Ivan* (une personne particulière), etc.

Enfin, la notion de fonction correspond à la notion habituelle de fonction qui associe à un ou plusieurs objets (les paramètres) une valeur (le résultat de la fonction). Par exemple age(x) associe à une personne x un nombre entier (son âge) ou distance(x, y) qui fournit la distance entre deux villes x et y.

5.2 Syntaxe de la logique des prédicats

Langage logique

Pour écrire des formules de logique des prédicats, on commence par se donner un vocabulaire (ou signature) W composé de symboles de différents types :

- variables (x , y , z , ...)
- constantes (a , b , c , ...)
- fonctions (f , g , h , ...)
- prédicats (p , q , r , ...)

à chaque symbole de fonction et de prédicat est associée un nombre d'arguments (arité) qui est un entier positif ou nul. On peut considérer que les constantes sont des fonctions 0-aires.

Grammaire de la logique des prédicats

$$
\begin{array}{rcl}
\text{terme} & = & \text{constante} \mid \text{variable} \\
 & & \mid \text{fonction "(" terme \{ "," terme \} ")"} \\
\text{atome} & = & \text{prédicat "(" terme \{ "," terme \} ")"} \\
\text{formule} & = & \text{atome} \\
 & & \mid \forall \text{ variable formule} \\
 & & \mid \exists \text{ variable formule} \\
 & & \mid \neg \text{ formule} \\
 & & \mid \text{formule connecteur formule} \\
\text{connecteur} & = & \wedge \mid \vee \mid \Rightarrow \mid \Leftrightarrow
\end{array}
$$

Priorité des connecteurs

Pour éviter les ambiguités on fixe une priorité des connecteurs logiques $\forall$ et $\exists > \neg >$ $\vee$ et $\wedge >$ $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$

$\neg a \vee b \Rightarrow g$ signifie $((\neg a) \vee b) \Rightarrow g$

$\forall x\ b \Rightarrow g$ signifie $(\forall x\ b) \Rightarrow g$

qui est différent de $\forall x\ (b \Rightarrow g)$

Variables libres et liées

Les variables qui apparaissent dans une formule sont dites libres ou liées, selon le principe suivant :

- toutes les variables d'une formule sans quantificateur sont libres
- si x est libre dans w , x est liée dans $\forall xw$ et dans $\exists xw$

Exemple 5.1. Dans la formule

$$p(x) \vee q(y)$$

x et y sont libres.

Dans

$$\forall x(p(x) \wedge r(y, x))$$

x est liée, y est libre

Dans

$$\exists x(p(x) \vee q(x)) \wedge r(x)$$

la variable x joue deux rôles différents, elle est liée dans la partie à gauche de $\wedge$ et libre dans la partie de droite. Bien que cette formule soit syntaxiquement correcte, il est fortement déconseillé de l'écrire ainsi, mieux vaut renommer x en y dans l'une des deux parties.

Définition 5.1. Une formule dont toutes les variables sont liées est dite *formule fermée* ou proposition.

Une formule avec une ou des variables libre est dite *ouverte*. On notera $w(x, y, z)$ pour indiquer que la formule w possède x, y et z comme variables libres.

Par exemple, $w(x, z) = p(x) \wedge \exists y q(x, y, z)$ est une formule ouverte où x et z sont libres.

5.3 Sémantique

Le sens d'une formule fermée sera l'une des valeurs booléennes vrai (1) ou faux (0).

Pour pouvoir interpréter une formule il faut
- donner une valeur aux variables
- donner une valeur à chaque constante
- un moyen d'interpréter les atomes $p(t_1, \ldots, t_n)$
- un moyen d'interpréter les fonctions $f(t_1, \ldots, t_n)$
- une règle d'interprétation des formules quantifiées

Rappel

Une fonction n -aire f sur un ensemble A, notée $f : A \to A$, associe à un n-tuple de valeurs $(a_1, \ldots, a_n)$ une valeur $f(a_1, \ldots, a_n) = a \in A$

Une relation n-aire r sur un ensemble A, notée $r \in A^n$ est un ensemble de n-tuples $(a_1, \ldots, a_n)$ dont les éléments appartiennent tous à A.

