

Notions de raisonnement

I. Logique	2
1. Assertions	2
2. Connecteurs	3
a) Connecteurs élémentaires <i>non</i> , <i>ou</i>	3
b) Première construction : le connecteur <i>et</i>	4
c) Premières négations	4
d) Autres constructions : les connecteurs $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$	5
e) Règles élémentaires	7
f) Négation de l'implication	8
3. Notion de théorie mathématique	9
a) Axiomes, propositions, théorèmes	9
b) Grands types de démonstrations	10
4. <i>Résumé rapide de la partie I.</i>	11
II. Théorie des ensembles	12
1. Ensembles, éléments, appartenance	12
2. Prédicats et quantificateurs	13
a) Prédicats	13
b) Quantificateurs	13
c) Négation d'une assertion commençant par un quantificateur	14
d) Prédicats à plusieurs variables – Succession de quantificateurs	15
e) De la bonne utilisation des symboles	16
3. <i>Résumé rapide du début de la partie II.</i>	17
4. Parties d'un ensemble	17
a) Égalité d'ensembles – Inclusion	17
b) Ensemble des parties d'un ensemble	19
c) Sous-ensembles et prédicats	20
d) Réunion – Intersection – Complémentaire	20
e) Règles de calcul sur les parties d'un ensemble	21
5. Premières démonstrations	22
6. Couple, produit cartésien	27
a) Produit cartésien de deux ensembles	27
b) Généralisation	28

III. Méthodes pratiques de recherche	29
1. Premiers exemples de traduction	30
2. Comment engager une recherche	31
3. Méthode “Conclusion peau de chagrin”	33
4. Autres exemples de réduction de conclusion	35
5. Angoisse “démonstration ou contre-exemple ?”	36
6. Quelques exercices pour mettre en application	37
7. Curseur de conclusion (peut se garder pour une lecture ultérieure)	38
8. Exemple d’un énoncé ouvert	41
IV. Conclusion	42
V. Solutions des exercices	44

Notions de raisonnement

Introduction

L'activité mathématique se développe suivant trois axes principaux :

- La *construction* d'objets mathématiques, qui peuvent être des nombres, des figures géométriques, des fonctions, ..., objets servant souvent de modèles pour étudier les phénomènes physiques, chimiques, biologiques, etc.
- La *recherche de propriétés* ou *assertions* sur les objets précédents : ce sont des conjectures qui peuvent être élaborées à partir de cas particuliers, par observation de dessins ou encore par utilisation de moyens informatiques.
- La *démonstration* de certaines propriétés énoncées précédemment. Une fois démontrées, ces assertions prennent le nom de théorèmes, propositions, lemmes, corollaires, etc.

Outre l'introduction, cet exposé comporte trois parties :

- La partie I. est une présentation des règles permettant de combiner les assertions à l'aide des connecteurs *non*, *ou*, *et*, $\Rightarrow$, ... et de déterminer si ce que l'on obtient est vrai ou faux.
- La partie II. introduit les notions d'ensembles et d'éléments ainsi que les quantificateurs et leurs règles d'utilisation.
- La partie III. vous donne des méthodes vous permettant d'engager de nombreuses démonstrations en étant sûr de ce que vous faites.

Bien que n'étant pas explicitement au programme, la connaissance des éléments de ce chapitre est indispensable pour vous permettre non seulement d'avoir une bonne maîtrise des méthodes de démonstration mais aussi d'être sûr d'avoir effectivement réalisé le travail nécessaire à la résolution d'une question que l'on vous pose.

- *Toutefois, ces notions, qui peuvent paraître ardues en première lecture, pourront n'être acquises en détail que progressivement et ce chapitre devra en conséquence être relu et assimilé régulièrement, à la lumière de vos futures activités.*
- J'ai inclus dans cet exposé deux résumés (pages 11 et 17) vous permettant d'avoir une vue d'ensemble (très) simplifiée ce qui les précède : chacun contient le minimum vital de ce qu'il faut en connaître et vous pourrez vous y référer lorsque vous aurez l'impression de perdre de pied dans l'exposé qui le précède ; en revanche il serait illusoire, et de peu d'efficacité à terme, de se limiter à apprendre par cœur ces deux résumés sans essayer d'en comprendre le pourquoi grâce aux explications détaillées.
- Cet exposé est truffé d'exercices d'application dont les réponses sont fournies dans les dernières pages. La recherche et la résolution de la plupart de ces exercices est indispensable et doit aller de pair avec l'étude des parties correspondantes.
 - * D'une part, cela vous permettra de mesurer votre degré de compréhension et d'assimilation des notions introduites.

- * D'autre part, vous trouverez dans les solutions bon nombres de remarques ou d'allusions permettant de préciser ou de commenter certains points mais qui auraient surchargé l'exposé initial.
- * En revanche il serait de peu d'efficacité de vous ruer sur la solution des exercices sans avoir cherché un minimum, même si la recherche est une démarche à laquelle vous n'êtes pour la plupart pas habitués en sortant de Terminale.
- * Vous trouverez aussi d'autre exercices, marqués "*appofondissement*", que vous pourrez garder pour une troisième voire quatrième lecture.

Remarque importante : *Comme vous pouvez vous en rendre compte cet exposé fourmille de conseils de lecture et de travail qui sortent du domaine purement mathématique mais que vous ne devez absolument pas négliger !*

I. Logique

1. Assertions

Dans le cadre de ce chapitre nous considérerons la notion d'*assertion* (ou encore *relation*) comme une notion première, qui ne pourra donc pas être définie rigoureusement : il faut bien partir de quelque chose !

- Intuitivement, une assertion est un *assemblage* de termes mathématiques dont la construction obéit à une certaine syntaxe et auquel on peut donner un sens.
- On admet aussi qu'une telle assertion est soit vraie soit fausse et que l'on peut donc lui attribuer ce que l'on appelle une valeur de vérité : V (vrai) ou F (faux).

Exemples :

1. "2 est un entier impair" est une assertion (fausse).
2. " $(1000 + 1)^2 = 1000^2 + 2000 + 1$ " est une assertion (vraie).
3. " $1 = 2 +$ " n'est pas une assertion ; un analyseur syntaxique comme celui de Maple ou de votre calculatrice retournerait alors un message de type "syntax error".

Remarques : Comme vous pouvez le voir dans les exemples ci-dessus,

- une assertion ne met en jeu que des objets et ne contient donc aucune variable. Un énoncé utilisant une (ou plusieurs) variable est appelé prédicat ; nous en reparlerons dans la partie II. ;
- on se permettra, dans les exemples de cet exposé, d'utiliser des objets ou des notions qui à ce stade d'un cours de logique n'ont évidemment pas encore été définis mais que vous avez déjà rencontrés dans les classes antérieures. Cela est indispensable pour *illustrer* (ce qui est essentiel) les notions rencontrées en montrant comment elles trouveront naturellement place dans la suite de votre parcours mathématique.

Le but de la suite de cette section est de donner une idée de ce que l'on appelle le calcul propositionnel qui permet à l'aide de règles simples de composer des assertions et de savoir assez facilement si une assertion composée est vraie ou fausse en fonction des valeurs de vérité des assertions qui la composent.

Définition 1

Deux assertions qui ont même valeur de vérité sont dites (logiquement) équivalentes.

On admet que, si P et Q sont deux assertions logiquement équivalentes, toute occurrence de l'une dans une assertion composée R pourra être remplacée par l'autre sans modifier la valeur de vérité de l'assertion R .

2. Connecteurs

Dans cette partie nous allons montrer comment on peut, à partir d'assertions, en fabriquer de nouvelles à l'aide de connecteurs logiques.

a) Connecteurs élémentaires *non*, *ou*

- Le connecteur *non* est défini par la règle suivante :
si P est une assertion alors $\text{non } P$ est une assertion dont la table des valeurs de vérité, où l'on définit les valeurs de $\text{non } P$ en fonction de celles de P , est donnée ci-contre.

P	$\text{non } P$
V	F
F	V

- Le connecteur *ou* est défini par la règle suivante :
si P et Q sont deux assertions alors $P \text{ ou } Q$ est une assertion dont la table des valeurs de vérité, où l'on définit les valeurs de $P \text{ ou } Q$ en fonction de celles des assertions P et Q , est donnée ci-contre.

P	Q	$P \text{ ou } Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

En fait les deux définitions précédentes n'exigent pas un gros effort de mémoire pour être assimilées dans la mesure où elles correspondent à l'utilisation usuelle du “*non*” et du “*ou*” mais en la précisant et en la codifiant.

Par exemple dans le cas du connecteur *ou* :

- on voit que $P \text{ ou } Q$ est vraie dès que l'une au moins des deux assertions est vraie, ce qui correspond bien au sens commun ;
- en revanche cela permet de lever toute ambiguïté alors que, dans le langage courant, le “*ou*” peut être utilisé avec des sens différents, comme par exemple :
 - ou* exclusif ex : fromage *ou* dessert,
 - ou* mathématique ex : s'il pleut *ou* s'il fait du vent, je ne sors pas,
 - ou* conditionnel ex : mange ta soupe *ou* tu seras puni(e).

Une telle multiplicité de significations est évidemment impensable lorsque l'on fait des mathématiques !

Remarque : Pour toute assertion P , on peut vérifier avec une table de vérité que les deux assertions P et $\text{non}(\text{non } P)$ sont logiquement équivalentes.

b) Première construction : le connecteur *et***Définition 2**

P et Q étant deux assertions, on définit l'assertion $P \text{ et } Q$ comme l'abréviation de

$$\text{non}((\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q)).$$

On peut alors construire la table de vérité de $P \text{ et } Q$ qui permet de connaître ses valeurs de vérité en fonction de celles des assertions P et de Q .

P	Q	$\text{non } P$	$\text{non } Q$	$(\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q)$	$P \text{ et } Q$
V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	V	F
F	F	V	V	V	F

On voit donc que cette table de vérité correspond bien au sens commun : l'assertion $P \text{ et } Q$ est vraie lorsque les deux assertions P et Q sont simultanément vraies, et uniquement dans ce cas. Toutefois il est plus efficace de dire que $P \text{ et } Q$ est vraie plutôt que d'énoncer toute la phrase précédente.

c) Premières négations

Il arrive souvent en mathématiques d'avoir à nier une assertion, et vous avez certainement déjà dû faire une démonstration par l'absurde où, pour démontrer une propriété P , vous avez supposé que $\text{non } P$ est vraie (nous en reparlerons dans la suite).

Proposition 1

Si P et Q sont deux assertions,

- l'assertion $\text{non}(P \text{ et } Q)$ et l'assertion $(\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q)$ sont équivalentes ;
- l'assertion $\text{non}(P \text{ ou } Q)$ et l'assertion $(\text{non } P) \text{ et } (\text{non } Q)$ sont équivalentes.

Exercice 1 : Démonstration du premier point de la proposition précédente. Compléter le tableau suivant et construire les tables de vérité de l'assertion $P \text{ et } Q$ et de l'assertion $(\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q)$ afin de vérifier que ces assertions ont même valeurs de vérité.

P	Q	$P \text{ et } Q$	$\text{non } P$	$\text{non } Q$	$(\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q)$
V	V		F		
V	F		F		
F	V		V		
F	F		V		

Exercice 2 : Démontrer le second point de la proposition précédente à l'aide de tables de vérité.

Exercice 3 : Donner d'autres démonstrations des deux points de la proposition précédente en utilisant la définition du connecteur *et* ainsi que la possibilité de remplacer toute assertion par une assertion logiquement équivalente.

Exercice 4 : Soit A , B et C trois points du plan formant un triangle $\mathcal{T}$ non aplati.

1. Écrire une assertion exprimant que $\mathcal{T}$ est un triangle équilatéral.
(attention, syntaxiquement le symbole “=” ne peut relier que deux quantités)
2. En déduire une assertion exprimant que $\mathcal{T}$ n’est pas équilatéral.

Remarques de langage :

- Comme l’assertion $\text{non}(P \text{ et } Q)$ et l’assertion $(\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q)$ sont logiquement équivalentes, on peut remplacer l’une par l’autre dans toute assertion composée ; par suite on dira alors plus rapidement que la négation de $P \text{ et } Q$ est $(\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q)$.
- On dira de même que la négation de $P \text{ ou } Q$ est $(\text{non } P) \text{ et } (\text{non } Q)$.

d) **Autres constructions : les connecteurs $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$**

Définition 3 (Définition de l’implication)

P et Q étant deux assertions, on définit l’assertion $P \Rightarrow Q$ comme l’abréviation de
 $(\text{non } P) \text{ ou } Q$.

Le connecteur “ $\Rightarrow$ ” est appelé *implication* et $P \Rightarrow Q$ se lit “ P implique Q ”

Exercice 5 : Construire sur les modèles précédents la table de vérité de $P \Rightarrow Q$.

Remarques :

- Comme on peut le voir, soit grâce à la définition, soit par la table de vérité précédente,

l’assertion $P \Rightarrow Q$ est vraie dès que l’assertion P est fausse.

Ainsi l’assertion $P \Rightarrow Q$ peut donc être vraie même lorsque Q est fausse.

- Par exemple, l’assertion “ $(2 = 3) \Rightarrow (1 = 4)$ ” est vraie. Cela peut paraître bizarre à première vue, surtout si on a la mauvaise habitude d’utiliser ce symbole “ $\Rightarrow$ ” comme une abréviation sténographique permettant d’éviter d’écrire quelques mots de rédaction. *Il est maintenant évident qu’une telle pratique est à proscrire et que l’utilisation du symbole “ $\Rightarrow$ ” doit impérativement être réservée aux assertions mathématiques.*
- On voit de même, si P est vraie et si $P \Rightarrow Q$ est vraie, alors Q est vraie.

- Par suite le sens mathématique (précis) que l’on vient de donner à ce connecteur correspond tout à fait à celui du groupement “si ... alors” de la vie courante.

Imaginons quelqu’un disant “s’il pleut alors je ne sors pas”.

- * Dans le cas où il énonce une vérité alors
 - ★ s’il pleut on ne doit pas le voir dehors ;
 - ★ mais on n’est pas sûr que la pluie soit en train de tomber ; et, s’il ne pleut pas, on peut le voir dehors ou pas.

- * Toutefois il faut aussi prendre garde : lorsque qu'un locuteur énonce cette phrase ou qu'on la voit écrite dans un journal ou sur l'internet, rien ne dit que ce soit la vérité. Il en est de même en mathématiques : *ce n'est pas parce que l'on écrit une assertion qu'elle est vraie* :
 - ★ vous en avez vu un cas dans les premiers exemples, page 2 ;
 - ★ on écrit une assertion fausse (et c'est indispensable) à chaque fois que l'on fait une démonstration par l'absurde.

Exercice 6 : Préciser comment la définition du connecteur " $\Rightarrow$ " permet de justifier que

- si P est fausse alors $P \Rightarrow Q$ est vraie ;
- si P est vraie et si $P \Rightarrow Q$ est vraie, alors Q est vraie.

Condition nécessaire – Condition suffisante : Lorsque l'assertion $P \Rightarrow Q$ est vraie,

- on dit aussi que " Q est une condition nécessaire de P " ou on dit encore que "pour que P soit vraie il faut que Q soit vraie" ;
- mais on dit aussi que " P est une condition suffisante de Q " ou on dit encore que "pour que Q soit vraie il suffit que P soit vraie".

Méthode : Par définition de l'implication, on a donc les deux règles suivantes.

- Dans le cas où $P \Rightarrow Q$ est supposée vraie (hypothèse) :
 - * si on sait que P est vraie alors on peut en déduire que Q est vraie ;
 - * si on n'a aucune information sur P alors on ne peut rien déduire sur Q .
- Dans le cas où l'on veut justifier que $P \Rightarrow Q$ est vraie (conclusion) :
 - * si P est faux il n'y a rien à faire ;
 - * si P est vrai alors on est dans l'obligation de prouver que Q est vraie.

Par suite la méthode que vous avez utilisée jusqu'à présent pour prouver une implication du type $P \Rightarrow Q$, qui consiste à supposer P vraie puis à en déduire que Q est vraie, est totalement licite et reste tout à fait d'actualité. Ouf !

Définition 4 (Définition de l'équivalence)

P et Q étant deux assertions, on définit l'assertion $P \Leftrightarrow Q$ comme l'abréviation de
 $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$.

Le connecteur " $\Leftrightarrow$ " est appelé *équivalence* et $P \Leftrightarrow Q$ se lit " P équivaut à Q ".

Exercice 7 : Construire sur les modèles précédents la table de vérité de $P \Leftrightarrow Q$.

Remarques :

- Comme on peut le voir dans la table de vérité précédente, l'assertion $P \Leftrightarrow Q$ est donc vraie si, et seulement si, les assertions P et Q ont même la valeur de vérité : toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses. C'est pourquoi on pourra remplacer " P et Q sont (logiquement) équivalentes" par : " $P \Leftrightarrow Q$ est vraie".
- Lorsque l'assertion $P \Leftrightarrow Q$ est vraie, on dit aussi que " P est une condition nécessaire et suffisante de Q " ou encore que " P est vraie si, et seulement si, Q est vraie".

Méthode : L'équivalence $P \Leftrightarrow Q$ étant la connexion par *et* de l'implication $P \Rightarrow Q$ et de l'implication $Q \Rightarrow P$,

- si on sait que $P \Leftrightarrow Q$ est vraie (hypothèse) alors on sait que l'implication $P \Rightarrow Q$ et l'implication $Q \Rightarrow P$ sont vraies.
- pour justifier que $P \Leftrightarrow Q$ est vraie (conclusion) alors on a besoin de prouver que l'implication $P \Rightarrow Q$ et l'implication $Q \Rightarrow P$ sont vraies.

e) Règles élémentaires

Si P et Q sont deux assertions, les tables de vérités données précédemment permettent de vérifier immédiatement que les assertions suivantes sont vraies.

- | | |
|---|---|
| Ⓐ $\text{non}(\text{non } P) \Leftrightarrow P$ | Ⓑ $P \text{ ou } (\text{non } P)$ |
| Ⓒ $(P \text{ et } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ et } P)$ | Ⓓ $(P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ ou } P)$ |
| Ⓔ $(P \text{ et } Q) \Rightarrow P$ | Ⓕ $P \Rightarrow (P \text{ ou } Q)$ |

Remarque : On se réfère souvent à la relation Ⓒ (resp. à la relation Ⓓ) en parlant de la commutativité du connecteur *et* (resp. du connecteur *ou*).

Remarque :

- Par négation de la relation Ⓑ, on déduit que $P \text{ et } (\text{non } P)$ est fausse.
- La relation Ⓕ peut aussi s'écrire : $P \Rightarrow P$ est vraie.

Exercice 8 : Soit P , Q et R trois assertions.

1. À l'aide de tables de vérités (utilisant combien de lignes?) montrer que

$$(P \text{ ou } Q) \text{ ou } R \Leftrightarrow P \text{ ou } (Q \text{ ou } R).$$
2. En déduire, sans utiliser de table de vérité, que

$$(P \text{ et } Q) \text{ et } R \Leftrightarrow P \text{ et } (Q \text{ et } R).$$

Exercice 9 : Si P , Q et R sont trois assertions que pensez-vous de l'assemblage : $P \text{ ou } Q \text{ ou } R$?

Exercice 10 : (*nécessite d'avoir traité les deux précédents*)

Soit A , B et C trois points du plan formant un triangle $\mathcal{T}$ non aplati.

1. Exprimer que $\mathcal{T}$ est un triangle isocèle.
2. Comment peut-on alors exprimer que $\mathcal{T}$ n'est pas isocèle ?

Exercice 11 : Soit P , Q et R trois assertions.

1. Montrer que $(P \text{ et } (Q \text{ ou } R)) \Leftrightarrow ((P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)).$
2. En déduire $(P \text{ ou } (Q \text{ et } R)) \Leftrightarrow ((P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)).$

Exercice 12 : Soit P , Q et R trois assertions quelconques.