Définition 5.2. Une interprétation I de W (ou structure relationnelle sur W) est la donnée de :

- un ensemble non vide D, le domaine de l'interprétation
- une fonction I qui associe
  - à chaque variable une valeur de D
  - à chaque constante une valeur de D
  - à chaque symbole de fonction à n arguments une fonction totale de D^n dans D
  - à chaque symbole de prédicat à k arguments une relation $k-$aire dans D (un sous-ensemble de D^k

Interprétation des termes

On définit une fonction d'interprétation I par

Terme	I(Terme)
constante c	$I(c)$
variable x	$I(x)$
$f(t_1, \ldots, t_n)$	$I(f)(I(t_1), \ldots, I(t_n))$

Exemple 5.2. On a une interprétation I définie par

- un domaine $D = \{0, 1, 2, 3\}$

- $I(a) = 0, I(b) = 1, I(c) = 2, I(d) = 3$
- $I(f) = \{(0,0) \mapsto 0, (0,1) \mapsto 0, (1,0) \mapsto 2, (2,3) \mapsto 2, (3,3) \mapsto 3, \cdots \mapsto 3$ pour le reste$\}$
- $I(x) = 1, I(y) = 0$

calcul de quelques interprétations de termes selon I :

- $I(a) = 0$
- $I(f(a, x)) = I(f)(0, 1) = 0$
- $I(f(x, f(y, b))) = I(f)(1, I(f)(0, 1)) = I(f)(1, 0) = 2$

Interprétation des atomes

Le principe d'interprétation des atomes consiste à évaluer les termes donnés comme paramètres au prédicat puis à voir si le n-uplet de termes obtenu fait partie de l'interprétation du prédicat.

$$I(p(t_1, \dots, t_n) = \mathbf{v}$$

si et seulement si

$$(I(t_1), \dots, I(t_n)) \in I(p)$$

La relation qui forme l'interprétation $I(p)$ du prédicat p fournit donc l'ensemble des valeurs de paramètres pour lesquels on veut que le prédicat soit vrai.

L'interprétation des atomes étant définie, on peut interpréter toutes les formules possédant des connecteurs logiques $\wedge \vee \Rightarrow \neg$ en utilisant les mêmes règles qu'en logique des propositions.

Extension aux formules avec quantificateurs

Pour interpréter les formules quantifiées on commence par introduire la notion de variante d'une interprétation. On dit qu'une interprétation J est une variante de I en x si J est partout identique à I, sauf pour la variable x.

On note $I_{x=d}$ la variante de I où $I(x) = d$ $(d \in D)$

Remarque. I est une variante de I en x (qui consiste à reprendre la même valeur pour x)

On peut alors interpréter les formules quantifiées en appliquant les deux règles suivantes :

1. Quantification universelle

$$I(\forall x \Phi) = \mathbf{v}$$

si et seulement si pour tout $d \in D$ on a

$$I_{x=d}(\Phi) = \mathbf{v}$$

autrement dit, la formule doit être vraie pour toutes les valeurs possibles de la variable x quantifiée.

2. Quantification existentielle

$$I(\exists x \Phi) = \mathbf{v}$$

si et seulement si il existe un élément $d \in D$ tel que

$$I_{x=d}(\Phi) = \mathbf{v}$$

Exemple 5.3. Soit le vocabulaire composé des symboles :

constantes $a, b, c, d, k_1, k_2, k_3, k_4$
prédicats P (unaire), E (unaire), C (unaire), I (binaire)
variables x, y, z, u, v, w

On interprète ce langage dans le domaine composé des étudiants, des cours, des personnes et des inscriptions d'une (micro) université. Le domaine est l'ensemble $D = \textsf{Personne} \cup \textsf{Etudiant} \cup \textsf{Cours}$, où

- $\textsf{Personne} = \{\text{Alice}, \text{Bob}, \text{Charles}, \text{Diane}\}$
- $\textsf{Etudiant} = \{\text{Alice}, \text{Bob}, \text{Charles}\}$
- $\textsf{Cours} = \{\text{C1122}, \text{C1101}, \text{M2001}, \text{M2002}\}$

L'interprétation des constantes est donnée par :

- $I(a) = \text{Alice}, I(b) = \text{Bob}, I(c) = \text{Charles}, I(d) = \text{Diane} I(k_1) = \text{C1122}, I(k_2) = \text{C1101}, I(k_3) = \text{M2001}, I(k_4) = \text{M2002}$

et l'interprétation des prédicats par

- $I(P) = \textsf{Personne}$, $I(E) = \textsf{Etudiant}$, $I(C) = \textsf{Cours}$
- $I(I) = \textsf{Inscription} = \{(\text{Alice}, \text{Histoire}), (\text{Bob}, \text{Chimie}), (\text{Charles}, \text{Histoire})\}$.