1. Les assertions $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$ et $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ sont-elles équivalentes ?
2. Que pensez-vous de l'assertion $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$?

f) Négation de l'implication

Soit P et Q deux assertions.

Proposition 2

La négation de l'assertion $P \Rightarrow Q$ est l'assertion P et non Q .

Exercice 13 : Démontrer le résultat précédent.

Définition 5

L'assertion $(\text{non } Q) \Rightarrow (\text{non } P)$ est appelée la contraposée de l'assertion $P \Rightarrow Q$.

Proposition 3

L'assertion $P \Rightarrow Q$ est logiquement équivalente à sa contraposée.

Exercice 14 : Démontrer le résultat de cette dernière proposition.

Attention : Ne pas confondre

- la négation de $P \Rightarrow Q$ qui s'écrit encore P et $(\text{non } Q)$,
- la contraposée de $P \Rightarrow Q$ qui est $(\text{non } Q) \Rightarrow (\text{non } P)$,
- l'implication réciproque de $P \Rightarrow Q$ qui est $Q \Rightarrow P$.

Remarques :

- Le résultat de la proposition 2 est essentiel pour la suite et justifierait à lui seul les diverses notions introduites depuis le début de ce chapitre.
- Toutefois son assimilation ne demande pas un gros effort de mémoire dans la mesure où cela correspond à la négation du groupement “si ... alors” de la vie courante. Reprenons l'exemple de la phrase “s'il pleut alors je ne sors pas” que l'on peut schématiser sous la forme :

$$P \Rightarrow Q \quad \text{avec} \quad \begin{cases} P & \text{il pleut} \\ Q & \text{je ne sors pas} \end{cases}.$$

Sa négation est P et non Q c'est-à-dire : il pleut et je sors.

- Avec les notations du point précédent, la contraposée de l'assertion $P \Rightarrow Q$ est $\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P$ c'est-à-dire : si je sors alors il ne pleut pas.

Les tables de vérité nous ont beaucoup servi dans le début de cette section, mais leur rôle est maintenant terminé ; nous n'en reparlerons quasiment plus dans la suite, et vous n'en aurez absolument plus besoin en dehors de ce chapitre.

3. Notion de théorie mathématique

a) Axiomes, propositions, théorèmes

Une théorie mathématique se compose d'un certain nombre d'énoncés (assertions, relations) parmi lesquels on veut déterminer ceux qui sont vrais et ceux qui sont faux.

- Dans la plupart des cas on choisit un certain nombre d'énoncés que l'on pose comme vrais *a priori* : on les appelle axiomes (ou postulats) de la théorie.
- On appelle alors théorème (proposition, lemme ou corollaire) toute assertion Q pour laquelle il existe une assertion P vraie dans cette théorie telle que l'implication $P \Rightarrow Q$ soit vraie.

Exemple : Dans ses *Éléments*, écrits vers -300 , Euclide a cherché à modéliser la géométrie du plan, c'est-à-dire à justifier rigoureusement des propriétés qui apparaissaient sur les figures qu'il pouvait dessiner.

- Pour cela il a posé un certain nombre (minimum) d'axiomes, correspondant aux propriétés qu'il considérait comme évidentes et/ou non discutables.
- Ensuite, à partir de là, il a *démontré* les théorèmes usuels de la géométrie du plan prouvant ainsi que les propriétés trouvées sur les dessins qu'il réalisait n'étaient pas le fruit du hasard ou de cas particuliers.

Le lecteur pourra se référer au site *Chronomath* pour voir une très agréable présentation de sa démarche ainsi qu'une présentation des géométries non euclidiennes construites à la suite de vaines démarches pour infirmer ou confirmer l'utilité de certains des axiomes d'Euclide. (Faire une recherche à l'aide des mots clés : Chronomath, Euclide, non euclidienne).

Conventions de langage : Si P est une assertion d'une théorie mathématique

on écrit	pour signifier
Supposons $P \dots$	Supposons que P soit vraie $\dots$
$\dots$ donc P	$\dots$ donc P est vraie

b) Grands types de démonstrations

Pour établir un résultat vous pourrez utiliser les quatre méthodes suivantes, que vous avez déjà dû rencontrer dans les démonstrations que vous avez étudiées.

Dans la suite P , Q et R sont des assertions quelconques.

- La définition même d'une assertion vraie dans une théorie fournit la première méthode de démonstration : *par transitivité*. Quand on sait que P est vraie et que les implications $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow R$ sont vraies, alors on en déduit que R est vraie.
- On utilise aussi souvent un raisonnement par *disjonction des cas* : quand on sait que l'assertion P ou Q est vraie, et que
 - * en supposant que P est vraie on sait prouver que R est vraie,
 - * en supposant que Q est vraie on sait prouver que R est vraie,
 alors on peut en déduire que R est vraie.
- Pour prouver une implication du type $P \Rightarrow Q$, il peut être intéressant prouver sa *contraposée*, l'implication $\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P$, puisque l'on a vu que les implications $P \Rightarrow Q$ et $\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P$ sont équivalentes.
Cela n'est évidemment pertinent que si cette contraposée est plus facile à prouver !
- On peut prouver une assertion P en faisant un *raisonnement par l'absurde* : si en supposant que $\text{non } P$ est vraie on peut exhiber une assertion Q telle que Q ainsi que $\text{non } Q$ soient vraies, alors on en déduit que P est vraie.

Exercice 15 : (*approfondissement*) À l'aide d'une table de vérité, montrer :

$$((P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \Rightarrow R) \text{ et } (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow R.$$

En déduire une justification rigoureuse du raisonnement par disjonction des cas.

Exercice 16 : (*approfondissement*) À l'aide d'une table de vérité, montrer :

$$\left(((\text{non } P) \Rightarrow Q) \text{ et } ((\text{non } P) \Rightarrow (\text{non } Q)) \right) \Rightarrow P.$$

En déduire une justification rigoureuse du raisonnement par l'absurde.

Exercice 17 : (*Pour comprendre certaines interdictions*) Comment peut-on écrire correctement ce que l'on rencontre trop souvent dans certaines copies sous la forme $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$?

Exercice 18 : (*Exemple de raisonnement par l'absurde*) Montrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ est un irrationnel (on commencera donc par supposer que $\sqrt{2}$ est un rationnel et qu'il existe alors deux entiers p et q sans diviseur commun tels que $\sqrt{2} = p/q$)

4. Résumé rapide de la partie I.

- On a introduit la notion d'*assertion* : phrase mathématique, sans variable et ne mettant donc en jeu que des objets, qui est soit vraie (V) soit fausse (F).
- On a montré comment on pouvait relier des assertions P et Q à l'aide de *connecteurs*
 - * *non* : l'assertion $\text{non } P$ est vraie si, et seulement si, P est fausse
 - * *ou* : l'assertion $P \text{ ou } Q$ est vraie dès que l'une des deux est vraie
 - * *et* : l'assertion $P \text{ et } Q$ est vraie si, et seulement si, les deux sont vraies
 - * $\Rightarrow$: l'assertion $P \Rightarrow Q$ est une abréviation de $(\text{non } P) \text{ ou } Q$; par suite
 - ★ si P est fausse alors $P \Rightarrow Q$ est vraie
 - ★ si P est vraie et que Q est vraie alors $P \Rightarrow Q$ est vraie
 - ★ si P est vraie et que Q est fausse alors $P \Rightarrow Q$ est fausse
 - ★ si $P \Rightarrow Q$ est vraie et si P est vraie alors Q est vraie.
 - * $\Leftrightarrow$: l'assertion $P \Leftrightarrow Q$ est une abréviation de $(P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow P)$;
- On a expliqué comment on pouvait *nier automatiquement* des assertions composées : si P et Q sont des assertions alors :
 - * la négation de $P \text{ ou } Q$ est $(\text{non } P) \text{ et } (\text{non } Q)$;
 - * la négation de $P \text{ et } Q$ est $(\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q)$;
 - * la $\boxed{\text{négation de } P \Rightarrow Q}$ est $\boxed{P \text{ et } (\text{non } Q)}$.
- Pour chacun des types d'assertions précédents on a donné une *méthode* permettant d'en engager une démonstration (*cf.* les pages correspondantes), méthodes qui sont celles que vous avez utilisées plus ou moins explicitement jusqu'à présent.

Remarques :

- On a insisté sur le fait que le symbole " $\Rightarrow$ " n'est pas une abréviation et qu'il ne doit être utilisé que dans des assertions mathématiques !
- La négation automatique d'une implication n'est pas naturellement une implication !

Enfin on a esquissé ce que peut être une théorie mathématique dans laquelle, partant d'axiomes ou de postulats, on démontre théorèmes, propositions, lemmes ou corollaires.

II. Théorie des ensembles

La théorie des ensembles a vu le jour dans le dernier quart du XIX^e siècle. Il n'est pas question dans cette section d'en faire une étude axiomatique abstraite, mais plutôt d'en donner le vocabulaire et les règles d'utilisation.

1. Ensembles, éléments, appartenance

Les notions d'*ensemble* et d'*élément* sont ici considérées comme des notions premières ; un ensemble correspond intuitivement à une “collection d'objets”. En théorie des ensembles, on manipule comme objets des *ensembles* et des *éléments* et on dispose initialement de deux opérateurs $\in$ et $=$.

Si a et b sont des objets de la théorie des ensembles, on peut former

- l'assertion $a \in b$ qui se lit “ a appartient à b ” ou “l'élément a appartient à l'ensemble b ” ; lorsque cette assertion est vraie cela entraîne donc que a est un élément et que b est un ensemble contenant l'élément a .
- l'assertion $a = b$ qui se lit “ a est égal à b ” et qui signifie que a et b sont deux noms *a priori* différents mais qui désignent en fait le même objet ; lorsque cette assertion est vraie cela entraîne donc que
 - * soit a et b désignent deux *éléments* égaux,
 - * soit a et b désignent deux *ensembles* égaux.

Remarques :

- Les notions d'*ensemble* et d'*élément* sont relatives puisque nous verrons dans la suite qu'un ensemble peut être élément d'un autre ensemble (*cf.* définition 9 page 19).
- L'usage veut que, lorsque l'on choisit les notations, on désigne habituellement les éléments par des lettres minuscules et les ensembles par des lettres majuscules : on écrira donc plutôt $a \in E$ pour signifier que “l'élément a appartient à l'ensemble E ” mais comme toujours il y a des exceptions (comme par exemple pour les éléments de $\mathcal{P}(E)$ que nous verrons page 19).

Description d'un ensemble :

- Lorsque p est un entier naturel non nul et que l'on dispose de p éléments distincts notés $a_1, \dots, a_p$ on admet qu'il existe un unique ensemble E contenant ces p éléments et aucun autre et on note alors

$$E = \{a_1, \dots, a_p\}.$$

- Par exemple $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ est l'ensemble contenant les cinq premiers entiers naturels non nuls.

2. Prédicats et quantificateurs

a) Prédicats

Le prédicat est encore une notion première ; un prédicat correspond intuitivement à un énoncé $A(x, y, \dots)$ faisant intervenir des lettres $x, y, \dots$ appelées *variables* et tel que, lorsqu'on substitue à chacune des ces variables un objet d'un ensemble donné, on obtienne une assertion (donc vraie ou fausse).

Exemples :

1. $x^2 - 1 > 0$ est un prédicat dont la variable x peut appartenir à $\mathbb{R}$ mais pas à $\mathbb{C}$.
2. $x + y^2 = 0$ est un prédicat à deux variables, chacune pouvant appartenir à $\mathbb{R}$ ou à $\mathbb{C}$.
Lorsque on y remplace la variable x par un nombre réel donné, par exemple 1, on obtient un prédicat à une variable, dans ce cas : $1 + y^2 = 0$.

b) Quantificateurs

Soit E un ensemble et $A(x)$ un prédicat à une variable x défini sur E , c'est-à-dire tel que, pour tout élément x_0 de E , l'énoncé $A(x_0)$ soit une assertion vraie ou fausse.

On peut alors construire deux assertions :

- l'assertion : $\forall x \in E \quad A(x)$
 - * qui se lit “pour tout x de E on a $A(x)$ ”,
 - * qui est vraie lorsque pour tout objet x_0 de E l'assertion $A(x_0)$ est vraie ;

le symbole “ $\forall$ ” est appelé *quantificateur universel*.
- l'assertion : $\exists x \in E \quad A(x)$
 - * qui se lit “il existe un x de E tel que $A(x)$ soit vraie”,
 - * qui est vraie lorsqu'il existe (au moins) un objet x_0 de l'ensemble E tel que l'assertion $A(x_0)$ est vraie ;

le symbole “ $\exists$ ” est appelé *quantificateur existentiel*.

Remarques :

- Malgré l'apparence, l'assemblage $\forall x \in E \quad A(x)$ ne contient aucun x !
On dit que le x figurant dans cette assertion a le statut de *variable muette*.
En effet la lettre x peut être remplacée par n'importe quelle autre lettre $y, z, t, \dots$ (sauf évidemment A et E) sans modifier le sens de l'assertion donnée.
- Il en est de même de l'assertion : $\exists x \in E \quad A(x)$.
- Pour signifier que, dans une phrase mathématique, une variable est précédée d'un quantificateur (donc muette) nous dirons aussi que la variable est quantifiée ; dans le cas contraire nous dirons qu'elle n'est pas quantifiée.

Méthode :

- Pour démontrer une assertion du type “ $\forall x \in E \ A(x)$ ” on commence la plupart du temps par fixer un objet quelconque x_0 de E avec lequel on va travailler pour démontrer que l’assertion $A(x_0)$ est vraie.
- Il est important pour l’instant de bien distinguer la lettre (variable) d’un objet (fixé pour le temps de la démonstration) ; la notation x_0 permet d’une part de garder le lien avec le nom de la variable (il est utile d’avoir une certaine logique dans les notations que l’on utilise) et d’autre part de mettre en évidence que l’on travaille avec un objet fixé.
- Pour démontrer une assertion du type “ $\exists x \in E \ A(x)$ ” la première méthode à laquelle penser est donc de construire un objet x_0 de E tel que $A(x_0)$ soit vraie.

Exercice 19 : Que pensez-vous de : $\exists x \in \mathbb{R} \ x^2 + 1 = 0$?

Exercice 20 : Que pensez-vous de : $\exists x \in \mathbb{C} \ x^2 + 1 = 0$?

Exercice 21 : Soit A et B deux prédicats définis sur $\mathbb{R}$. Comment interpréter : $\forall x \in \mathbb{R} \ A(x) \Rightarrow B(x)$?
Est-ce $\forall x \in \mathbb{R} \ (A(x) \Rightarrow B(x))$ ou $(\forall x \in \mathbb{R} \ A(x)) \Rightarrow B(x)$?

c) Négation d’une assertion commençant par un quantificateur**Définition 6 (Axiome de négation des quantificateurs)**

Soit E un ensemble et $A(x)$ un prédicat de la variable x défini sur E .

- La négation de : $\forall x \in E \ A(x)$ est : $\exists x \in E \ \text{non } A(x)$.
- La négation de : $\exists x \in E \ A(x)$ est : $\forall x \in E \ \text{non } A(x)$.

Remarque : Ces règles d’utilisation concernant la négation d’assertions commençant par un quantificateur ne font que codifier ce que l’on fait dans la vie courante pour nier une phrase du type “il existe un machin tel que ...” ou “pour tout machin on a ...”.

Méthode : À ce stade nous disposons de tous les symboles permettant d’écrire les assertions mathématiques que vous utiliserez à l’avenir. Les dernières règles que l’on vient de donner permettent de *nier automatiquement et sans risque* n’importe quelle assertion mathématique contenant des quantificateurs.

Exercice 22 : (*Important*) Soit $A(x)$ et $B(x)$ deux prédicats à une variable définis sur un ensemble E .
Quelle est la négation de l’assertion : $\forall x \in E \ A(x) \Rightarrow B(x)$?

Exercice 23 : Soit E un ensemble ainsi que $A(x)$ et $B(x)$ deux prédicats définis sur E .
Écrire la négation de l’assertion : $\forall x \in E \ A(x) \Leftrightarrow B(x)$.

Exercice 24 : On utilise parfois l’assertion $\exists! x \in E \ A(x)$ qui se lit
“il existe un unique objet x de E tel que $A(x)$ ”
1. Écrire l’assertion précédente sans utiliser le “!”.
2. En déduire une écriture correcte de la négation de $\exists! x \in E \ A(x)$.

d) Prédicats à plusieurs variables – Succession de quantificateurs

Dans ce qui précède nous n'avons utilisé que des prédicats à une variable, mais en général les choses sont un peu plus compliquées et les prédicats dépendent souvent de plusieurs variables. Dans les exemples de la page 13, nous avons déjà vu que, si dans un prédicat à deux variables, on quantifie l'une variable alors on obtient un prédicat à une variable. Nous allons préciser cela ici.

Exercice 25 : Que pensez-vous de : $\exists x \in \mathbb{R} \ x + y^2 = 0$? Est-ce une assertion, un prédicat ?

Exercice 26 : Pour y réel on note $P(y)$ le prédicat : $\exists x \in \mathbb{R} \ x + y^2 = 0$.

Montrer que l'assertion : $\forall y \in \mathbb{R} \ P(y)$ est vraie.

En reprenant les notations et les résultats des deux exercices précédents :

- pour $y \in \mathbb{R}$, on dispose d'un prédicat $P(y) : \exists x \in \mathbb{R} \ x + y^2 = 0$,
- on a démontré que l'assertion : $\forall y \in \mathbb{R} \ P(y)$ est vraie.

On peut, sans introduire explicitement le prédicat $P(y)$, écrire le résultat du dernier exercice sous la forme

$$\forall y \in \mathbb{R} \ (\exists x \in \mathbb{R} \ x + y^2 = 0).$$

Dans ce cas on peut aussi omettre les parenthèses et écrire :

$$\forall y \in \mathbb{R} \ \exists x \in \mathbb{R} \ x + y^2 = 0.$$

Remarque de notation : Cette dernière assertion traduit, comme on l'a vu dans la démonstration, que pour tout y on peut trouver un réel x (qui a donc de fortes chances de dépendre de y) tel que : $x + y^2 = 0$. Pour traduire cette "dépendance" on écrit parfois

$$\forall y \in \mathbb{R} \ \exists x_y \in \mathbb{R} \ x_y + y^2 = 0$$

mais ce n'est pas une obligation : la structure même de l'assertion précédente mettant en évidence que pour chaque y il y a un x (pouvant donc varier).

Convention : Quand dans une écriture comme les précédentes on rencontre une succession de deux quantificateurs (voire de plus de deux) sans parenthèse, il faut *mentalement* replacer les parenthèses de façon à ce que chaque quantificateur porte sur un prédicat de la variable qu'il quantifie. Dans certains cas (*cf.* exercices 30 et 66) l'omission des parenthèses peut être génératrice d'ambiguïté et il est alors indispensable de les conserver.

Exercice 27 : Montrer l'assertion : $\forall x \in \mathbb{R} \ \exists y \in \mathbb{R} \ x \leq y$.

Exercice 28 : Soit $I = [0, 1]$. Montrer l'assertion : $\exists x \in I \ \forall y \in I \ y \leq x$.

Exercice 29 : Écrire une assertion traduisant que tout réel positif est le carré d'un réel.

Exercice 30 : Pour tout réel a on considère l'application $s_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$x \mapsto x^2 + a$$

Écrire une assertion traduisant "pour tout réel a , si s_a s'annule sur $\mathbb{R}$ alors $a \leq 0$ ".

Exercice 31 : Pour x réel on note $Q(x)$ le prédicat : $\exists y \in \mathbb{R} \ x + y^2 = 0$.

Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $Q(x)$ est vrai.

Exercice 32 : (*approfondissement*) Relations entre connecteurs et quantificateurs.

Soit E un ensemble ainsi que $A(x)$ et $B(x)$ deux prédicats à une variable x définis sur E .

1. Montrer que : $\left(\forall x \in E (A(x) \text{ et } B(x))\right) \Leftrightarrow \left((\forall x \in E A(x)) \text{ et } (\forall x \in E B(x))\right)$
2. Montrer que : $\left(\exists x \in E (A(x) \text{ ou } B(x))\right) \Leftrightarrow \left((\exists x \in E A(x)) \text{ ou } (\exists x \in E B(x))\right)$.
3. Montrer que : $\left((\forall x \in E A(x)) \text{ ou } (\forall x \in E B(x))\right) \Rightarrow (\forall x \in E (A(x) \text{ ou } B(x)))$.
Justifier que l'on ne peut pas ici remplacer " $\Rightarrow$ " par " $\Leftrightarrow$ ".
4. Montrer que : $\left(\exists x \in E (A(x) \text{ et } B(x))\right) \Rightarrow \left((\exists x \in E A(x)) \text{ et } (\exists x \in E B(x))\right)$.
Justifier que l'on ne peut pas faire mieux que l'implication précédente.

Négation : D'après ce qui précède, on peut *nier automatiquement une assertion commençant par une suite de quantificateurs*, en appliquant successivement à chaque quantificateur les règles de négation des assertions commençant par un seul quantificateur.

Pratiquement : De proche en proche (ou encore de façon récursive)

- on remplace tout " $\forall x \in E$ " par " $\exists x \in E$ " et on nie ce qui suit le " $\forall x \in E$ ";
- on remplace tout " $\exists x \in E$ " par " $\forall x \in E$ " et on nie ce qui suit le " $\exists x \in E$ ".

Exercice 33 : Soit l'assertion $\exists y \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad x \leq y$.

1. En écrire la négation.
2. En déduire que l'assertion donnée est fausse.

Exercice 34 : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à termes réels.

1. Écrire une assertion traduisant :
"la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang".
2. Nier cette dernière assertion.

Exercice 35 : Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Écrire la négation de : $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq M$.

Exercice 36 : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à termes réels.

Écrire la négation de : $\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad (p \geq n \Rightarrow u_p \geq M)$.

e) De la bonne utilisation des symboles

Comme on vient de voir, l'usage des symboles mathématiques, et en particulier des quantificateurs, obéit à des règles strictes et précises.

- Ce sont des outils d'écriture très utiles lorsqu'on veut énoncer de manière précise une propriété mathématique, et leur utilisation est même quasiment indispensable pour obtenir automatiquement une négation correcte de la plupart des assertions non évidentes.
- En revanche, il ne faut pas mélanger dans une même phrase les quantificateurs et le langage français : les symboles mathématiques ne sont pas des sténogrammes et ne doivent pas être utilisés comme abréviations. Des phrases telles que "la fonction $\in$ l'ensemble des fonctions paires" ou " $\forall x \in \mathbb{R} f(x)$ existe" seront évidemment très mal accueillies par un correcteur !
- Toutefois il est toléré d'utiliser à l'intérieur d'une phrase de rédaction des incises telles que $a \in E$ voire $E \subset F$ et plus généralement toute assertion mathématique complète comme vous pouvez en voir dans cet exposé.

3. Résumé rapide du début de la partie II.

- On a introduit la notion d'ensemble et d'élément ainsi que les relations
 - * $a \in E$: l'élément a appartient à l'ensemble E ;
 - * $a \notin E$: négation de la relation précédente.
- Dans toute la suite de ce résumé E est un ensemble et $A(x)$ est un prédicat de la variable x défini sur E , i.e. une phrase dépendant de la variable x et telle que, pour tout élément x_0 de E , l'énoncé $A(x_0)$ est une assertion vraie ou fausse.
- On peut alors former les assertions
 - * $\forall x \in E A(x)$: qui se lit "pour tout x de E on a $A(x)$ ",
 - ★ qui est vraie lorsque pour tout objet x_0 de E l'assertion $A(x_0)$ est vraie ;
 - ★ le symbole " $\forall$ " est appelé *quantificateur universel*.
 - * $\exists x \in E A(x)$: qui se lit "il existe un x de E tel que $A(x)$ soit vraie",
 - ★ qui est vraie lorsqu'il existe (au moins) un objet x_0 de l'ensemble E tel que l'assertion $A(x_0)$ est vraie ;
 - ★ le symbole " $\exists$ " est appelé *quantificateur existentiel*.
- Malgré les apparences, il n'y a aucun x dans les deux assertions précédentes : le x figurant dans ces assertions a le statut de *variable muette* et peut être remplacé par n'importe quelle autre lettre $y, z, t, \dots$ (sauf évidemment A et E) sans modifier le sens de l'assertion donnée.
- Il est important pour le futur de bien distinguer la lettre (variable) d'un objet (fixé pour le temps de la démonstration) ; au début, la notation x_0 permet d'une part de garder le lien avec le nom de la variable (il est utile d'avoir une certaine logique dans les notations que l'on utilise) et d'autre part de mettre en évidence que l'on travaille avec un objet fixé.
- La négation de : $\forall x \in E A(x)$ est : $\exists x \in E \text{ non } A(x)$.
- La négation de : $\exists x \in E A(x)$ est : $\forall x \in E \text{ non } A(x)$.
- Pour nier une assertion commençant par une suite de quantificateurs, on applique successivement à chaque quantificateur les règles de négation des assertions commençant pas un seul quantificateur.
- Si $B(x)$ est un prédicat défini sur E ,

$\text{non}(\forall x \in E A(x) \Rightarrow B(x))$

 s'écrit encore : $\exists x \in E A(x) \text{ et non } B(x)$.

4. Parties d'un ensemble

a) Égalité d'ensembles – Inclusion

Définition 7 (Axiome de l'égalité de deux ensembles)

Par convention, deux ensembles E et F sont égaux si, et seulement si, tout élément de l'un est élément de l'autre (et réciproquement), c'est-à-dire si, et seulement si,

$$(\forall x \in E \ x \in F) \text{ et } (\forall x \in F \ x \in E).$$

Exercice 37 : Donner une assertion permettant d'exprimer que $E \neq F$.

Définition 8 (relation d'inclusion)

Soient E et F deux ensembles. L'assertion (vraie ou fausse)

$$\forall x \in F \quad x \in E \quad (*)$$

se note $F \subset E$ et se lit “ F est inclus dans E ” ou encore “ F est une partie de E ”

Remarque : Dans la relation $(*)$ la variable x est muette, ce qui est cohérent avec sa disparition dans la notation $F \subset E$. Cela se traduit aussi en français : lorsque cette relation est vraie on dit que “ E est inclus dans F ” et il n’y a pas la moindre trace du moindre x !

Méthode : En utilisant la relation d'inclusion, si E et F sont des ensembles, on a donc :

$$E = F \Leftrightarrow (E \subset F \text{ et } F \subset E).$$

Cette remarque nous fournit la première méthode à laquelle penser pour démontrer que deux ensembles sont égaux : *travailler par double inclusion*.

Exercice 38 : Soient E et F deux ensembles.

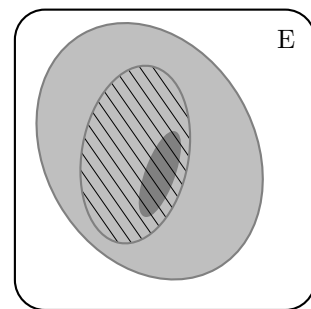
Écrire une assertion mathématique traduisant que F n'est pas inclus dans E .

Exercice 39 : Soit A , B et C trois parties d'un ensemble E telles que $A \subset B$ et $B \subset C$.

On se propose dans cet exercice de prouver que $A \subset C$.

Indication : commencer par analyser ce qu'il faut démontrer, puis comment le démontrer (ici c'est très simple il suffit d'utiliser la définition de ce que l'on veut prouver).

Remarque : Le résultat de l'exercice précédent, que vous avez certainement déjà utilisé et que vous pourrez dorénavant utiliser dans un raisonnement, apparaît totalement évident sur un dessin tel que celui représenté ci-contre, et il ne faut pas se priver d'un tel support qui permet de comprendre, d'assimiler et de retenir le résultat. En revanche un dessin n'est pas une démonstration et si on vous demande une démonstration, il faut pouvoir en écrire une !



■ A ▨ B ■ C

Approfondissement : (Relation d'inclusion entre des parties) Lorsque A et B sont deux parties d'un ensemble E , l'inclusion $A \subset B$ peut aussi s'écrire

$$\forall x \in E \quad x \in A \Rightarrow x \in B.$$

D'après les règles de calcul sur les quantificateurs et l'implication, sa négation s'écrit alors :

$$\exists x \in E \quad x \in A \quad \text{et} \quad x \notin B.$$

b) Ensemble des parties d'un ensemble

Définition 9 (Axiome de l'ensemble des parties)

Soit E un ensemble. On admet qu'il existe un ensemble, noté $\mathcal{P}(E)$, tel que

$$F \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow F \subset E.$$

$\mathcal{P}(E)$ est appelé ensemble des parties de E .

Remarque : Comme nous l'avions annoncé dans les remarques de la page 12, la définition précédente montre bien que les notions d'*ensemble* et d'*élément* ne sont pas absolues puisque tout ensemble est lui-même élément de l'ensemble de ses parties.

Définition 10 (Axiome de l'ensemble vide)

On admet qu'il existe un unique ensemble, appelé ensemble vide et noté $\emptyset$, qui ne contient aucun élément et qui est donc tel que

- pour tout prédicat P de la variable x , l'assertion " $\exists x \in \emptyset \quad P(x)$ " est fausse ;
- pour tout prédicat P de la variable x , l'assertion " $\forall x \in \emptyset \quad P(x)$ " est vraie.

Remarque : La première pastille de la définition précédente caractérise rigoureusement l'ensemble vide $\emptyset$: comme il ne contient aucun élément, on ne peut trouver aucun élément dans $\emptyset$ vérifiant le moindre prédicat !

Exercice 40 : (*approfondissement*) Vérifier que la seconde pastille de la définition précédente est en fait équivalente à la première.

Proposition 4

Pour tout ensemble E , on a $\emptyset \subset E$.

Démonstration : D'après la première pastille ci-dessus, la relation

$$\forall x \in \emptyset \quad x \in E$$

est vraie, ce qui entraîne que $\emptyset \subset E$.

Exercice 41 : (*Important*) Décrire $\mathcal{P}(E)$ lorsque $E = \{1, 2\}$.

Exercice 42 : (*Important*) Décrire $\mathcal{P}(E)$ lorsque $E = \{1, 2, 3\}$.

Attention : Dans l'exercice 41 on a vu que si $E = \{1, 2\}$, alors on a

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}.$$

Prendre garde au double niveau de parenthèses dans la description précédente : on a décrit $\mathcal{P}(E)$ en donnant l'ensemble de ses éléments, or tout élément de $\mathcal{P}(E)$ est une partie de E , ce qui fait que l'on a

$$\{1\} \subset E \quad \text{ou encore} \quad \{1\} \in \mathcal{P}(E)$$

alors que la relation $1 \in \mathcal{P}(E)$ est fausse car 1 n'est pas une partie de E !

c) Sous-ensembles et prédicats

Si E est un ensemble et F une partie de E alors $x \in F$ est évidemment un prédicat de la variable x défini sur E . Réciproquement on admet l'axiome suivant.

Définition 11 (Axiome)

Si $P(x)$ est un prédicat défini sur E alors il existe une unique partie F de E telle que

$$\forall x \in E \quad (P(x) \Leftrightarrow x \in F).$$

On note alors : $F = \{x \in E \mid P(x)\}$.

Exercice 43 : Écrire sous forme d'intervalle l'ensemble $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 4\}$.

d) Réunion – Intersection – Complémentaire

Définition 12

Soit A et B deux parties d'un ensemble E .

- On appelle *réunion* de A et B l'ensemble noté $A \cup B$ et défini par

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

- On appelle *intersection* de A et B l'ensemble noté $A \cap B$ et défini par

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

- On appelle *complémentaire* de A dans E , l'ensemble noté $\complement_E A$ et défini par

$$\complement_E A = \{x \in E \mid x \notin A\}.$$

- On appelle *différence* A moins B l'ensemble noté $A \setminus B$ et défini par

$$A \setminus B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\} = \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

Remarque : Avec les notations de la définition précédente, on a alors évidemment

- pour la réunion : $\forall x \in E \quad x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B)$;
- pour l'intersection : $\forall x \in E \quad x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B)$;
- pour le complémentaire : $\forall x \in E \quad x \in \complement_E A \Leftrightarrow x \notin A$;

comme $\text{non}(\text{non } P) \Leftrightarrow P$ est vraie, on a donc immédiatement : $\complement_E(\complement_E A) = A$.

Notations :

- Quand on travaille dans un ensemble E fixé, $\complement_E A$ peut se noter plus rapidement $\overline{A}$.
- Au vu de sa description on a évidemment $A \setminus B = \complement_A B = A \cap \complement_E B$.

Exercice 44 : Écrire à l'aide d'intervalles l'ensemble $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 4\}$.

e) Règles de calcul sur les parties d'un ensemble

Soit E un ensemble ainsi que A , B et C trois parties *quelconques* de E , ce que l'on peut aussi écrire $A \subset E$, $B \subset E$ et $C \subset E$ ou encore $A \in \mathcal{P}(E)$, $B \in \mathcal{P}(E)$ et $C \in \mathcal{P}(E)$.

Les relations suivantes, évidentes sur un dessin, doivent pouvoir à l'avenir être utilisées sans la moindre hésitation.

- D'abord deux inclusions :

$$\textcircled{1} \quad A \subset A \cup B$$

$$\textcircled{2} \quad A \cap B \subset A$$

- Ensuite des relations d'égalité utilisant $\cup$ et $\cap$:

$$\textcircled{3} \quad A \cup A = A$$

$$\textcircled{4} \quad A \cap A = A$$

$$\textcircled{5} \quad A \cup \emptyset = A$$

$$\textcircled{6} \quad A \cap E = A$$

$$\textcircled{7} \quad A \cup E = E$$

$$\textcircled{8} \quad A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$\textcircled{9} \quad A \cup B = B \cup A$$

$$\textcircled{10} \quad A \cap B = B \cap A$$

$$\textcircled{11} \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$$

$$\textcircled{12} \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$$

$$\textcircled{13} \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$\textcircled{14} \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

- Puis quelques égalités concernant les complémentaires

$$\textcircled{15} \quad \mathcal{C}_E E = \emptyset$$

$$\textcircled{16} \quad \mathcal{C}_E \emptyset = E$$

$$\textcircled{17} \quad A \cup \mathcal{C}_E A = E$$

$$\textcircled{18} \quad A \cap \mathcal{C}_E A = \emptyset$$

$$\textcircled{19} \quad \mathcal{C}_E(A \cap B) = (\mathcal{C}_E A) \cup (\mathcal{C}_E B)$$

$$\textcircled{20} \quad \mathcal{C}_E(A \cup B) = (\mathcal{C}_E A) \cap (\mathcal{C}_E B)$$

- Ensuite des implications :

$$\textcircled{21} \quad E \subset A \Rightarrow A = E$$

$$\textcircled{22} \quad A \subset \emptyset \Rightarrow A = \emptyset$$

$$\textcircled{23} \quad A \subset B \Rightarrow A \cap C \subset B \cap C$$

$$\textcircled{24} \quad A \subset B \Rightarrow A \cup C \subset B \cup C$$

- Enfin trois équivalences

$$\textcircled{25} \quad A \subset B \Leftrightarrow \mathcal{C}_E B \subset \mathcal{C}_E A$$

$$\textcircled{26} \quad A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$$

$$\textcircled{27} \quad A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$$

Remarques :

- Avez-vous fait attention aux mots clés dans les titres des divers points précédents : inclusion, égalité, complémentaires, implication, équivalence ? Ils indiquent le type de démonstration à faire et permettent d'avoir l'idée d'une première méthode comme nous le verrons dans la section suivante.

- Il va sans dire mais encore peut-être mieux en le disant qu’il est essentiel de visualiser chacun de ces résultats sur un dessin (encore appelé diagramme de Venn), que ce dessin soit effectivement réalisé (ce qui peut vous rassurer dans un premier temps) ou seulement imaginé mentalement (ce qui est certainement plus efficace pour l’avenir). Prendre garde toutefois de ne pas alors dessiner de cas trop particulier !

Exercice 45 : Réaliser quelques dessins illustrant les résultats précédents.

Exercice 46 : (*Illustration de l’utilisation des règles de calcul précédentes*)

Soient A et B deux parties d’un ensemble E . On note $A \Delta B$ l’ensemble défini par

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

En utilisant essentiellement ⑭, montrer que : $A \Delta B = A \cup B \setminus (A \cap B)$.

5. Premières démonstrations

Avertissement : Dans cette partie nous allons démontrer les relations précédentes sur les parties d’un ensemble, résultats que vous avez pu vérifier sur des dessins (et il ne faut pas s’en priver).

- Tout d’abord ces démonstrations, comme toujours en mathématiques, permettent évidemment d’être sûr que ces égalités, qui paraissent vraies sur les dessins réalisés, le seront quel que soit le cas de figure que l’on pourrait imaginer.
- Mais cela va aussi, surtout ici, permettre de *voir sur des exemples les premières méthodes de démonstration* pour que vous vous rendiez compte que ces démonstrations ne sont pas miraculeuses ou issues du cerveau d’un brillant “mathéux” mais tout à fait à votre portée à condition d’avoir un minimum de méthode.
- Ces démonstrations ne sont évidemment *pas là pour que vous les appreniez par cœur*, ce qui serait la façon la plus improductive de “travailler” ! Une question de cours, puisque vous allez y être confronté dans le suite de votre scolarité, doit être un exercice dont on retrouve la solution à chaque fois que l’on en a besoin et non pas que l’on rabâche comme des patenôtres sans les comprendre.
- En revanche vous pouvez vous référer à ces démonstrations comme à des *exemples de rédaction* vous donnant une idée du niveau de précision qu’il faut avoir sans tomber dans le verbiage inutile. N’ayez pas peur de vous en inspirer !
- De plus la structure de chacune de ces démonstrations, avec d’abord les questions à se poser devant le problème correspondant, puis la rédaction de la démonstration proprement dite, vous donne une idée de ce que devra être votre démarche lorsque vous vous trouverez devant une question à résoudre : *recherche puis rédaction*.
- Enfin *je vous déconseille de travailler toutes ces démonstrations à la chaîne*, ce qui risque de vous lasser et ne vous permettra pas d’assimiler la méthode. N’ayez pas peur de revenir plusieurs fois sur cette partie en cherchant par exemple une ou deux démonstrations par jour.
- En revanche, dès les premières lectures, vous pourrez (devrez) *finir par lire, page 26, la partie “en guise de conclusion”* qui apporte aussi quelques explications intéressantes.

Dans la suite

- E est un ensemble donné ;
- A , B et C sont trois parties de E , ce qui s'écrit aussi $A \subset E$, $B \subset E$ et $C \subset E$ ou encore $A \in \mathcal{P}(E)$, $B \in \mathcal{P}(E)$ et $C \in \mathcal{P}(E)$.

Commençons par prouver $\boxed{A \subset A \cup B}$ ①

Comment faire ? Pour prouver $A \subset A \cup B$, utiliser la définition de l'inclusion et montrer :

$$\forall x \in A \quad x \in A \cup B.$$

Par définition du quantificateur “ $\forall$ ” : prouver que pour tout objet $x_0 \in A$ on a $x_0 \in A \cup B$.