(La figure 5.1 résume graphiquement cette interprétation.)

Interprétons quelques formules selon I

1. $I(a) = Alice$
2. $I(C(k_3)) = \mathbf{v}$ car $I(k_3) = \textsf{M2001}$ et $\textsf{M2001} \in I(C)$.
3. $I(C(a)) = \mathbf{f}$ car $\textsf{Alice} \notin I(C)$
4. $I(I(c, k_1)) = \mathbf{v}$ car $(\textsf{Charles}, \textsf{C1122}) \in I(\text{I})$
5. $I(\exists x\ I(x, \textsf{C1101})) = \mathbf{v}$ car $I_{x=\textsf{Bob}}(I(x, \textsf{C1101})) = \mathbf{v}$.
6. $I(\forall x \exists y\ I(x, y)) = \mathbf{f}$ car $I_{x=\textsf{M2001}}(\exists y\ I(x, y)) = \mathbf{f}$ (entre autres).
7. $I(\forall x(E(x) \Rightarrow \exists y\ I(x, y))) = vrai$ car
   - $I_{x=\textsf{Alice}}(E(x) \Rightarrow \exists y\ I(x, y)) = \mathbf{v}$ (prendre $y = \text{C1122}$)

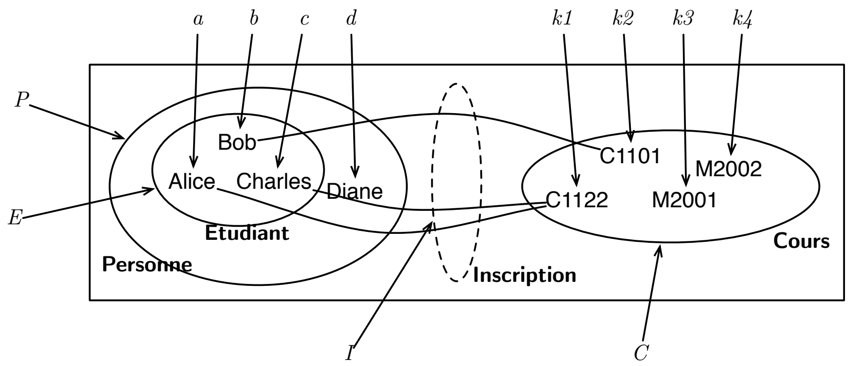

FIGURE 5.1 – Une interprétation du vocabulaire $a, b, c, d, k_1, k_2, k_3, k_4, P, E, I, C$

- $I_{x=\mathsf{Bob}}(E(x) \Rightarrow \exists y\ I(x,y)) = \mathbf{v}$ (prendre $y =$ C1101)
- $I_{x=\mathsf{Charles}}(E(x) \Rightarrow \exists y\ I(x,y)) = \mathbf{v}$ (prendre $y =$ C1122)
- et $E(x) = \mathbf{f}$, donc la formule est vraie, pour toutes les autres valeurs de x.

Lorsqu'on évalue une formule il faut faire attention aux fait que deux variables qui portent des noms différents peuvent représenter la même valeur du domaine.

Exemple 5.4. Si on considère l'interprétation J définie par

- $D = \{\mathsf{Milan}, \mathsf{Tokyo}, \mathsf{Oslo}\} \cup \mathbb{N}$
- $J(\text{ville}) = \{\mathsf{Milan}, \mathsf{Tokyo}, \mathsf{Oslo}\}$
- $J(\text{distance}) = \{(\mathsf{Milan}, \mathsf{Tokyo}, 9710), (\mathsf{Milan}, \mathsf{Oslo}, 1608), (\mathsf{Oslo}, \mathsf{Tokyo}, 8401)\}$

La formule

$$\forall x \forall y (\text{ville}(x) \wedge \text{ville}(y) \Rightarrow \exists z\ (\text{distance}(x,y,z) \vee \text{distance}(y,x,z))$$

représente le fait qu'entre deux villes il y a toujours une distance (z). Cependant elle est fausse dans l'interprétation J car les variables x et y peuvent représenter la même ville. Pour rendre la formule vraie il faudrait ajouter à l'interprétation de distance : $(\mathsf{Milan}, \mathsf{Milan}, 0), (\mathsf{Tokyo}, \mathsf{Tokyo}, 0), (\mathsf{Oslo}, \mathsf{Oslo}, 0)$.