- Pour cela on prend un $x_0 \in A$.
- Comme $P \Rightarrow P \text{ ou } Q$ est une vraie, on en déduit que $x_0 \in A \text{ ou } x_0 \in B$ est vraie et donc que $x_0 \in A \cup B$ est vraie.

Démonstration : Pour prouver que $A \subset A \cup B$ montrons que : $\forall x \in A \quad x \in A \cup B$.

Soit donc $x_0 \in A$.

On a alors $(x_0 \in A) \text{ ou } (x_0 \in B)$ et donc $x_0 \in A \cup B$, ce qui termine la démonstration.

Remarque : À la lecture de la démonstration précédente, certains peuvent avoir une angoisse : que se passe-t-il si $A = \emptyset$? Faut-il distinguer deux cas dans la démonstration ?

- Première réponse : par définition de $\emptyset$, on sait que si $P(x)$ est un prédicat quelconque, alors l'assertion $\forall x \in \emptyset P(x)$ est vraie ; par suite notre conclusion est alors trivialement vérifiée et il est donc inutile de traiter ce cas particulier.
- Seconde réponse : on a vu dans l'approfondissement page 18 que l'inclusion à prouver peut aussi s'écrire :

$$\forall x \in E \quad x \in A \Rightarrow x \in A \cup B.$$

Lorsque $A = \emptyset$, si x_0 est un objet quelconque de E l'assertion $x_0 \in A$ est fausse, et donc, par définition de l'implication, on a :

$$x_0 \in A \Rightarrow x_0 \in A \cup B$$

ce qui prouve alors la véracité de l'assertion

$$\forall x \in E \quad x \in A \Rightarrow x \in A \cup B.$$

Montrons ensuite $\boxed{A \cup A = A}$ ③

Comment faire ? Il s'agit de démontrer l'égalité de deux ensembles, ce qui par définition peut se faire par double inclusion en montrant donc d'une part $A \subset A \cup A$ et d'autre part $A \cup A \subset A$. Mais l'une des inclusions est déjà connue !

Démonstration :

- En utilisant la relation ① avec $B = A$, on obtient : $A \subset A \cup A$.
- Montrons que $A \cup A \subset A$.
Soit donc $x_0 \in A \cup A$. On a alors $x_0 \in A \text{ ou } x_0 \in A$ et donc $x_0 \in A$,
ce qui termine la démonstration de l'inclusion $A \cup A \subset A$.

Par double inclusion on en déduit $A \cup A = A$.

Montrons ensuite $A \cup \emptyset = A$ ⑤

Comment faire ? Encore une égalité de deux ensembles avec une inclusion déjà connue.

Démonstration :

- En utilisant la relation ① avec $B = \emptyset$ on a : $A \subset A \cup \emptyset$
- Montrons que $A \cup \emptyset \subset A$.

Soit donc $x_0 \in A \cup \emptyset$. On en déduit que $x_0 \in A$ ou $x_0 \in \emptyset$.

Comme $x_0 \in \emptyset$ est faux la définition du *ou* entraîne que $x_0 \in A$ est vrai, ce qui termine la démonstration de la seconde inclusion.

Par double inclusion on en déduit $A \cup \emptyset = A$.

Vérifions maintenant que $E \subset A \Rightarrow A = E$ ②①

Comment faire ? Il s'agit ici de démontrer une implication. Donc, comme expliqué lors de la définition de l'implication, on commence par supposer que $E \subset A$ est vrai.

Démonstration :

Supposons $E \subset A$.

Comme par hypothèse A est une partie de E , on a : $A \subset E$.

Cette double inclusion entraîne alors immédiatement $A = E$.

Par suite on a prouvé l'implication : $E \subset A \Rightarrow A = E$.

On peut alors en déduire $A \cup E = E$ ⑦

Comment faire ? Encore une fois il s'agit de prouver une égalité d'ensembles. Mais il n'est pas nécessaire de "descendre au niveau des éléments" pour faire cette démonstration : il suffit d'utiliser certains des résultats précédents

Démonstration :

D'après la relation ① on sait que $E \subset A \cup E$.

Comme $A \cup E$ est une partie de E , on en déduit $E = A \cup E$, ce qui termine la démonstration.

Pour en finir avec la colonne de gauche du premier point de la page 21 démontrons

$$A \cup B = B \cup A \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Comment faire ? Ici on peut directement démontrer ces relations par équivalence, ce qui est quand-même assez rare comme vous pourrez vous en rendre compte dans la suite.

Démonstration :

- Démonstration de $A \cup B = B \cup A$.

Comme pour tout $x_0 \in E$ on a, par commutativité du *ou* (cf. page 7) :

$$(x_0 \in A \text{ ou } x_0 \in B) \Leftrightarrow (x_0 \in B \text{ ou } x_0 \in A)$$

on en déduit que $A \cup B = B \cup A$.

- On démontre de même directement $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

par associativité du *ou* (cf. exercice 8).

- La dernière relation est conséquence directe de la distributivité du *et* sur le *ou* (cf. exercice 11).

Venons-en maintenant aux relations concernant les complémentaires

Tout d'abord $\boxed{\mathcal{C}_E E = \emptyset.}$ (15)

Comment faire ? Pour démontrer que $\mathcal{C}_E E$ est vide, il suffit d'utiliser la définition de $\emptyset$.

Démonstration :

Étant donné que $\mathcal{C}_E E$ est caractérisé par $x \in \mathcal{C}_E E \Leftrightarrow x \in E \text{ et } x \notin E$ et que pour toute assertion P , l'assertion $P \text{ et non } P$ est fausse, on en déduit que $x \in \mathcal{C}_E E$ est toujours fausse et donc que $\boxed{\mathcal{C}_E E = \emptyset.}$

Avec un raisonnement analogue on obtient $\boxed{A \cap \mathcal{C}_E A = \emptyset}$ (18)

On obtient $\boxed{\mathcal{C}_E \emptyset = E}$ (16) par passage au complémentaire.

Démonstration : De la relation (15) on déduit $\mathcal{C}_E(\mathcal{C}_E E) = \mathcal{C}_E \emptyset$,

ce qui donne le résultat en utilisant que $\mathcal{C}_E(\mathcal{C}_E E) = E$.

Montrons $\boxed{\mathcal{C}_E(A \cap B) = (\mathcal{C}_E A) \cup (\mathcal{C}_E B).}$ (19)

Comment faire ? Ici encore on peut faire un raisonnement par équivalence permettant de démontrer directement l'égalité des deux parties.

Démonstration :

Par définition on a : $\forall x \in E \quad x \in \mathcal{C}_E(A \cap B) \Leftrightarrow x \notin A \cap B$

ainsi que : $\forall x \in E \quad x \in (\mathcal{C}_E A) \cup (\mathcal{C}_E B) \Leftrightarrow (x \in \mathcal{C}_E A \text{ ou } x \in \mathcal{C}_E B).$

Étant donné que

$$\forall x \in E \quad x \in \mathcal{C}_E(A \cap B) \Leftrightarrow \text{non}(x \in A \cap B)$$

et que

$$\forall x \in E \quad (x \in \mathcal{C}_E A \text{ ou } x \in \mathcal{C}_E B) \Leftrightarrow (x \notin A \text{ ou } x \notin B)$$

les règles régissant l'utilisation des connecteurs *non*, *ou*, *et* montrent que

$$\forall x \in E \quad x \in \mathcal{C}_E(A \cap B) \Leftrightarrow x \in (\mathcal{C}_E A) \cup (\mathcal{C}_E B)$$

ce qui termine la démonstration.

On obtient alors rapidement $\boxed{\mathcal{C}_E(A \cup B) = (\mathcal{C}_E A) \cap (\mathcal{C}_E B)}$ (20).

Démonstration : Si on remplace A par $\mathcal{C}_E A$ et B par $\mathcal{C}_E B$ dans la relation (19), on obtient :

$$\mathcal{C}_E(\mathcal{C}_E A \cap \mathcal{C}_E B) = (\mathcal{C}_E(\mathcal{C}_E A)) \cup (\mathcal{C}_E(\mathcal{C}_E B)).$$

ou encore

$$\mathcal{C}_E(\mathcal{C}_E A \cap \mathcal{C}_E B) = A \cup B.$$

On en déduit le résultat en prenant le complémentaire des deux membres de l'égalité.

De même $\boxed{A \cup \mathcal{C}_E A = E}$ s'obtient par passage au complémentaire.

Démonstration : En prenant les complémentaires des deux membres de la relation $A \cap \mathcal{C}_E A = \emptyset$, et en utilisant la dernière égalité démontrée, on en déduit le résultat.

En utilisant le complémentaire on peut aussi prouver $\boxed{A \cap B \subset A}$.

Démonstration : En utilisant ① avec $\complement_E A$ et $\complement_E B$, on obtient : $\complement_E A \subset \complement_E A \cup \complement_E B$.

Par passage au complémentaire on en déduit : $\complement_E(\complement_E A \cup \complement_E B) \subset \complement_E(\complement_E A)$.

Comme $\complement_E(\complement_E A) = A$ et

$$\complement_E(\complement_E A \cup \complement_E B) = \complement_E(\complement_E A) \cap \complement_E(\complement_E B) = A \cap B$$

on en déduit $\boxed{A \cap B \subset A}$.

Toutes les autres égalités du tableau de la page 21 peuvent aussi se déduire de ce qui a déjà été démontré et des règles de calcul sur les opérateurs $\cap$, $\cup$ et $\complement$.

Quant aux implications et équivalences nous les démontrerons dans la section III. consacrée aux méthodes de recherche.

En guise de conclusion de cette (longue) série de démonstrations :

Vous avez peut-être l'impression que ces trois ou quatre pages de démonstrations auraient pu être évitées surtout que, dans ce cas, les démonstrations n'apportent aucune aide pour retenir des résultats qui sont tellement évidents sur un dessin.

Si j'ai ainsi détaillé ce n'est pas pour faire de la rigueur à outrance ou du débordement de programme, mais pour vous montrer sur des cas hyper-simples comment on construit une démonstration ; nous approfondirons d'ailleurs cela dans la section suivante.

J'espère aussi qu'à la lecture de ces démonstrations vous avez pu vous rendre compte qu'une rédaction est avant tout un exercice de Français permettant de produire un texte qui doit pouvoir être lu et compris rapidement par un humain qui devra l'évaluer et le noter ; le correcteur n'est ni une machine déchiffrant du pseudo-code bourré de signes " $\Leftrightarrow$ " non justifiés, ni un Champollion décryptant la Pierre de Rosette !

D'où l'importance de produire un texte structuré,

- pouvant être lu en diagonale car il ne faut pas imposer au correcteur de lire tout ce que vous avez écrit en suivant linéairement le fil : c'est beaucoup trop long ;
- où l'on annonce ce que l'on va faire ;
- où l'on introduit précisément les objets que l'on utilise ;
- où l'on conclut ce que l'on a fait en mettant cette conclusion en valeur, ce qui permet aussi de bien délimiter les questions ; quand on dispose de peu de moyens de mise en page, comme sur votre copie, une *bonne technique est d'encadrer cette conclusion*, qui peut être le rappel du résultat ; en Mathématiques, *souligner un résultat est la dernière chose à faire* surtout s'il utilise plusieurs lignes ou s'il contient des fractions ;
- le tout écrit avec les caractères alphabétiques ou numériques de tout le monde car le correcteur n'a pas le temps d'apprendre vos hiéroglyphes particuliers avant d'évaluer votre copie !

Exercice 47 : (*un peu d'humour sous forme de questions loin d'être anodines*) D'ici quelque temps vous aurez des épreuves de Mathématiques de 4 heures, vous permettant de vous préparer aux divers concours que vous voulez passez.

1. Combien de copies, de pages pensez-vous rendre pour un tel devoir ?
2. Selon vous, quel temps passera votre professeur pour corriger *votre* travail ?
3. De combien de temps aura-t-il donc besoin pour les 42 copies de votre classe ?
4. Ayant posé la question à un professeur, il a répondu que 12 heures lui paraît une limite à ne pas dépasser pour corriger un paquet de copies. Combien de temps cela fait-il en moyenne pour lire et évaluer chacune des pages que vous avez rendues ?

6. Couple, produit cartésien

a) Produit cartésien de deux ensembles

Dans la théorie des ensembles, il reste une dernière notion à introduire : celle de couple et donc de produit cartésien.

Définition 13 (Axiome du couple)

À partir de deux objets x et y , on peut construire le couple (x, y) qui est caractérisé par la règle suivante : si x' et y' sont deux objets alors :

$$(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow (x = x' \text{ et } y = y').$$

Définition 14 (Axiome du produit cartésien)

Soient E et F deux ensembles. On admet qu'il existe un ensemble appelé produit cartésien de E et F , noté $E \times F$ et défini par :

$$E \times F = \{z \mid \exists x \in E \ \exists y \in F \ z = (x, y)\}.$$

Remarques :

- Avec ces notations, on peut aussi écrire : $E \times F = \{(x, y) \mid x \in E \text{ et } y \in F\}$.
- Vous utilisez couramment un produit cartésien lorsque vous travaillez dans le plan usuel rapporté à un repère et que vous identifiez chaque point du plan avec un couple de coordonnées.

Exercice 48 : Décrire $E \times F$ lorsque $E = \{1, 2\}$ et $F = \{1, 2, 3\}$.

Attention : Le couple (x, y) s'écrit avec des parenthèses, pas des accolades !

- Avec des accolades, $\{x, y\}$ désigne un ensemble et, si $x = y$, alors $\{x, y\} = \{x\}$.
- Si $x \neq y$ alors $\{x, y\} = \{y, x\}$ mais $(x, y) \neq (y, x)$.

Retour sur les successions de deux quantificateurs : Soit E et F deux ensembles et $A(x, y)$ un prédicat de deux variables défini sur $E \times F$, c'est-à-dire tel que pour tout objet $x_0 \in E$ et tout objet $y_0 \in F$, l'assemblage $A(x_0, y_0)$ soit une assertion.

Alors

- on a : $(\forall x \in E \quad \forall y \in F \quad A(x, y)) \Leftrightarrow (\forall x \in E \quad \forall y \in F \quad A(x, y))$
et chaque membre de cette équivalence peut aussi s'écrire : $\forall (x, y) \in E \times F \quad A(x, y)$.
- on a : $(\exists x \in E \quad \exists y \in F \quad A(x, y)) \Leftrightarrow (\exists x \in E \quad \exists y \in F \quad A(x, y))$
et chaque membre de cette équivalence peut aussi s'écrire : $\exists (x, y) \in E \times F \quad A(x, y)$.

Exercice 49 : (*approfondissement*) Justifier les deux équivalences précédentes.

Remarque : Le résultat précédent s'énonce encore en disant que l'on peut permuter deux quantificateurs de même nature. En revanche l'exercice 50 montre qu'il n'en est pas de même avec des quantificateurs de nature différente.

Exercice 50 : (*approfondissement*) Les notations sont les mêmes que précédemment.

1. Montrer que : $(\exists x \in E \quad \forall y \in F \quad A(x, y)) \Rightarrow (\forall y \in F \quad \exists x \in E \quad A(x, y))$.
2. Justifier que l'on ne peut pas prouver l'implication réciproque.

b) Généralisation

- De même, à partir de trois objets x , y et z , on peut construire le triplet (x, y, z) . Les triplets possèdent la propriété fondamentale :

$$(x, y, z) = (x', y', z') \Leftrightarrow (x = x' \text{ et } y = y' \text{ et } z = z').$$

- Étant donné trois ensembles E , F et G , on peut construire leur produit cartésien, noté $E \times F \times G$, défini par :

$$E \times F \times G = \{(x, y, z) \mid x \in E \text{ et } y \in F \text{ et } z \in G\}.$$

- Plus généralement, si n est un entier naturel non nul,
* à partir de n objets $x_1, x_2, \dots, x_n$, on peut construire $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ appelé n -uplet ou aussi n -liste, avec la règle d'utilisation :

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \Leftrightarrow (x_1 = x'_1 \text{ et } x_2 = x'_2 \text{ et } \dots \text{ et } x_n = x'_n)$$

règle qui s'écrit encore :

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \Leftrightarrow (\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad x_i = x'_i) ;$$

- * à partir de n ensembles $E_1, E_2, \dots, E_n$, on peut construire leur produit cartésien, noté $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$, défini par :

$$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 \in E_1 \text{ et } x_2 \in E_2 \text{ et } \dots \text{ et } x_n \in E_n\}.$$

Par suite si $z \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ si, et seulement si, il existe $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2, \dots$ et $x_n \in E_n$ tels que : $z = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

III. Méthodes pratiques de recherche

La plupart des démonstrations que vous aurez à faire consisteront

- à partir d'hypothèses (ce qui est supposé ou encore ce qui est donné dans l'énoncé)
- pour aboutir à une conclusion (résultat qu'il faut établir).

Lorsque vous avez à résoudre une question pour laquelle aucun passage allant de l'hypothèse à la conclusion ne vous saute aux yeux (et cela risque de vous arriver souvent en début de supérieur) il est absolument nécessaire de faire assez souvent le point sur l'état d'avancement de votre travail. On peut comparer cela aux “trois questions fondamentales du philosophe” :

qui suis-je ? d'où viens-je ? où vais-je ?

- *où vais-je* ou encore quel résultat dois-je démontrer ?
- *qui suis-je* ou encore comment puis-je démontrer ce résultat ?
- *d'où viens-je* enfin c'est-à-dire quels théorèmes, propriétés, résultats déjà établis ou admis ai-je à ma disposition ?

La plus importante des trois questions précédentes est évidemment “*où vais-je ?*” puisque c'est elle qui guide la recherche.

Contrairement à une idée reçue pour *chercher une démonstration*,

- il ne faut pas regarder l'hypothèse en premier et “partir de l'hypothèse pour aboutir à la conclusion” : *si on part sans but il n'est pas étonnant d'arriver n'importe où* ;
- il faut regarder la conclusion et voir comment on peut la justifier ; vous devez considérer la conclusion comme une boussole ou, pour être plus à la mode, un GPS vous permettant de vous orienter dans le dédale des possibilités ouvertes.

En revanche pour *rédigier une démonstration* il faut effectivement partir des hypothèses dont on dispose et mettre en évidence comment à l'aide de théorèmes, propriétés, résultats déjà établis, on en déduit logiquement la conclusion demandée.

Même lors de la recherche il faut s'attacher à tout formuler dans un Français correct et surtout à bien identifier les objets que l'on manipule : ensemble, élément, fonction, ... Je ne peux compter le nombre de fois où j'ai vu un élève répondre par lui-même à une question qui lui paraissait insurmontable quelques minutes plus tôt, tout simplement parce qu'il avait enfin réussi à l'exprimer dans un Français correct ou à identifier correctement les objets qu'il était en train de manipuler.

Au brouillon, puisqu'effectivement cette phase devient la plupart du temps indispensable dans le supérieur pour la recherche, il n'est pas indispensable que toutes ces formulations soient écrites in extenso et il est possible, et même conseillé afin de gagner du temps, d'abrégé le plus possible en utilisant vos propres symboles ; en revanche il en va tout autrement sur une copie où seules sont admises les abréviations légales (figurant dans le dictionnaire).

Comme on vient de le voir il est indispensable de pouvoir identifier le résultat à démontrer puis de préciser comment on va le démontrer, une propriété pouvant assez souvent se justifier de différentes façons. Il est alors très utile de savoir *traduire* d’abord la conclusion, puis éventuellement les hypothèses, à l’aide d’assertions mathématiques correctes c’est-à-dire d’assertions n’utilisant (et avec une bonne syntaxe) que les connecteurs et les quantificateurs précédemment introduits dans ce chapitre.

Dans la suite nous allons voir comment les trois questions fondamentales permettent

- soit de diminuer la complexité du résultat à prouver tout en augmentant le nombre des propriétés dont on dispose pour conclure, ce que j’appelle la méthode de “*conclusion peau de chagrin*” ;
- soit plus simplement de faire avancer ce que j’appelle “*le curseur de conclusion*”.

1. Premiers exemples de traduction

Comme on vient de le voir dans ce qui précède, la première démarche à accomplir lors d’une recherche est une traduction du langage courant vers le langage mathématique : tout d’abord traduction en une relation mathématique de la conclusion figurant dans l’énoncé puis éventuellement traduction des hypothèses.

En voici quelques exemples :

- Soit A et B deux parties d’un ensemble E .
 - * La relation $A \subset B$ peut (par définition de l’inclusion) s’écrire

$$\forall x \in E \quad x \in A \Rightarrow x \in B$$
 - * Sa négation, $A \not\subset B$, peut donc alors s’écrire (cf. page 14 ou page 17) :

$$\exists x \in E \quad x \in A \text{ et } x \notin B$$
 - * En ce qui concerne la relation $A = B$,
 - ★ elle peut s’écrire : $A \subset B$ et $B \subset A$;
 - ★ il est aussi possible de l’écrire en “descendant au niveau des éléments”

$$(\forall x \in E \quad x \in A \Rightarrow x \in B) \text{ et } (\forall x \in E \quad x \in B \Rightarrow x \in A)$$
 mais ce n’est pas forcément indispensable dans un premier temps et cela dépend de ce que l’on veut vraiment faire avec la relation précédente.
 - * Sa négation $A \neq B$ peut s’énoncer

$$A \not\subset B \text{ ou } B \not\subset A.$$
 - * L’inclusion stricte de A dans B , qui signifie que A est inclus dans B mais que A est différent de B , et qui se note $A \subsetneq B$, peut s’écrire

$$A \subset B \text{ et } B \not\subset A.$$
- Soit f est une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.
 - * La relation $f = 0$, qui signifie que f est la fonction nulle peut s’écrire

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad f(x) = 0.$$

- * Sa négation $f \neq 0$ peut donc s'écrire

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) \neq 0.$$

- * Il ne faut pas confondre cette dernière assertion avec

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \neq 0$$

qui signifie que f ne s'annule pas !

- * Le fait que f soit majorée s'énonce

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq M,$$

cette dernière assertion étant la traduction presque mot à mot de la propriété : il existe un réel M qui majore la fonction, c'est-à-dire qui est plus grand que toutes les valeurs $f(x)$.

Exercice 51 : Soit f est une fonction donnée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Donner une assertion exprimant que f n'est pas majorée.
2. Que pensez-vous de l'assemblage : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq M$?

Exercice 52 : Soit f et g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Écrire, à l'aide de $f(x)$ et $g(x)$, une assertion traduisant $f \neq g$.

2. Comment engager une recherche

La conclusion, dès qu'elle est correctement écrite sous forme d'assertion mathématique, donne la plupart du temps un *plan de bataille* permettant d'attaquer et de dégrossir la démonstration. Ce serait dommage de ne pas en profiter !

En effet d'après le début de ce chapitre, une assertion complexe est obtenue,

- en quantifiant la variable d'un prédicat avec “ $\forall$ ” ou de “ $\exists$ ” ; nous dirons alors :
 - * elle de type “ $\forall$ ” si elle peut s'écrire sous la forme : $\forall x \in E \quad P(x)$,
 - * elle de type “ $\exists$ ” si elle peut s'écrire sous la forme : $\exists x \in E \quad P(x)$,
 où $P(x)$ est un prédicat de la variable x défini sur un ensemble E ;
- en reliant deux assertions par un connecteur “ $\Rightarrow$ ”, “*et*”, “*ou*” ; nous dirons alors :
 - * elle est de type “ $\Rightarrow$ ” si elle peut s'écrire sous la forme : $P \Rightarrow Q$,
 - * elle est de type “*et*” si elle peut s'écrire sous la forme : $P \text{ et } Q$,
 - * elle est de type “*ou*” si elle peut s'écrire sous la forme : $P \text{ ou } Q$,
 où P ainsi que Q sont des assertions (moins complexes que la première).

Exemples :

1. Étant donné un ensemble E ainsi que $A \in \mathcal{P}(E)$ et $B \in \mathcal{P}(E)$, l'assertion :

$$\left\| \begin{array}{l} (\forall x \in E \quad x \in A \Rightarrow x \in B) \text{ et } (\forall x \in E \quad x \in B \Rightarrow x \in A) \\ \text{est de type “et” car elle s'écrit } P \text{ et } Q \text{ avec} \\ \bullet \quad P \text{ l'assertion : } (\forall x \in E \quad x \in A \Rightarrow x \in B) \\ \bullet \quad Q \text{ l'assertion : } (\forall x \in E \quad x \in B \Rightarrow x \in A). \end{array} \right.$$

2. Étant donné un ensemble E ainsi que $A \in \mathcal{P}(E)$ et $B \in \mathcal{P}(E)$, l'assertion :

$$\forall x \in E \quad x \in A \Rightarrow x \in B$$
 est de type “ $\forall$ ” car elle s'écrit $\forall x \in E P(x)$ avec $P(x) : x \in A \Rightarrow x \in B$.

3. Étant donné une application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, l'assertion :

$$(\forall x \in \mathbb{R} f(x) = x^2) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R} f'(x) = 2x)$$
 est de type “ $\Rightarrow$ ” car elle s'écrit $P \Rightarrow Q$ avec

- P l'assertion : $(\forall x \in \mathbb{R} f(x) = x^2)$
- Q l'assertion : $(\forall x \in \mathbb{R} f'(x) = 2x)$.

Le premier travail sera à faire donc d'analyser la conclusion pour voir quel est son type : comme vous avez pu le voir sur les exemples précédents, c'est une analyse que l'on fait *de l'extérieur* sans descendre tous les niveaux de complexité.

En partant de l'énumération précédente, on peut donc dire que :

il existe essentiellement cinq grands types d'assertions mathématiques à démontrer :
le type “ $\forall$ ”, le type “ $\exists$ ”, le type “ $\Rightarrow$ ”, le type “*et*”, le type “*ou*”.

Pour chacun donnons *une* méthode permettant d'engager la démonstration.

- Pour démontrer une assertion du genre : $\forall x \in E P(x)$,
 - * la façon la plus élémentaire de procéder est de prendre un objet x_0 quelconque mais fixé dans E puis de démontrer que $P(x_0)$ est vraie.
Par suite pour une telle démonstration, le début doit être “Soit $x_0 \in E$”
 - * Dans le cas particulier où $E = \mathbb{N}$, pour prouver une assertion du type $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$, on peut évidemment penser à utiliser une démonstration par récurrence, mais ce n'est pas toujours une obligation !
- Pour démontrer une assertion du genre : $\exists x \in E P(x)$,
 - * la façon la plus élémentaire de procéder est de trouver, d'exhiber, de construire un objet x_0 appartenant à E tel que $P(x_0)$ soit vrai.
 - * Si un tel objet x_0 ne vous saute pas aux yeux, il peut être bon, *lors de la recherche d'une solution*, de commencer par une phase d'analyse :
 - ★ dans la phase d'analyse, on suppose le problème résolu et on cherche des propriétés intéressantes d'un objet x_0 dont on suppose qu'il vérifie la relation donnée. Dès que l'on pense avoir trouvé suffisamment de ces propriétés, on passe à la démonstration proprement dite, la seule partie que l'on verra vraiment dans la *rédaction de la solution*.
 - ★ la phase de rédaction doit commencer par la construction d'un objet x_0 et se poursuivre en prouvant que $P(x_0)$ est alors vrai (mais évidemment sans utiliser les propriétés établies lors de la phase d'analyse).
- Pour démontrer une assertion du type $P \Rightarrow Q$, il suffit de supposer que P est vrai puis, avec cette nouvelle hypothèse, de démontrer que Q est vrai. Il n'est pas utile de considérer le cas où P est faux puisque l'on sait alors par définition de l'implication que $P \Rightarrow Q$ est vrai.

- Pour démontrer une assertion du type P et Q il suffit de démontrer l’une puis l’autre des deux assertions.
- Pour démontrer une assertion du type P ou Q il suffit de démontrer l’une ou l’autre des deux assertions, mais il n’est pas toujours aisé de savoir laquelle est vraie en fonction du contexte. La méthode la plus courante consiste alors à supposer que l’une est fausse puis, avec cette nouvelle hypothèse, à démontrer l’autre.

Cette façon de procéder peut se justifier

- * soit en disant que l’on raisonne par disjonction des cas :
 - ★ cas 1 : si P est vraie alors on sait que P ou Q est vraie.
 - ★ cas 2 : si P est fausse, en prouvant Q on a prouvé que P ou Q est vraie.
 Ainsi, par disjonction des cas, on a prouvé que P ou Q est vraie.
- * soit en considérant que P ou Q peut aussi s’écrire $(\text{non } P) \Rightarrow Q$ et en se référant alors à la méthode élémentaire de démonstration d’une implication.

Remarque : le choix l’assertion supposée fausse n’est pas toujours anodin et peut simplifier ou compliquer la démonstration de l’autre assertion : c’est alors une affaire de flair et cela sort évidemment du cadre de cet exposé.

Remarque : Dans la liste précédente nous n’avons pas mentionné les assertions pouvant s’écrire sous la forme $P \Leftrightarrow Q$, ce qui vous a peut-être surpris.

- En fait, par définition de l’équivalence, la démonstration de $P \Leftrightarrow Q$ se ramène à celle des deux assertions $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$: donc pas besoin de type particulier.
- Il y a certains cas où l’on peut écrire une suite d’assertions équivalentes dont la première est P et la dernière Q ; on fait alors ce que l’on appelle un *raisonnement par équivalence*. Mais, contrairement à ce qui se passe dans le secondaire, ces cas sont rares dans le supérieur : *ce n’est donc pas une bonne stratégie de rechercher a priori un tel type de démonstration d’une équivalence.*

C’est en utilisant l’analyse précédente que l’on peut mettre en œuvre ce qui suit.

3. Méthode “Conclusion peau de chagrin”

La méthode que j’appelle “conclusion peau de chagrin” consiste à diminuer peu à peu la complexité de la conclusion tout en augmentant le nombre de propriétés acquises jusqu’au moment où le chemin vers la conclusion devient en quelque sorte irréductible et alors le plus souvent très simple à trouver.

Explicitons cette méthode pour démontrer la proposition suivante.

Proposition 5

Soit A , B et C trois parties d’un ensemble E . Montrer que

$$A \subset B \Rightarrow A \cap C \subset B \cap C$$

(23)

Explication de la méthode Au départ on dispose donc de trois parties de E et on veut démontrer une implication, ce que l'on peut schématiser ainsi

Hypothèses	Conclusion
$A \subset E, B \subset E, C \subset E$	$(A \subset B) \Rightarrow (A \cap C \subset B \cap C)$

La relation à prouver est de type implication. Par suite

- on suppose donc vrai son membre de gauche, soit ici : $A \subset B$;
- il reste alors à prouver $A \cap C \subset B \cap C$,

ce que l'on peut schématiser ainsi

Acquis	Reste à prouver
$A \subset E, B \subset E, C \subset E$ $A \subset B$	$A \cap C \subset B \cap C.$

La nouvelle conclusion $A \cap C \subset B \cap C$ est une inclusion qui peut aussi s'écrire :

$$\forall x \in E \quad (x \in A \cap C \Rightarrow x \in B \cap C)$$

Comme il s'agit alors de prouver une relation de type “ $\forall$ ”, on prend un élément x_0 de E ; on en arrive alors à la situation suivante :

Acquis	Reste à prouver
$A \subset E, B \subset E, C \subset E$ $A \subset B$ $x_0 \in E$	$x_0 \in A \cap C \Rightarrow x_0 \in B \cap C$

Cette dernière relation à justifier étant de type “ $\Rightarrow$ ” on suppose $x_0 \in A \cap C$, ce qui donne

Acquis	Reste à prouver
$A \subset E, B \subset E, C \subset E$ $A \subset B$ $x_0 \in E$ $x_0 \in A \cap C$	$x_0 \in B \cap C$

Par définition de l'intersection $B \cap C$ on est donc dans la situation suivante

Acquis	Reste à prouver
$A \subset E, B \subset E, C \subset E$ $A \subset B$ $x_0 \in E$ $x_0 \in A \cap C$	$x_0 \in B$ et $x_0 \in C$

Il nous faut donc justifier une relation de type “*et*” : pour ce faire on va prouver que d'abord $x_0 \in B$ est vrai, puis que $x_0 \in C$ est vrai, en se retournant “enfin” vers le stock des “acquis” où l'on prend ce dont on a besoin.

- On sait que $x_0 \in A \cap C$ et donc que $x_0 \in A$;
comme $A \subset B$ on en déduit que $x_0 \in B$; c'est 50% de ce qu'il faut prouver !
- On sait que $x_0 \in A \cap C$ et donc que $x_0 \in C$; et le résultat attendu est justifié !

Remarques :

- L'ensemble des étapes précédentes peut paraître insurmontable surtout pour démontrer un si petit résultat ! Mais il faut bien se rendre compte que ce que l'on voit ci-dessus est une explication des mécanismes mis en œuvre : c'est forcément bien plus long qu'une bonne rédaction qui sera évidemment plus concise (*cf.* exercice suivant) : pour passer de la phase recherche à la phase rédaction, vous devez faire un travail analogue à celui qui vous faites en Français dans un exercice de résumé.
- Dans l'explication de méthode précédente on a tout détaillé pour montrer l'enchaînement quasi-automatique des étapes, mais avec un peu d'entraînement, on prend rapidement l'habitude de faire plusieurs étapes en une seule fois, voire de réduire automatiquement ce qui est acquis comme par exemple $x_0 \in E$ et $x_0 \in A \cap C$ qui est redondant et que l'on peut évidemment remplacer par le seul $x_0 \in A \cap C$.

Mais dans un premier temps j'ai préféré tout laisser pour bien montrer que les hypothèses que l'on accumule ne doivent pas être notre souci majeur mais plutôt un stock vers lequel on se retourne quand on a besoin de matériau pour avancer.

Exercice 53 : Donner une rédaction de la démonstration précédente.

4. Autres exemples de réduction de conclusion

Il faut toutefois se rendre compte que les méthodes précédemment décrites sont les méthodes les plus basiques permettant d'engager les démonstrations des divers types de conclusion rencontrés. Toutefois il n'est pas toujours nécessaire de descendre tous les niveaux pour en arriver à ce niveau "atomique".

Par exemple, pour démontrer une inclusion d'un ensemble A dans un ensemble B , il n'est pas toujours indispensable de descendre au niveau des éléments car on peut aussi utiliser tous les résultats connus : aussi bien ceux trouvés en partie II.4.e) page 21 concernant les calculs dans $\mathcal{P}(E)$ que ceux démontrés dans les propositions précédentes. La démonstration de la proposition suivante en est un bon exemple.

Proposition 6

Soit A , B et C trois parties d'un ensemble E . Montrer que

$$A \subset B \Rightarrow A \cup C \subset B \cup C \quad (24)$$

Exercice 54 : Chercher une démonstration de ce résultat en mettant en œuvre la méthode de réduction de la conclusion dite méthode "peau de chagrin".

Remarque : ne pas oublier de tenir compte du paragraphe précédant la proposition !

Exercice 55 : Rédiger la démonstration précédente (avec l'idée du complémentaire)

Proposition 7

Soit A et B deux parties d'un ensemble E . Montrer que : $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$ (26).

Exercice 56 : Construire une démonstration de ce résultat en mettant en œuvre la méthode de réduction de la conclusion dite méthode "peau de chagrin".

Exercice 57 : Donner une rédaction de la démonstration précédente.

Proposition 8

Si E est un ensemble montrer que :

$$\forall A \in \mathcal{P}(E) \quad \forall B \in \mathcal{P}(E) \quad A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A \quad (27)$$

Exercice 58 : Construire une démonstration de ce résultat.

Exercice 59 : Donner une rédaction de la démonstration précédente.

Remarque : On a vu dans les exemples précédents que qu'il y avait souvent plusieurs possibilités pour démontrer un résultat, certaines voies étant plus efficaces que d'autres : c'est dans ce genre de choix que vous pourrez vous épanouir et montrer vos talents. Toutefois, si l'on ne peut vous faire grief de ne pas trouver la solution la plus élégante, on vous tiendra évidemment rigueur de ne pas savoir mettre en œuvre les méthodes de bases qui ont été exposées ici.

5. Angoisse “démonstration ou contre-exemple ?”

Il y a une question génératrice d'angoisse que vous pouvez vous poser et que certains se posent encore même après une année d'enseignement post-bac :

- “un contre-exemple est-il une démonstration ?”
- ou encore “pour démontrer ce résultat peut-on se contenter d'un contre-exemple ?”.

Regardons cela sur le problème simple suivant.

- La fonction $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie-t-elle la relation

$$x \mapsto 2x$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad f_1(x+y) = f_1(x) + f_1(y) ? \quad (a)$$
- La fonction $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie-t-elle la relation

$$x \mapsto x+1$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad f_2(x+y) = f_2(x) + f_2(y) ? \quad (b)$$

Dans chacun des cas la réponse oui/non paraît ici assez évidente :

- la relation (a) est vraie ;
- la relation (b) est fausse ;

il reste à le prouver.

Exercice 60 : Montrer que la relation (a) est vraie.

Pour montrer que (b) est fausse on peut penser à une démonstration par l'absurde mais ici, il est plus simple de montrer que la négation de (b) est vraie (cf. exercice suivant).

- Exercice 61 :**
1. Écrire la négation de b (sous forme d'assertion mathématique n'utilisant pas *non*).
 2. Quel est le type de *non*(b) ? Comment donc démontrer *non*(b) ?
 3. Montrer que *non*(b) est vraie.

Quand on commente la démonstration faite dans ce dernier exercice, il arrive assez souvent de dire : “on a démontré que (b) est faux grâce à un contre-exemple”. Bien qu’assez répandu, un tel type d’affirmation n’est pas vraiment correct et risque d’engendrer de la confusion chez le néophyte.

En fait c’est une question de point de vue :

- si on a dans l’idée de démontrer que la relation (b) est vraie alors le couple (x, y) choisi est effectivement un contre-exemple montrant que l’on peut arrêter la recherche d’une telle démonstration ;
- en revanche si on a envie de prouver que la relation (b) est fausse alors le fait d’exhiber un couple $(x, y) = (1, -1)$ tel que $f_2(x + y) \neq f_2(x) + f_2(y)$ est effectivement une démonstration que *non* (b) est vraie et donc que la relation (b) est fausse.

Encore une fois le fait d’écrire précisément sous forme d’assertion mathématique ce que l’on veut démontrer permet d’éviter ce genre de questions angoissantes.

6. Quelques exercices pour mettre en application

Exercice 62 : Démontrer l’assertion suivante :

$$\forall a \in \mathbf{R} \quad \forall b \in \mathbf{R} \quad (a + b = 0 \text{ et } a - b = 0) \Rightarrow a = b = 0.$$

Exercice 63 : Dans cet exercice on considère la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbf{N} \quad u_n = n^2 - 9n$.
Montrer que cette suite est croissante à partir d’un certain rang.

Exercice 64 : Pour les jours d’angoisse ou de panique il faut apprendre à “debugger” les mauvaises traductions, celles qui ressemblent à la bonne mais qui ne le sont pas.

Soit f une application donnée de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Que pensez-vous des assemblages suivants :

1. $\exists M \in \mathbf{R} \quad \exists x \in \mathbf{R} \quad f(x) \leq M ?$
2. $\forall x \in \mathbf{R} \quad \exists M \in \mathbf{R} \quad f(x) \leq M ?$
3. $\forall M \in \mathbf{R} \quad \forall x \in \mathbf{R} \quad f(x) \leq M ?$

Exercice 65 : Pour tout $a \in \mathbf{R}$ on note f_a la fonction linéaire : $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$.
 $x \mapsto ax$

On se propose ici de prouver que :

“pour tout réel a , si la fonction f_a est nulle alors on a : $a = 0$.”