Propriétés des formules fermées

Les formules fermées représentant des propositions, on peut reprendre telles qu'elles les définitions de *satisfiabilité*, *modèle*, *équivalence* et *conséquence logique* de la logique des propositions.

Définition 5.3. Étant donné une interprétation I est une formule fermée f, on note $I \models A$ le fait que $I(A) = \mathbf{v}$ et $I \not\models A$ le fait que $I(A) = \mathbf{f}$. Une formule fermée f et *satisfiable* s'il existe une interprétation I telle que $I \models A$, on dit alors que I est un *modèle* de A. Dans le cas contraire on dit que A est *inconsistante*. Une formule A est *valide* si $I \models A$ pour toute interprétation , on note $\models A$.

Exemple 5.5. L'ensemble de formule

$$F = \{p(a, b), \neg\exists y\, p(a, y)\}$$

est inconsistant car pour avoir $I(p(a, b)) = \mathbf{v}$ il faut nécessairement que $(I(a), I(b)) \in I(p)$. Mais alors $I(\neg\exists y\, p(a, y)) = \mathbf{f}$. Les deux formules ne peuvent jamais être vraies simultanément. La formule

$$(\forall x\, P(x)) \vee (\exists y\, \neg P(y))$$

est valide. Si l'interprétation $I(P)$ contient tous les éléments du domaine D la partie gauche de la formule est vraie, si ce n'est pas le cas, c'est la partie droite qui est vraie.

5.4 Déduction

Les règles de déduction naturelle pour la logique des propositions restent valables. Pour obtenir un système complet il faut leur adjoindre des règles spécifique aux formules quantifiées :

Elimination du quantificateur universel

SI $F(x)$ est une formule où x est libre et t est un terme qui ne contient aucune variable liée de F, on peut remplacer x dans $\forall x\, F(x)$ par t pour obtenir $F(t)$

1. $\forall x\, F(x)$
2. $F(t)$

Exemple :
de $\forall x(x + 1 > x)$ on peut déduire $3 + 1 > 3$.

Introduction de $\forall$

Si on a pu déduire une formule $F(x)$ où x est libre alors on peut déduire $\forall x\, F(x)$

1. $F(x)$
2. $\forall x\, F(x)$

En général la variable x est introduite dans une hypothèse.

Introduction de $\exists$

Si on a déduit une formule $F(t)$ qui contient un terme t (p.ex. une constante) on peut en déduire qu'il existe un x qui satisfait $F(x)$

1. $F(t)$
2. $\exists x\ F(x)$

Exemple

1. $0.5^2 < 0.5$
2. $\exists x(x^2 < x)$

Suppression de $\exists$

À partir de $\exists x\ F(x)$ on peut formuler une hypothèse $F(y)$ puis faire des déductions avec elle.

1. $\exists x\ F(x)$ (hypothèse)
2. $\quad F(y)$ ("y" variable nouvelle)
3. $\quad R$ (déduction à partir de 2)
4. R (élimination de "il existe" dans 1 et 3)

Exemple de déduction

$$
\begin{array}{l}
\left|\begin{array}{l}
[\forall x\ A(x)] \\
A \\
\quad \left|\begin{array}{ll}
[\exists y\ \neg A(y)] & \text{hypothèse} \\
\quad \left|\begin{array}{ll}
[\neg A(t)] & \\
A(t) & \text{importation et introduction de } \forall \\
\bot &
\end{array}\right. & \\
\bot & \text{élimination } \exists
\end{array}\right. \\
\quad \neg(\exists y\ \neg A(y)) \qquad \text{absurde}
\end{array}\right. \\
\forall x\ A(x) \Rightarrow \neg(\exists y\ \neg A(y))
\end{array}
$$