1. Traduire cet énoncé sous forme d’assertion mathématique.
 - en n’utilisant que f_a , et pas de $f_a(x)$;
 - en utilisant uniquement $f_a(x)$ (faire alors attention aux parenthèses).
2. Le démontrer.

Exercice 66 : Dans cet exercice on considère *a priori* l’assertion :

$$\forall a \in \mathbf{R} \quad \forall b \in \mathbf{R} \quad \forall x \in \mathbf{R} \quad ax + b = 0 \Rightarrow a = b = 0.$$

1. Expliquer comment l’introduction de parenthèses peut donner naissance à deux assertions différentes.
2. Traduire chacune d’elle en français.
3. Démontrer que l’une est fausse et que l’autre est vraie.

Exercice 67 : Reprendre l’exercice précédent mais avec l’assertion

$$\forall a \in \mathbf{R}_+^* \quad \forall b \in \mathbf{R}_+^* \quad \forall x \in \mathbf{R}_+^* \quad ax + b = 0 \Rightarrow a = b = 0.$$

Rappel : $\mathbf{R}_+^*$ désigne l’ensemble des réels strictement positifs.

7. Curseur de conclusion (peut se garder pour une lecture ultérieure)

La méthode du “curseur de conclusion” n’est pas vraiment différente de la méthode “conclusion peau de chagrin”, c’est une variante de présentation qui, comme la méthode précédente, permet de guider la démonstration et de vérifier que l’on n’a rien oublié.

Expliquons-la sur l’exemple suivant.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application donnée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \exists k \in \mathbb{R} \quad |f(y) - f(x)| \leq k |y - x|.$$

Méthode : La méthode “curseur de conclusion” consiste à imaginer un curseur

- qui au départ se trouve à l’extrême gauche de la ligne à prouver :

$$\uparrow \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \exists k \in \mathbb{R} \quad |f(y) - f(x)| \leq k |y - x|,$$

- le but étant de le faire progresser jusqu’à l’extrême droite de cette ligne :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \exists k \in \mathbb{R} \quad |f(y) - f(x)| \leq k |y - x| \uparrow$$

- ce qui reste à démontrer étant ce qui se trouve à droite dudit curseur.

Cette méthode, nécessitant beaucoup moins d’écriture que la méthode “conclusion peau de chagrin”, permet quand même d’avoir un bilan exact de ce qui est acquis (à gauche) et de ce qui reste à prouver (à droite). Mais comme on pourra s’en rendre compte, elle ne s’applique pas à des assertions mathématiques contenant le symbole “ $\Leftrightarrow$ ”.

Comment faire ?

- Comme on doit démontrer une assertion de type “ $\forall x$ ”, on commence par fixer un $x \in \mathbb{R}$ et le curseur progresse d’un cran vers la droite :

$$\forall x \in \mathbb{R} \uparrow \forall y \in \mathbb{R} \quad \exists k \in \mathbb{R} \quad |f(y) - f(x)| \leq k |y - x|.$$

- Il faut alors démontrer une assertion de type “ $\forall y$ ” : on prend donc un $y \in \mathbb{R}$ et le curseur progresse d’un cran vers la droite :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \uparrow \exists k \in \mathbb{R} \quad |f(y) - f(x)| \leq k |y - x|.$$

- La suite étant du type “ $\exists k$ ” il faut alors construire k . Pour cela, comme x et y sont maintenant des réels fixés, on peut donc considérer deux cas :

- * Si $x = y$ alors la valeur $k = 1$ vérifie $|f(y) - f(x)| \leq k |y - x|$
et donc l’assertion $\exists k \in \mathbb{R} \quad |f(y) - f(x)| \leq k |y - x|$ est vraie.
- * Si $x \neq y$ alors en posant $k = \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|}$ on a $|f(y) - f(x)| \leq k |y - x|$
et donc l’assertion $\exists k \in \mathbb{R} \quad |f(y) - f(x)| \leq k |y - x|$ est vraie.

Par suite $\exists k \in \mathbb{R} \quad |f(y) - f(x)| \leq k |y - x|$ est vraie, ce qui termine la démonstration.

Remarques :

- Dans ce qui précède nous nous sommes affranchis des conventions de notation de type x_0, y_0 , indiçage par 0 qui nous permettait jusque là d'insister sur le fait que l'on fixe un objet particulier bien différent de la variable. Nous nous contentons maintenant d'une phrase du type : "soit x un réel" ce qui met suffisamment en évidence que l'on raisonne sur un objet et non sur du vent !
- Cette méthode du "curseur de conclusion" est une méthode de recherche. Il serait déplacé de faire figurer ce "curseur de conclusion" dans votre rédaction.

Exercice 68 : Rédiger une démonstration de l'assertion

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \exists k \in \mathbb{R} \quad |f(y) - f(x)| \leq k|y - x|.$$

Exercice 69 : Dans cet exercice on pose $I = [0, 1]$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2$

1. Montrer que l'on a :

$$\exists k \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad \forall y \in I \quad |f(y) - f(x)| \leq k|y - x|$$

2. On se propose d'en déduire que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in I \quad \forall y \in I \quad |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Si on analyse bien ce qu'il faut démontrer ainsi que la *naure de la question*, cela ne devrait pas poser de problème. Donner la phase de recherche.

3. Rédiger la démonstration correspondante.

Exercice 70 : Dans cet exercice on pose $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et on veut montrer que
 $x \mapsto x^2$

$$\exists k \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad |f(y) - f(x)| \leq k|y - x| \quad (*)$$

est une assertion fausse.

1. Quelle est la négation de cette assertion ?
(juste pour le plaisir, car nous n'utiliserons pas cela dans la suite)
2. En supposant que (*) est vraie, montrer que

$$\exists k \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq k|x|.$$

3. Montrer par l'absurde que (*) est fausse.

Remarque importante à propos de la démonstration de l'exercice précédent :
 (qu'il faut donc avoir travaillée pour comprendre ce qui suit).

- On a d'abord utilisé la relation (supposée vraie) :

$$\exists k \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad |f(y) - f(x)| \leq k|y - x|.$$

Bien que ce soit une assertion de type " $\exists$ ", c'est une *hypothèse* du problème que l'on doit résoudre et non pas une conclusion. Ce n'est pas à vous d'exhiber un réel k mais c'est le problème qui vous en offre un : il faut donc voir ce réel k comme un cadeau fourni par l'hypothèse (*) et, comme pour tous les cadeaux, il faut prendre ce que l'on vous donne (et éventuellement dire merci, mais là on sort du cadre de ce chapitre). Ce que je veux dire avec cette comparaison c'est que vous ne pouvez pas choisir vous-même la valeur de ce k : vous savez que l'on peut obtenir un réel k vérifiant cette relation, et c'est tout.

- On a ensuite rencontré et utilisé une autre *hypothèse* :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad |f(y) - f(x)| \leq k |y - x|.$$

Bien que ce soit une assertion de type “ $\forall$ ” on n’a pas utilisé toutes les valeurs de y mais on s’est contenté de l’utiliser avec $y = 0$.

- * Encore une fois il ne s’agissait pas de démontrer cette relation, puisque c’est une hypothèse et donc un cadeau de l’énoncé.
- * Si on n’a pas utilisé toutes les valeurs possibles, ce n’est pas uniquement parce que l’air du temps est aux économies d’énergie : on a utilisé une valeur particulière et on a pu en déduire notre résultat, c’est l’essentiel. Encore une fois ce qui est important c’est la conclusion, ce n’est pas de savoir si on a, oui ou non, utilisé toutes les hypothèses.
- * Pour une telle assertion de type “ $\forall$ ”, on peut faire une dernière comparaison, avec une boîte de chocolats :
 - ★ dans le cas d’une hypothèse : on vous offre une boîte de chocolats mais vous n’êtes pas obligé de manger tous les chocolats ;
 - ★ dans le cas d’une conclusion : c’est vous qui devez offrir la boîte de chocolats et ça ne viendrait à l’esprit de personne de ne pas offrir une boîte complète !

Exercice 71 : (*plus difficile, et que l’on peut garder pour une troisième ou quatrième lecture*)

$$\text{Dans cet exercice on pose } f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}.$$

1. On se propose ici de démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad |x - y| \leq 1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq (2|x| + 1)|x - y|.$$

En chercher une démonstration avec la méthode du curseur de conclusion.

2. Rédiger la démonstration correspondante.

3. En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Remarque : Dans l’assertion de la dernière question de l’exercice précédent interviennent les lettres ε , x , η et y , mais comme ces variables sont précédées d’un quantificateur, ce sont des variables muettes ; par suite cette ligne traduit une propriété de f .

- Vous verrez dans la suite de l’année que cela signifie que f est continue .
- Si l’on omet le premier quantificateur et que l’on écrit

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall y \in I \quad |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

alors x n’est pas une variable muette de ce dernier énoncé : il s’agit d’un prédicat en x qui traduit, comme vous le verrez plus tard : “ f est continue en x ”.

Attention : Ne pas confondre

- l’assertion : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \exists k \in \mathbb{R} \quad |f(y) - f(x)| \leq k |y - x|$ (a)
- et l’assertion : $\exists k \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad |f(y) - f(x)| \leq k |y - x|$ (b)

Alors que la première est vraie pour toutes les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (cf. exercice 68), la seconde n’est pas vraie pour toutes ces applications (cf. exercice 70).

8. Exemple d'un énoncé ouvert

Dans cette partie nous allons nous intéresser à un énoncé ouvert, comme par exemple :

Déterminer les applications f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{N} \quad \forall y \in \mathbb{N} \quad f(x+y) = f(x) + f(y). \quad (*)$$

La première question qui se pose à la lecture d'un tel énoncé est ce qu'attend l'auteur par "Déterminer les applications ...". Il s'agit en fait de décrire autrement, de façon plus simple, plus utilisable, ..., l'ensemble des applications vérifiant la relation $(*)$ donnée.

La résolution de cette question va faire l'objet des exercices 72 à 79 dans lesquels nous allons explorer ensemble une démarche possible pour y répondre.

Exercice 72 : Tout d'abord que pensez-vous de la ligne $(*)$?

- est-ce une assertion ?
- est-ce un prédicat ? si oui de quelle(s) variable(s) ?

L'exercice est ouvert : l'auteur ne donne pas la réponse. Il faut donc commencer par annoncer ce que l'on va démontrer et, pour cela, commencer par "bricoler un peu", faire appel à ses souvenirs, tester telle ou telle fonction qui vient à l'esprit pour voir si elle convient, en un mot : "chercher".

Exercice 73 : Quelques pistes :

Les fonctions $f_1 : x \rightarrow 2x$, $f_2 : x \rightarrow x+1$, $f_3 : x \rightarrow x^2$ répondent-elles au problème ?

Au vu des exemples testés dans l'exercice précédent on doit avoir envie de démontrer que les applications vérifiant $(*)$ sont "les fonctions du type $f(x) = ax$ " ou encore que ce sont les fonctions linéaires de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Exercice 74 : Ce dernier énoncé "les fonctions du type $f(x) = ax$ " étant tout sauf précis et rigoureux, donner un énoncé correct de ce qu'il signifie.

Remarque de langage : Il arrive assez souvent que, pour caractériser par exemple une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, on dise comme précédemment :

"la fonction f est du type $f(x) = ax$ avec $a \in \mathbb{N}$ ".

Si une telle formulation est pratique à l'oral, il faut bien garder à l'esprit qu'il s'agit d'un énoncé du type " $\exists$ ", qui doit s'écrire sous la forme

$$\exists a \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad f(x) = ax.$$

Il est important de se souvenir de cela pour savoir ce qu'il faut exactement démontrer quand on doit justifier un tel énoncé.

Je profite de l'occasion pour rappeler que dans l'histoire ci-dessus :

- la fonction est f , élément de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$, ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
- alors que, pour tout x entier, $f(x)$ est un entier donc élément de $\mathbb{N}$.

Attention de bien distinguer les deux !

Exercice 75 : Que penser de l'énoncé : $\exists a \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad f(x) = ax$?

Est-ce une assertion ? un prédicat ?

Exercice 76 :

1. En utilisant les prédicats P et Q introduits dans les corrections des exercices 72 et 75, traduire l'énoncé donné dans l'exercice 74.
2. Faire alors un plan de bataille pour résoudre la question.

Exercice 77 : Soit $f_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$.

1. Comment doit commencer la démonstration de $Q(f_0) \Rightarrow P(f_0)$?
2. Démontrer $Q(f_0) \Rightarrow P(f_0)$.

Exercice 78 : Soit $f_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$. On se propose ici de prouver $P(f_0) \Rightarrow Q(f_0)$.

1. Utiliser la méthode “conclusion peau de chagrin” jusqu'à vous ramener à devoir juste prouver une assertion de type “ $\exists$ ”.
2. Si vous ne voyez pas comment prouver cette assertion, à savoir :

$$\exists a \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad f_0(x) = ax.$$
 qui est de type “ $\exists$ ”, vous pouvez analyser le problème ou encore supposer le problème résolu, afin de trouver comment un tel a peut alors être défini en fonction du f_0 que l'on connaît.
3. Lorsque l'on dispose d'une valeur de a , que reste-t-il à prouver ?
4. Rédiger alors la démonstration de $P(f_0) \Rightarrow Q(f_0)$.

Exercice 79 : Rédiger alors une solution complète de la question posée, à savoir :

Déterminer les applications f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{N}^2 \quad f(x + y) = f(x) + f(y). \quad (*)$$

IV. Conclusion

Il est évident que l'exposé précédent ne donne pas toutes les méthodes pour résoudre toutes les questions que vous pourrez rencontrer en Mathématiques, et c'est heureux car dans le cas contraire il suffirait de tout programmer et de laisser travailler les ordinateurs.

Contrairement à ce que vous avez vécu jusque là, dans le secondaire, la démarche pour résoudre une question n'est plus

Question $\rightarrow$ Méthode $\rightarrow$ Solution

mais

Question $\rightarrow$ Recherche $\rightarrow$ (éventuellement) Solution.

J'espère par cet exposé vous avoir donné le minimum vital vous permettant

- d'une part de savoir engager la recherche d'une question,
- d'autre part de vous assurer que vous avez réalisé une démonstration correcte de la question posée et de vous éviter ainsi une foule de questions angoissantes.

Enfin j'espère aussi vous avoir convaincu de la nécessité des deux phases nécessaires à la résolution de la plupart des questions

- recherche au brouillon
- rédaction au propre.

Toutefois je pense que vous vous êtes aussi rendu compte qu’il y a rarement unicité de la démonstration d’un résultat et qu’il existe des démonstrations plus ou moins efficaces, plus ou moins astucieuses : il est impossible de systématiser ce genre de choix et c’est là que vous pourrez faire preuve de tout votre potentiel. En revanche il ne faut pas perdre votre temps à chercher une “astuce”, sous prétexte que cela vous ferait gagner du temps de rédaction ou vous éviterait un gros calcul, et passer ainsi à côté d’une démonstration “basique” peut-être moins valorisante mais quand même efficace.

V. Solutions des exercices

Exercice 1 :

Tables de vérité de $P \text{ et } Q$ et de $(\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q)$

P	Q	$P \text{ et } Q$	$\text{non } P$	$\text{non } Q$	$(\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q)$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	F	V	V
F	V	F	V	F	V
F	F	F	V	V	V

On en déduit que l'assertion $\text{non}(P \text{ et } Q)$ et l'assertion $(\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q)$ ont même valeur de vérité et sont donc logiquement équivalentes ou encore, plus rapidement, qu'elles sont équivalentes.

Exercice 2 :

Tables de vérité de $P \text{ ou } Q$ et de $(\text{non } P) \text{ et } (\text{non } Q)$

P	Q	$P \text{ ou } Q$	$\text{non } P$	$\text{non } Q$	$(\text{non } P) \text{ et } (\text{non } Q)$
V	V	V	F	F	F
V	F	V	F	V	F
F	V	V	V	F	F
F	F	F	V	V	V

On en déduit que l'assertion $\text{non}(P \text{ ou } Q)$ et l'assertion $(\text{non } P) \text{ et } (\text{non } Q)$ ont même valeur de vérité et sont donc (logiquement) équivalentes.

Exercice 3 :

- Par définition, l'assertion $P \text{ et } Q$ est équivalente à $\text{non}((\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q))$ et donc $\text{non}(P \text{ et } Q)$ est équivalente à $\text{non}(\text{non}((\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q)))$.

En utilisant la remarque de la page 3, on en déduit que

$$\text{non}(\text{non}((\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q))) \text{ est équivalente à } (\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q)$$

et donc que :

$$\boxed{\text{non}(P \text{ et } Q) \text{ est équivalente à } (\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q).}$$

- De même $(\text{non } P) \text{ et } (\text{non } Q)$ est, par définition : $\text{non}((\text{non}(\text{non } P)) \text{ ou } (\text{non}(\text{non } Q)))$ qui est équivalente à $\text{non}(P \text{ ou } Q)$. Par suite on en déduit que :

$$\boxed{\text{non}(P \text{ ou } Q) \text{ est équivalente à } (\text{non } P) \text{ et } (\text{non } Q).}$$

Exercice 4 :

- $\mathcal{T}$ est un triangle équilatéral lorsque $AB = BC = CA$ mais une telle écriture, que l'on utilise couramment, n'est pas une assertion mathématique syntaxiquement correcte car l'égalité est binaire et ne peut donc relier que deux éléments.

Remarque : Vous auriez le même type de problème pour exprimer une telle condition avec votre calculatrice voire avec tout langage informatique.

Pour avoir une assertion syntaxiquement correcte on peut par exemple écrire :

$$\boxed{(AB = AC) \text{ et } (BA = BC).}$$

2. Pour exprimer que $\mathcal{T}$ n'est pas équilatéral, il suffit de nier la relation précédente, soit :

$$(AB \neq AC) \text{ ou } (BA \neq BC).$$

Exercice 5 :

Table de vérité de $P \Rightarrow Q$.

P	Q	$\text{non } P$	$(\text{non } P) \text{ ou } Q$	$P \Rightarrow Q$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Exercice 6 :

- Si P est fausse alors $\text{non } P$ est vraie et, par définition du *ou*, l'assertion $(\text{non } P) \text{ ou } Q$ est alors vraie.
- Supposons P vraie et $P \Rightarrow Q$ vraie. Alors $(\text{non } P) \text{ ou } Q$ est vraie et, comme $\text{non } P$ est fausse (puisque P est vraie), la définition du *ou* exige que Q soit vraie.

Exercice 7 :

Table de vérité de $P \Leftrightarrow Q$.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Exercice 8 :

Soit P , Q et R trois assertions.

1. Vu qu'il y a 3 assertions et que chacune peut être soit vraie soit fausse, il y a 2^3 possibilités et il nous faut donc une table de vérité possédant 8 lignes, ce qui donne :

P	Q	R	$P \text{ ou } Q$	$(P \text{ ou } Q) \text{ ou } R$	$P \text{ ou } (Q \text{ ou } R)$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V
F	F	V	F	V	V
F	F	F	F	F	F

On en déduit que les assertions $(P \text{ ou } Q) \text{ ou } R$ et $P \text{ ou } (Q \text{ ou } R)$ sont (logiquement) équivalentes, ce qui s'écrit aussi :

$$(P \text{ ou } Q) \text{ ou } R \Leftrightarrow P \text{ ou } (Q \text{ ou } R).$$

2. En appliquant le résultat précédent aux assertions $\text{non } P$, $\text{non } Q$ et $\text{non } R$, on obtient :

$$((\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q)) \text{ ou } (\text{non } R) \Leftrightarrow (\text{non } P) \text{ ou } ((\text{non } Q) \text{ ou } (\text{non } R)). \quad (*)$$

- D'après la proposition 1, l'assertion : $\text{non}((\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q)) \text{ ou } (\text{non } R)$ s'écrit aussi :

$$(\text{non}((\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q))) \text{ et } (\text{non } (\text{non } R))$$

et donc :

$$((\text{non}(\text{non } P)) \text{ et } (\text{non } (\text{non } Q))) \text{ et } R$$

soit encore :

$$(P \text{ et } Q) \text{ et } R.$$

- De même l'assertion : $\text{non}((\text{non } P) \text{ ou } ((\text{non } Q) \text{ ou } (\text{non } R)))$ s'écrit aussi :

$$(\text{non } (\text{non } P)) \text{ et } (\text{non } ((\text{non } Q) \text{ ou } (\text{non } R)))$$

et donc :

$$P \text{ et } ((\text{non } (\text{non } Q)) \text{ et } (\text{non } (\text{non } R)))$$

soit encore :

$$P \text{ et } (Q \text{ et } R).$$

En prenant les négations des deux membres de l'équivalence (*) on en déduit :

$$\boxed{((P \text{ et } Q) \text{ et } R) \Leftrightarrow (P \text{ et } (Q \text{ et } R))}.$$

Remarque : On se réfère à la relation prouvée en question 1. (resp. en question 2.) en parlant de l'associativité du *ou* (resp. de l'associativité du *et*).

Exercice 9 :

Le *ou* ayant été défini comme un connecteur binaire (reliant deux assertions) on pourrait penser que $P \text{ ou } Q \text{ ou } R$ est une écriture syntaxiquement incorrecte.

- En revanche on sait donner un sens à l'assertion : $P \text{ ou } (Q \text{ ou } R)$ et à l'assertion $(P \text{ ou } Q) \text{ ou } R$.
- Comme on a vu dans l'exercice 8 que ces deux dernières assertions sont équivalentes, on convient que $P \text{ ou } Q \text{ ou } R$ représente soit l'une soit l'autre, ce qui permet de lui donner un sens.

Il en est de même pour l'assertion $P \text{ et } Q \text{ et } R$.

Remarque : il n'était pas possible d'utiliser le même stratagème avec la double égalité de l'exercice 4 car l'écriture $(AB = BC) = CA$ n'a aucun sens vu que

- d'une part, $(AB = BC)$ est de type Vrai/Faux
(en informatique une telle quantité, résultant d'un test, est appelée *booléen*)
- d'autre part, CA est une longueur.

Exercice 10 :

1. $\mathcal{T}$ est un triangle isocèle lorsqu'il a deux côtés égaux, ce qui s'écrit encore

$$\boxed{(AB = AC) \text{ ou } (BA = BC) \text{ ou } (CA = CB)}.$$

2. Pour exprimer que $\mathcal{T}$ n'est pas isocèle, il suffit de nier la relation précédente, ce qui donne :

$$\boxed{(AB \neq AC) \text{ et } (BA \neq BC) \text{ et } (CA \neq CB)}.$$

Exercice 11 :

1. Pour prouver $(P \text{ et } (Q \text{ ou } R)) \Leftrightarrow ((P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R))$,
il suffit de construire une table de vérité à 8 lignes permettant de vérifier que l'assertion $(P \text{ et } (Q \text{ ou } R))$ et l'assertion $((P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R))$ ont les mêmes valeurs de vérité.
2. En utilisant ce que l'on vient de démontrer avec $\text{non } P$, $\text{non } Q$ et $\text{non } R$, on obtient :

$$((\text{non } P) \text{ et } ((\text{non } Q) \text{ ou } (\text{non } R))) \Leftrightarrow (((\text{non } P) \text{ et } (\text{non } Q)) \text{ ou } ((\text{non } P) \text{ et } (\text{non } R))).$$

En prenant les négations des deux membres de cette équivalence, comme dans la seconde question de l'exercice 8, on en déduit

$$(P \text{ ou } (Q \text{ et } R)) \Leftrightarrow ((P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)).$$

Remarque : On se réfère souvent à la relation obtenue en première (resp. en seconde) question, en parlant de distributivité du *et* sur le *ou* (resp. distributivité du *ou* sur le *et*).

Exercice 12 :

1. **Recherche de démonstration :** On pourrait construire une table de vérité à 8 lignes et c'est ce qu'il est logique de faire dans un premier temps. Mais comme on voit alors que la réponse à la question posée est négative, il n'est pas utile de recopier tout cela !

Pour prouver que les deux assertions $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$ et $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ ne sont pas équivalentes quelles que soient les assertions P , Q et R , il suffit d'un contre-exemple.

Si P et R sont fausses alors (par définition de l'implication)

- l'assertion $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ est vraie puisque P est fausse ;
- l'assertion $P \Rightarrow Q$ est tout aussi vraie, et, comme R est fausse, l'assertion $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$ est fausse par définition de l'implication.

En revanche

- d'une part on ne va pas recopier tout ce qui précède, qui concerne la phase de recherche ;
- d'autre part il faut effectivement justifier qu'il existe des assertions P , Q et R vérifiant les propriétés dont on a besoin.

D'où la rédaction que l'on rendra comme solution.

Démonstration :

Soit P l'assertion $1 = 2$ et R l'assertion $1 = 2$, toutes deux fausses. Alors

- l'assertion $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ est vraie, puisque P est fausse ;
- l'assertion $P \Rightarrow Q$ est aussi vraie, et, comme R est fausse, l'assertion $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$ est fausse par définition de l'implication.

Par suite

$$\text{les assertions } (P \Rightarrow Q) \Rightarrow R \text{ et } P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) \text{ ne sont pas (toujours) équivalentes.}$$

2. En ce qui concerne l'assertion $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$, on retrouve un problème analogue à celui rencontré
 - lors de l'écriture d'une relation du type $AB = BC = CA$;
 - lors de l'écriture d'une relation du type $P \text{ ou } Q \text{ ou } R$.

J'espère que vous vous souvenez de ces questions et de la façon dont on les a résolues.

- Si les réponses apportées ne sont pas immédiatement présentes à votre esprit (et cela doit être le cas pour la majorité d'entre vous) vous devez commencer, à partir des vagues formulations ci-dessus, par reformuler précisément les questions correspondantes, puis y réfléchir et y apporter une réponse que vous devez être capable de justifier.
- Si nécessaire vous pourrez alors tourner quelques pages pour vérifier ce que vous venez de faire. Cela peut vous paraître bien long (bien plus long que d'aller voir directement la solution) mais c'est ainsi que vous assimilerez ce que vous faites et que vous progresserez.

Rappelons donc que

- dans le cas de $AB = BC = CA$: on ne peut donner de sens ni à $(AB = BC) = CA$ ni à $AB = (BC = CA)$;
- dans le cas de $P \text{ ou } Q \text{ ou } R$: les assertions $(P \text{ ou } Q) \text{ ou } R$ et $P \text{ ou } (Q \text{ ou } R)$ sont équivalentes et $P \text{ ou } Q \text{ ou } R$ désigne donc l'une des deux écritures possible.

Dans le cas de $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$, on vient de voir que les assertions $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$ et $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ ont un sens mais ne sont pas équivalentes : par suite nous ne pouvons donc pas donner de sens à l'assemblage $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$.

Exercice 13 :

Recherche de démonstration :

- Bien sûr on peut construire les tables des vérité de l'assertion $\text{non}(P \Rightarrow Q)$ et de l'assertion $P \text{ et } \text{non } Q$, et vérifier que ce sont les mêmes.
- Mais il est plus rapide de revenir à la définition de $P \Rightarrow Q$.

Démonstration : Par définition, $P \Rightarrow Q$ est l'assertion $(\text{non } P) \text{ ou } Q$.

Par suite sa négation est $\text{non}((\text{non } P) \text{ ou } Q)$ ou encore

$$(\text{non}(\text{non } P)) \text{ et } (\text{non } Q)$$

et donc

$$\boxed{\text{la négation de } P \Rightarrow Q \text{ est } P \text{ et } \text{non } Q.}$$

Exercice 14 :

Par définition de l'implication, l'assertion $(\text{non } Q) \Rightarrow (\text{non } P)$ s'écrit encore

$$(\text{non}(\text{non } Q)) \text{ ou } (\text{non } P)$$

qui s'écrit encore $Q \text{ ou } (\text{non } P)$, équivalente à $(\text{non } P) \text{ ou } Q$. Ainsi

$$\boxed{(\text{non } Q) \Rightarrow (\text{non } P) \text{ est équivalente à } P \Rightarrow Q.}$$

Exercice 15 :

Table de vérité de $((P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \Rightarrow R) \text{ et } (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow R$.

P	Q	R	$A : P \text{ ou } Q$	$B : P \Rightarrow R$	$C : Q \Rightarrow R$	$A \text{ et } B \text{ et } C$	$(A \text{ et } B \text{ et } C) \Rightarrow R$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	F	F	V
F	F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	F	V	V	F	V

La table de vérité prouve donc que

$$\boxed{((P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \Rightarrow R) \text{ et } (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow R \text{ est vraie.}}$$

Quand on fait un raisonnement par disjonction des cas avec les notations précédant cet exercice, on sait que l'assertion $(P \text{ ou } Q)$, l'assertion $(P \Rightarrow R)$ et l'assertion $(Q \Rightarrow R)$ sont vraies, et donc que

$$((P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \Rightarrow R) \text{ et } (Q \Rightarrow R)) \text{ est vraie.}$$

Comme $((P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \Rightarrow R) \text{ et } (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow R$ est vraie, on en déduit que $\boxed{R \text{ est vraie.}}$

Exercice 16 :

Table de vérité de $\left(((\text{non}P) \Rightarrow Q) \text{ et } ((\text{non}P) \Rightarrow (\text{non}Q)) \right) \Rightarrow P$.

P	Q	$\text{non}P$	$A : (\text{non}P) \Rightarrow Q$	$B : (\text{non}P) \Rightarrow (\text{non}Q)$	$A \text{ et } B$	$(A \text{ et } B) \Rightarrow P$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	F	F	V
F	F	V	F	V	F	V

Quand on fait un raisonnement par l'absurde avec les notations précédant cet exercice, on sait que l'assertion $(\text{non}P) \Rightarrow Q$ et l'assertion $(\text{non}P) \Rightarrow (\text{non}Q)$ sont vraies, et donc que

$$((\text{non}P) \Rightarrow Q) \text{ et } ((\text{non}P) \Rightarrow (\text{non}Q)) \text{ est vraie.}$$

Comme $((\text{non}P) \Rightarrow Q) \text{ et } ((\text{non}P) \Rightarrow (\text{non}Q)) \Rightarrow P$ est vraie, on en déduit que P est vraie.

Exercice 17 :

On a vu dans l'exercice 12 que $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$ n'a aucun sens.

En fait quand vous écrivez ce genre de chose dans une copie c'est pour faire progresser un raisonnement. Pour avoir quelque chose de correct, il faudrait alors écrire

$$((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R) \text{ est vrai.}$$

Si de plus on sait que P est vrai alors il faudrait écrire

$$(P \text{ et } (P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow R \text{ est vrai.}$$

Vous voyez que cela devient rapidement illisible et qu'il est vraiment préférable d'utiliser quelques mots de Français, comme dans la rédaction que vous pouvez lire dans cet exposé !

Exercice 18 :

Montrons par l'absurde que " $\sqrt{2}$ est irrationnel" assertion notée P .

Supposons donc $\text{non}P$, c'est-à-dire que " $\sqrt{2}$ est rationnel"

- Il existe donc $r \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathbb{N}^*$ sans diviseurs communs autres que ± 1 tels que $\sqrt{2} = \frac{r}{s}$.
- En élevant au carré l'égalité précédente, on obtient :

$$2s^2 = r^2.$$

Par suite l'entier r^2 est pair et il en est donc de même de r .

On peut ainsi trouver $r_1 \in \mathbb{N}$ tel que $r = 2r_1$.

En remplaçant dans l'égalité $2s^2 = r^2$, on obtient $2s^2 = 4r_1^2$ et donc :

$$s^2 = 2r_1^2$$

ce qui permet de prouver que s^2 et donc s sont pairs.

- Par suite, les entiers r et s admettent 2 comme diviseur commun, ce qui est incompatible avec l'hypothèse qu'ils n'ont pas de diviseurs communs autres que ± 1 .

Remarque : Pour justifier que ce qui précède est bien une application de la proposition précédente, on peut introduire l'assertion Q : " r et s sont sans diviseurs communs autres que 1 et -1 ".

Comme le raisonnement précédent a permis d'obtenir à la fois que Q est vraie et que $\text{non}Q$ est vraie, on en déduit que P est vraie.

Mais usuellement on ne descend jamais à ce genre de détail dans une rédaction.

Exercice 19 :

Comme on sait que l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a aucune solution sur $\mathbb{R}$,

l'assemblage $\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 + 1 = 0$ est une assertion fausse.

Exercice 20 :

Comme on sait que l'équation $x^2 + 1 = 0$ possède (au moins) une solution sur $\mathbb{C}$,

l'assemblage $\exists x \in \mathbb{C} \quad x^2 + 1 = 0$ est une assertion vraie.

Rappel : Dire que cette assertion est vraie signifie que l'équation $x^2 + 1 = 0$ possède (au moins) une solution sur $\mathbb{C}$ mais ne donne aucune information sur cette solution.

Il n'y a pas le moindre objet x dans l'assemblage $\exists x \in \mathbb{C} \quad x^2 + 1 = 0$.

La lettre x qui y figure a le statut de variable muette.

Si l'on veut utiliser une solution de cette équation, il faudra l'introduire grâce à une phrase

- du type : “Soit x_0 une solution complexe de l'équation $x^2 + 1 = 0$ ”,
- ou du type “Soit x_0 un complexe vérifiant $x_0^2 + 1 = 0$ ”.

Exercice 21 :

- L'assemblage $A(x) \Rightarrow B(x)$ est un prédicat de la variable réelle x car pour tout objet $x_0 \in \mathbb{R}$, les assemblages $A(x_0)$ et $B(x_0)$ sont des assertions, et $A(x_0) \Rightarrow B(x_0)$ est donc une assertion. Par suite

$\forall x \in \mathbb{R} \quad (A(x) \Rightarrow B(x))$ est une assertion.

- Comme $A(x)$ est un prédicat, l'assemblage $(\forall x \in \mathbb{R} \quad A(x))$ est une assertion.

Mais comme le x qui y figure est une variable muette, cette assertion peut aussi bien s'écrire :

$$(\forall y \in \mathbb{R} \quad A(y)).$$

- * Ainsi l'assemblage donné peut aussi s'écrire :

$$(\forall y \in \mathbb{R} \quad A(y)) \Rightarrow B(x)$$

- * Comme $B(x)$ est un prédicat de x , on en déduit que

$(\forall x \in \mathbb{R} \quad A(x)) \Rightarrow B(x)$ est un prédicat de la variable x .

Remarque : Comme on vient de le voir : dans ce second énoncé, le x figurant à gauche du symbole “ $\Rightarrow$ ” n'a rien à voir avec le x figurant à droite de ce symbole. Même si un tel énoncé est syntaxiquement correct, vous ne devez jamais l'utiliser à cause des risques de confusion qu'il peut provoquer.

Si vous avez besoin du prédicat précédent utilisez donc une écriture telle que :

$$(\forall y \in \mathbb{R} \quad A(y)) \Rightarrow B(x).$$

Conclusion : Quand on utilise une assertion (et donc pas un prédicat) du style :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad A(x) \Rightarrow B(x)$$

on peut omettre les parenthèses ; il est évident d'après ce qui précède qu'il faut lire :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (A(x) \Rightarrow B(x)).$$

Exercice 22 :

L'assertion donnée est du type $\forall x \in E P(x)$ où $P(x)$ est le prédicat $A(x) \Rightarrow B(x)$.

- En appliquant la première règle de l'axiome précédent on obtient que sa négation est :

$$\exists x \in E \quad \text{non}(A(x) \Rightarrow B(x)).$$

- Ce qui, avec la règle de négation d'une implication, devient :

$$\boxed{\exists x \in E \quad A(x) \text{ et } \text{non}(B(x)).}$$

Exercice 23 :

La relation : $\forall x \in E A(x) \Leftrightarrow B(x)$ s'écrit aussi :

$$\forall x \in E \quad (A(x) \Rightarrow B(x)) \text{ et } (B(x) \Rightarrow A(x)).$$

Par suite sa négation s'écrit donc

$$\exists x \in E \left(A(x) \text{ et } (\text{non } B(x)) \right) \text{ ou } \left(B(x) \text{ et } (\text{non } A(x)) \right)$$

Vu la complexité de cette relation, on comprend pourquoi il est recommandé de ne pas essayer de démontrer une équivalence par l'absurde !

Exercice 24 :

1. Pour écrire autrement $\exists ! x \in E A(x)$, il suffit de traduire l'existence et l'unicité.

On peut par exemple écrire :

$$(\exists x \in E A(x)) \text{ et } (\forall x \in E \forall y \in E (A(x) \text{ et } A(y)) \Rightarrow x = y)$$

2. En appliquant les règles on obtient que la négation de la relation précédente est :

$$(\text{non}(\exists x \in E A(x))) \text{ ou } (\text{non}(\forall x \in E \forall y \in E (A(x) \text{ et } A(y)) \Rightarrow x = y))$$

ou encore :

$$(\forall x \in E \text{ non } A(x)) \text{ ou } (\exists x \in E \exists y \in E \text{ non}((A(x) \text{ et } A(y)) \Rightarrow x = y))$$

et donc

$$(\forall x \in E \text{ non } A(x)) \text{ ou } (\exists x \in E \exists y \in E (A(x) \text{ et } A(y) \text{ et } x \neq y)).$$

Au vu de la complexité de l'assertion précédente on comprend pourquoi il est déconseillé, dans la plupart des cas, d'utiliser ce pseudo-quantificateur " $\exists !$ ".

De toutes façons c'est une bonne habitude lorsque l'on rencontre ce genre d'assertion, concernant existence et unicité, de bien distinguer la partie "unicité" de la partie "existence".

Exercice 25 :

Dans l'assemblage : $\exists x \in \mathbb{R} x + y^2 = 0$, la lettre x est quantifiée et donc muette.

En revanche le y n'est pas quantifiée. Par suite $\boxed{\text{c'est un prédicat de la variable } y.}$

Ce prédicat est défini pour tout y réel, voire pour tout y complexe.

Exercice 26 :

Comme $P(y)$ est un prédicat en y , l'assemblage $\exists y \in \mathbb{R} P(y)$ est une assertion.

Soit $y_0 \in \mathbb{R}$.

- Si on prend $x = -y_0^2$ on a trouvé un $x \in \mathbb{R}$ tel que $x + y_0^2 = 0$, ce qui prouve que

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad x + y_0^2 = 0.$$

- Par suite $P(y_0)$ est vraie.

On en déduit que $\boxed{\forall y \in \mathbb{R} \quad P(y) \text{ est vraie.}}$

Exercice 27 :**Recherche de démonstration :**

L'assertion donnée s'écrit aussi : $\forall x \in \mathbb{R} \quad (\exists y \in \mathbb{R} \quad x \leq y)$.

ou encore : $\forall x \in \mathbb{R} P(x)$ où $P(x)$ est le prédicat : $\exists y \in \mathbb{R} \quad x \leq y$.

D'après sa structure, pour la démontrer on prend un réel x_0 quelconque

et il reste alors à prouver l'assertion :

$$\exists y \in \mathbb{R} \quad x_0 \leq y.$$

Pour cela il suffit de construire un y répondant au problème, ce qui n'est pas difficile.