5.5 Normalisation et Résolution

L'application de règles d'inférence telles que le principe de résolution exige la mise en forme normale des formules. Dans le cas de la logique des prédicats cette mise en forme se fait en quatre étapes :

1. Mise en forme prenex (déplacement de tous les quantificateurs au début de la formule)
2. Skolemisation (suppression des $\exists$)

3. Mise en forme normale conjonctive
4. Mise en forme clausale (suppression des $\forall$)

Forme prenex

Une formule est dite en forme *prenex* si tous ses quantificateurs apparaissent au début. Il est toujours possible de transformer une formule en une formule équivalente sous forme prenex. Pour cela on applique autant de fois que nécessaire les équivalences

$$\neg\forall x\ w \equiv \exists x\ \neg w$$

$$\neg\exists x\ w \equiv \forall x\ \neg w$$

$$(\forall x\ w_1) \wedge w_2 \equiv \forall x(w_1 \wedge w_2) \text{ si } x \text{ n'apparait pas dans } w_2$$

$$(\forall x\ w_1) \vee w_2 \equiv \forall x(w_1 \vee w_2) \text{ si } x \text{ n'apparait pas dans } w_2$$

Exemple 5.6. La mise en forme prenex préserve les quantificateurs

$\forall x \forall y(E(x, y) \Rightarrow \exists z\, A(x, z))$
$\equiv \forall x \forall y(\neg E(x, y) \vee \exists z\, A(x, z))$
$\equiv \forall x \forall y \exists z(\neg E(x, y) \vee A(x, z))$
$\equiv \forall x \forall y \exists z(E(x, y) \Rightarrow A(x, z))$

Exemple 5.7. La mise en forme prenex modifie les quantificateurs

$\forall x((\exists y(A(x, y)) \Rightarrow B(x))$
$\equiv \forall x(\neg(\exists y(A(x, y)) \vee B(x))$
$\equiv \forall x((\forall y \neg A(x, y)) \vee B(x))$
$\equiv \forall x(\forall y(\neg A(x, y) \vee B(x)))$
$\equiv \forall x \forall y(A(x, y) \Rightarrow B(x))$

Skolemisation

Le but de cette opération est de supprimer les quantificateurs $\exists$. L'idée de la skolémisation provient de l'observation suivante : lorsque on a une formule du type

$$\forall x \exists y\ p(x, y) \tag{5.1}$$

cela signifie que pour chaque x on peut trouver au moins un y tel que $p(x, y)$. Donc on peut définir une fonction $f(x)$ qui nous fournit une valeur $y = f(x)$ telle que $p(x, y)$ est vraie. Ceci qui nous permet de réécrire la formule 5.1 comme

$$\forall x\, p(x, f(x))$$

S'il y a plusieurs quantificateurs universels, la fonction dépend de toutes les variables qui viennent avant y dans la formule.

Exemple 5.8. Skolemisation

1. $A_1 = \forall x \forall y \exists z (E(x, y) \Rightarrow A(x, z))$.

$$sk(A_1) = \forall x \forall y (E(x, y) \Rightarrow A(x, f(x, y))).$$

2. $A_2 = \forall x \exists u \forall y \exists z (P(x, u) \Rightarrow (Q(u, y) \wedge R(y, z)))$.

$$sk(A_2) = \forall x \forall y (P(x, f(x)) \Rightarrow (Q(f(x), y) \wedge R(y, g(x, y)))).$$

La skolemisation ne conserve pas le sens des formules. En général $sk(A)$ n'est pas équivalente à A, mais

Théorème 5.1. *A est satisfiable si et seulement si $sk(A)$ l'est.*

Par conséquent, pour démontrer que

$$\{f_1, \ldots, f_n\} \models g$$

on peut démontrer (par exemple avec le principe de résolution) que

$$\{sk(f_1), \ldots, sk(f_n), sk(\neg g)\}$$

est inconsistant.

Forme clausale

Un fois que la formule a été skolémisée il ne reste que des variables quantifiées universellement. On peut donc se passer de l'écriture explicite des quantificateurs. La formule restante est composée d'atomes et de connecteurs logiques. On peut alors appliquer la même technique qu'en logique propositionnelle pour la mettre en forme normale conjonctive, puis sous forme d'un ensemble de clauses.

Exemple 5.9. Si on repart de la formule skolémisée

$$sk(A_2) = \forall x \forall y (P(x, f(x)) \Rightarrow (Q(f(x), y) \wedge R(y, g(x, y))))$$

, l'élimination des quantificateurs universels donne

$$P(x, f(x)) \Rightarrow (Q(f(x), y) \wedge R(y, g(x, y)))$$

. En appliquant la transformation $\Rightarrow -\vee$ on obtient

$$\neg P(x, f(x)) \vee (Q(f(x), y) \wedge R(y, g(x, y)))$$

. Puis par distributivité

$$(\neg P(x, f(x)) \vee Q(f(x), y)) \wedge (\neg P(x, f(x)) \vee R(y, g(x, y)))$$

et donc deux clauses :

1. $\neg P(x, f(x)) \vee Q(f(x), y))$
2. $\neg P(x, f(x)) \vee R(y, g(x, y))$

Application du principe de résolution en logique des prédicats

On se rappel que la règle de résolution en logique propositionnelle stipule qu'étant donné deux clauses

$$C_1 = L_1 \vee \ldots \vee L_i \vee \ldots \vee L_m$$

et

$$C_2 = M_1 \vee \ldots \vee M_j \vee \ldots \vee M_n$$

où $L_i = p$ et $M_j = \neg p$.
Le *résolvant* de C_1 et C_2 sur L_i et M_j est la clause

$$C_R = L_1 \vee \ldots \vee L_{i-1} \vee L_{i+1} \vee \ldots \vee L_m \vee M_1 \vee \ldots \vee M_{j-1} \vee M_{j+1} \vee \ldots \vee M_n$$

Dans le cas de la logique des prédicats, on peut effectuer la résolution sur deux littéraux $P(t_1, \ldots, t_n)$ et $\neg P(u_1, \ldots, u_n)$ non seulement s'ils sont égaux mais également si les t_i et u_i *unifiables.*

Définition 5.4. Deux formules atomiques sont unifiables s'il existe une substitution des *variables* par des termes qui rend les deux formules identique.

Par exemple, les formules atomiques $P(x, a, y)$ et $P(c, a, z)$, où a et c sont des constantes, sont unifiables par la substitution $x \to c, y \to z$.

Par contre $P(x, a, y)$ et $P(c, b, z)$ ne sont pas unifiables car les constantes a et b ne peuvent être unifiées (on ne peut remplacer une constante par une autre).

Exemple 5.10. Résolution avec unification

$$C_1 = \neg P(x) \vee \neg Q(y) \vee R(x, y)$$

$$C_2 = Q(a)$$

$$C_3 = P(b)$$

$y \to a$ sur C_1 permet la résolution avec C_2 :

$$C_R = \neg P(x) \vee R(x, a)$$

$x \to b$ sur C_R, résolution avec C_3 :

$$C_S = R(b, a)$$

Comme en logique des propositions, on emploie généralement la résolution pour faire des preuves par réfutation.

Exemple 5.11. On veut montrer que les trois formules

$f_1 = \forall x\ ((S(x) \vee T(x)) \Rightarrow P(x))$, $f_2 = \forall x\ (S(x) \vee R(x))$, $f_3 = \neg R(a)$
ont pour conséquence la formule $P(a)$.
Passage en forme clausale :

$$f_1 \equiv (\forall x\ (S(x) \Rightarrow P(x)) \wedge (\forall x\ (T(x) \Rightarrow P(x))$$

et produit donc les deux clauses

$$C_1 = \neg S(x) \vee P(x)$$

$$C_2 = \neg T(x) \vee P(x)$$

$$f_2 \equiv C_3 = S(x) \vee R(x)$$

$$f_3 \equiv C_4 = \neg R(a)$$

.

La négation de la conséquence cherchée donne

$$C_5 = \neg P(a)$$

Par résolution sur R de C_3 et C_4 avec $x \to a$ on produit

$$C_6 = S(a)$$

Par résolution sur S de C_1 et C_6 on produit

$$C_7 = P(a)$$

Enfin C_5 et C_7 donnent la clause vide. On a donc prouvé la conséquence logique.