Rédaction de démonstration :

Montrons : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x \leq y$.

Soit donc x_0 un réel fixé quelconque.

Comme le réel $y_0 = x_0$ vérifie $x_0 \leq y_0$, on en déduit que : $\exists y \in \mathbb{R} \quad x_0 \leq y$ est vraie.

Par suite on a prouvé que $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x \leq y \text{ est vraie.}}$

Exercice 28 :**Recherche de démonstration :**

L'assertion donnée s'écrit aussi : $\exists x \in I \quad (\forall y \in I \quad y \leq x)$.

ou encore : $\exists x \in I P(x)$ où $P(x)$ est le prédicat : $\forall y \in I \quad y \leq x$.

D'après sa structure, pour la prouver on a besoin de trouver (construire, exhiber) un réel x_0 vérifiant

$$\forall y \in I \quad y \leq x_0.$$

Il faut donc exhiber un réel x_0 pour lequel on pourra montrer : $\forall y \in I \quad y \leq x_0$.

Vu la structure de cette dernière assertion, pour la montrer il faut prendre un y_0 quelconque de I puis montrer $y_0 \leq x_0$.

Rédaction de démonstration :

Soit $I = [0, 1]$. Montrons : $\exists x \in I \quad \forall y \in I \quad y \leq x$.

Posons $x_0 = 1$.

Comme $I = [0, 1]$ on a alors : $\forall y \in I \quad y \leq x$

Par suite on a prouvé :

$$\boxed{\exists x \in I \quad \forall y \in I \quad y \leq x.}$$

Exercice 29 :

Pour exprimer que tout réel positif est le carré d'un réel, il suffit d'écrire :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x = y^2.}$$

Remarques :

- L'assertion précédente est une traduction presque mot à mot la phrase donnée!
- J'espère que vous avez bien lu l'énoncé et que vous n'avez pas perdu une seconde à tenter une démonstration car l'énoncé vous demandait juste d'écrire une assertion, pas de la démontrer.

Exercice 30 :

Encore une fois il s'agit d'une traduction presque mot à mot la phrase donnée !

Pour exprimer “pour tout réel a , si s_a s'annule sur $\mathbf{R}$ alors $a \leq 0$ ” on écrit :

$$\boxed{\forall a \in \mathbf{R} \quad (\exists x \in \mathbf{R} \quad x^2 + a = 0) \Rightarrow a \leq 0.}$$

Remarques :

- Dans l'assertion précédente, la partie

$$(\exists x \in \mathbf{R} \quad x^2 + a = 0)$$

est un prédicat de la variable a (dans laquelle x est une variable muette) qui traduit la phrase “ s_a s'annule” (phrase qui, elle aussi, ne contient aucun x).

- Dans ce cas il est déconseillé de supprimer les parenthèses car l'assertion

$$\forall a \in \mathbf{R} \quad \exists x \in \mathbf{R} \quad (x^2 + a = 0 \Rightarrow a \leq 0)$$

est syntaxiquement correcte mais ne traduit absolument pas ce que l'on veut.

Exercice 31 :

Posons $Q(x)$ le prédicat : $\exists y \in \mathbf{R} \quad x + y^2 = 0$.

- Soit x_0 un réel négatif.

Alors $y = \sqrt{-x_0}$ vérifie $x_0 + y^2 = 0$ et donc : $\exists y \in \mathbf{R} \quad x_0 + y^2 = 0$ est vraie.

- Soit x_0 un réel strictement positif.

Alors pour $y \in \mathbf{R}$ on a $x_0 + y^2 \geq x_0 > 0$ et l'équation $x_0 + y^2 = 0$ n'a aucune solution.

Par suite : $\exists y \in \mathbf{R} \quad x_0 + y^2 = 0$ est une assertion fausse.

En conclusion $\boxed{\text{le prédicat } Q(x) \text{ est vrai si, et seulement si, } x \text{ est un réel négatif.}}$

Remarque : Vous avez déjà rencontré, sous une autre forme, le genre de question que l'on vient de se poser : en fait il s'agit de discuter de l'équation $x + y^2 = 0$, considérée comme une équation en y et dans laquelle x est un paramètre ; la traduction en français de $Q(x)$ pourrait être :

“pour la valeur x du paramètre, l'équation $x + y^2 = 0$ possède (au moins) une racine”, énoncé qui est vrai si, et seulement si, x est un réel négatif.

Exercice 32 :

1. **Recherche de démonstration :** Pour prouver l'équivalence

$$\left(\forall x \in E \quad (A(x) \text{ et } B(x)) \right) \Leftrightarrow \left((\forall x \in E \quad A(x)) \text{ et } (\forall x \in E \quad B(x)) \right)$$

il suffit de prouver deux implications.

Pour montrer une implication $P \Rightarrow Q$ on suppose évidemment que P est vraie.

Rédaction de démonstration :

- Montrons d'abord l'implication :

$$\left(\forall x \in E \quad (A(x) \text{ et } B(x)) \right) \Rightarrow \left((\forall x \in E \quad A(x)) \text{ et } (\forall x \in E \quad B(x)) \right). \quad (i)$$

Supposons donc :

$$\forall x \in E \quad (A(x) \text{ et } B(x)). \quad (iii)$$

Il reste alors prouver

$$(\forall x \in E A(x)) \text{ et } (\forall x \in E B(x)).$$

* Soit donc x_0 un élément de E .

Comme (iii) est vraie l'assertion $A(x_0)$ et $B(x_0)$ est vraie et donc $A(x_0)$ est vraie.

Par suite on a prouvé :

$$\forall x \in E A(x).$$

* On démontre de même : $\forall x \in E B(x)$.

Des deux démonstrations précédentes, on déduit

$$(\forall x \in E A(x)) \text{ et } (\forall x \in E B(x))$$

ce qui termine la démonstration de la première implication (i).

- Montrons ensuite l'implication

$$\left((\forall x \in E A(x)) \text{ et } (\forall x \in E B(x)) \right) \Rightarrow (\forall x \in E (A(x) \text{ et } B(x))). \quad (ii)$$

Supposons donc

$$\left((\forall x \in E A(x)) \text{ et } (\forall x \in E B(x)) \right) \quad (iv)$$

et montrons

$$(\forall x \in E (A(x) \text{ et } B(x))).$$

Soit donc x_0 un élément de E .

D'après (iv) on sait que les assertions $(\forall x \in E A(x))$ et $(\forall x \in E B(x))$ sont vraies.

* Par suite $(\forall x \in E A(x))$ est vraie et donc $A(x_0)$ est vrai.

* On prouve de même que $B(x_0)$ est vraie.

De ces deux points on déduit que $A(x_0)$ et $B(x_0)$ est vraie.

Par suite on a :

$$(\forall x \in E (A(x) \text{ et } B(x))).$$

ce qui termine la démonstration de la seconde implication (ii).

De ces deux implications on déduit

$$\boxed{(\forall x \in E (A(x) \text{ et } B(x))) \Leftrightarrow ((\forall x \in E A(x)) \text{ et } (\forall x \in E B(x)))}$$

2. Recherche de démonstration : Démarche analogue à celle de la question précédente.

Rédaction de démonstration :

- Montrons d'abord l'implication :

$$(\exists x \in E (A(x) \text{ ou } B(x))) \Rightarrow ((\exists x \in E A(x)) \text{ ou } (\exists x \in E B(x))) \quad (i)$$

Supposons donc :

$$\exists x \in E (A(x) \text{ ou } B(x)). \quad (iii)$$

Il reste alors prouver :

$$(\exists x \in E A(x)) \text{ ou } (\exists x \in E B(x)).$$

Comme (iii) est vrai on peut trouver x_0 dans E tel que $A(x_0)$ ou $B(x_0)$ est vraie.

Raisonnons par disjonction des cas

* Si $A(x_0)$ est vraie alors $\exists x \in E A(x)$ est vrai et donc on a

$$(\exists x \in E A(x)) \text{ ou } (\exists x \in E B(x)).$$

* Si $B(x_0)$ est vraie alors $\exists x \in E B(x)$ est vrai et donc on a

$$(\exists x \in E A(x)) \text{ ou } (\exists x \in E B(x)).$$

Par suite on a :

$$(\exists x \in E A(x)) \text{ ou } (\exists x \in E B(x))$$

ce qui termine la démonstration de la première implication (i).

- Montrons ensuite l'implication :

$$\left((\exists x \in E A(x)) \text{ ou } (\exists x \in E B(x)) \right) \Rightarrow \left(\exists x \in E (A(x) \text{ ou } B(x)) \right) \quad (ii)$$

Supposons donc

$$(\exists x \in E A(x)) \text{ ou } (\exists x \in E B(x)) \quad (iv)$$

et raisonnons par disjonction des cas.

- * Supposons que : $\exists x \in E A(x)$ est vraie.

Alors on peut trouver un élément x_0 de E tel que $A(x_0)$ est vraie.

Par suite $A(x_0) \text{ ou } B(x_0)$ est vraie et on en déduit :

$$\exists x \in E (A(x) \text{ ou } B(x)).$$

- * On traite de même le cas où $\exists x \in E A(x)$ est vraie.

De ces deux points on déduit que $\exists x \in E (A(x) \text{ ou } B(x))$ est vraie,

ce qui termine la démonstration de l'implication (ii).

De ces deux implications on déduit :

$$\boxed{\exists x \in E (A(x) \text{ ou } B(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in E A(x)) \text{ ou } (\exists x \in E B(x)).}$$

3. Recherche de démonstration :

- Pour prouver l'implication, on va supposer que le membre de gauche est vrai, et démontrer le membre de droite.

Comme l'hypothèse est du type $P \text{ ou } Q$ on peut penser à une méthode par disjonction des cas.

- Pour prouver qu'il est impossible en général de prouver l'implication réciproque, il suffit de donner un contre-exemple, c'est-à-dire de donner un ensemble E , un prédicat A et un prédicat B pour lesquels l'implication réciproque est fausse, et donc tels que

$$\forall x \in E (A(x) \text{ ou } B(x)) \text{ est vraie}$$

alors que :

$$(\forall x \in E A(x)) \text{ ou } (\forall x \in E B(x)) \text{ est fausse.}$$

Rédaction de démonstration : Montrons

$$\left((\forall x \in E A(x)) \text{ ou } (\forall x \in E B(x)) \right) \Rightarrow \left(\forall x \in E (A(x) \text{ ou } B(x)) \right).$$

Supposons donc

$$(\forall x \in E A(x)) \text{ ou } (\forall x \in E B(x))$$

et montrons :

$$\forall x \in E (A(x) \text{ ou } B(x)).$$

- Premier cas : supposons $\forall x \in E A(x)$ et montrons $\forall x \in E (A(x) \text{ ou } B(x))$.

Soit donc x_0 un élément donné de E .

Par hypothèse $A(x_0)$ est vraie ; par suite $A(x_0) \text{ ou } B(x_0)$ est vraie.

On a ainsi prouvé : $\forall x \in E (A(x) \text{ ou } B(x))$.

- Second cas : en supposant $(\forall x \in E B(x))$ on montre de même :

$$\forall x \in E (A(x) \text{ ou } B(x)).$$

Par disjonction des cas on en déduit que $\forall x \in E (A(x) \text{ ou } B(x))$ est vraie, ce qui termine la démonstration et prouve

$$\boxed{\left((\forall x \in E A(x)) \text{ ou } (\forall x \in E B(x)) \right) \Rightarrow \left(\forall x \in E (A(x) \text{ ou } B(x)) \right).}$$

Montrons qu'il est impossible de prouver l'implication réciproque en donnant un contre-exemple.

Dans $\mathbb{R}$ définissons

- le prédicat $A(x)$ comme étant : $x \geq 0$,
- le prédicat $B(x)$ comme étant : $x \leq 0$.

Alors on a : $\forall x \in \mathbb{R} \ A(x) \text{ ou } B(x)$ alors que

- les assertions $(\forall x \in \mathbb{R} \ A(x))$ ainsi que $(\forall x \in \mathbb{R} \ B(x))$ sont fausses,
- et donc l'assertion $(\forall x \in \mathbb{R} \ A(x)) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R} \ B(x))$ est fausse.

Par suite il est impossible de démontrer l'implication réciproque.

4. Démonstration analogue à celle de la question précédente.

Pour le contre-exemple on peut utiliser les deux prédicats définis sur $\mathbb{R}$

$$A(x) : x > 0 \quad \text{et} \quad B(x) : x < 0$$

pour lesquels

- l'assertion $(\exists x \ x > 0) \text{ et } (\exists x \ x < 0)$ est vraie,
- l'assertion $\exists x \ (x > 0 \text{ et } x < 0)$ est fausse.

Exercice 33 :

1. Avec les règles données précédemment on obtient automatiquement la négation de

$$\exists y \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad x \leq y$$

qui est

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad \text{non}(x \leq y)$$

ou encore

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad x > y.$$

2. Montrons : $\forall y \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad x > y$.

Soit donc y_0 un réel fixé quelconque.

Comme le réel $x_0 = y_0 + 1$ vérifie $x_0 > y_0$, on en déduit que : $\exists x \in \mathbb{R} \quad x > y_0$ est vraie.

Par suite on a prouvé que : $\forall y \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad x > y$ est vraie.

Par suite sa négation $\forall y \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad x > y$ est fausse.

Exercice 34 :

1. L'assertion “la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang” s'obtient par traduction de la phrase (certes un peu lourde en français) :

“il existe un rang tel qu'à partir de ce rang, la suite soit croissante”,

ce qui donne : $\exists n \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad (p \geq n \Rightarrow u_{p+1} \geq u_p)$.

2. Il est alors possible alors d'écrire automatiquement la négation de cette assertion :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad (p \geq n \text{ et } u_{p+1} < u_p) \quad \text{ou aussi} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad p \geq n \text{ et } u_{p+1} < u_p.$$

Remarque : Pour écrire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang certains écrivent parfois

$$\exists n \in \mathbb{N} \quad p \geq n \Rightarrow u_{p+1} \geq u_p$$

en omettant le “ $\forall p$ ” avec le principe que : “dire qu'un énoncé dépendant d'un p non quantifié est vrai signifie qu'il est vrai pour tout p ”. Une telle pratique est très dangereuse pour un débutant car

- il risque alors de remettre le “ $\forall p$ ” au mauvais endroit,
- il lui est alors beaucoup plus difficile voire impossible d'écrire correctement sa négation.

Je vous conseille donc de faire apparaître tous les quantificateurs.

Exercice 35 :

Avec les règles données, on obtient automatiquement la négation de :

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq M \tag{a)}$$

qui est

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) > M. \tag{b)}$$

Remarque : Comme nous le reverrons dans un autre exercice, l'assertion (i) énonce que la fonction f est majorée. Par suite l'assertion (ii) énonce que la fonction f n'est pas majorée.

Exercice 36 :

Avec les règles données, on obtient automatiquement la négation de :

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad (p \geq n \Rightarrow u_p \geq M) \quad (i)$$

qui est

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad \text{non}(p \geq n \Rightarrow u_p \geq M)$$

ou encore (cf. négation d'une implication page 8)

$$\boxed{\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad p \geq n \text{ et } u_p < M).} \quad (ii)$$

Remarque : Comme vous l'avez peut-être déjà vu, l'assertion (i) énonce que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. Par suite l'assertion (ii) énonce que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers $+\infty$.

Exercice 37 :

Pour exprimer $E \neq F$ il suffit de nier la relation $E = F$, cette dernière s'écrivant :

$$(\forall x \in E \quad x \in F) \text{ et } (\forall x \in F \quad x \in E).$$

- La règle de négation du *et* nous dit que la négation de ce qui précède est :

$$\left(\text{non}(\forall x \in E \quad x \in F) \right) \text{ ou } \left(\text{non}(\forall x \in F \quad x \in E) \right)$$

- En appliquant (deux fois) la règle de négation du quantificateur “ $\forall$ ”, cela devient :

$$\boxed{(\exists x \in E \quad x \notin F) \text{ ou } (\exists x \in F \quad x \notin E).}$$

Exercice 38 :

Recherche de démonstration : Pour éviter de raconter n'importe quoi la bonne technique consiste à nier la forme développée de l'assertion $F \subset E$.

Réponse : Comme $F \subset E$ s'écrit : $\forall x \in F \quad x \in E$, sa négation est donc :

$$\boxed{\exists x \in F \quad x \notin E.}$$

Exercice 39 :

Supposons $A \subset B$ et $B \subset C$.

Pour prouver $A \subset C$ montrons que : $\forall x \in A \quad x \in C$.

Soit donc $x_0 \in A$.

- Comme $A \subset B$, on sait que $x_0 \in B$.
- Comme $B \subset C$, on en déduit que $x_0 \in C$.

Par suite on a prouvé : $\forall x \in A \quad x \in C$ et donc $\boxed{A \subset C.}$

Remarque : l'indication était là pour vous guider dans cette démonstration qui est la première de ce type mais dans la partie III. vous apprendrez à vous en passer.

Exercice 40 :

L'assertion : $\forall x \in \emptyset \quad P(x)$ n'est que la négation de l'assertion : $\exists x \in \emptyset \quad P(x)$.

Par suite il est équivalent de dire que l'une est fausse ou que l'autre est vraie.

Exercice 41 :

Si $E = \{1, 2\}$, alors on a :

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}.$$

Remarque : Pour être sûr de n'oublier aucun élément de $\mathcal{P}(E)$, ou ce qui est équivalent aucune partie de E , le mieux est de les classer en fonction de leur nombre d'éléments :

- les parties à 0 élément; en fait il n'y en a qu'une : $\emptyset$;
- les parties à 1 élément, encore appelées *singletons*; il y en a deux : $\{1\}$ et $\{2\}$;
- les parties à 2 éléments; ici il n'y en a qu'une : $E = \{1, 2\}$.

Dans ce cas de l'ensemble $E = \{1, 2\}$, il ne peut y avoir d'autre partie.

Exercice 42 :

Si $E = \{1, 2, 3\}$, alors on a

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Remarque : Ici aussi on a classé les parties d'après leur nombre d'éléments : 0, 1, 2 ou 3.

Exercice 43 :

Pour $x \in \mathbf{R}$, on a évidemment : $x^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$.

On en déduit : $E = [-2, 2]$.

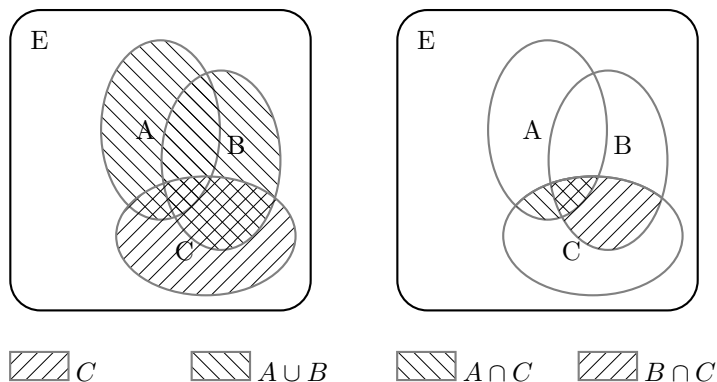
Exercice 44 :

Pour $x \in \mathbf{R}$, on a évidemment : $x^2 \geq 4 \Leftrightarrow (x \leq -2) \text{ ou } (x \geq 2)$.

On en déduit : $E =]-\infty, -2] \cup [2, \infty[$.

Exercice 45 :

Dessin illustrant la relation : $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.



Exercice 46 :

Pour utiliser les règles de distributivité, il faut écrire $(A \setminus B)$ et $(B \setminus A)$ à l'aide de l'opération complémentaire, ce qui donne :

$$A \Delta B = (A \cap \complement B) \cup (B \cap \complement A).$$

En utilisant la distributivité de $\cup$ sur $\cap$ on obtient :

$$A \Delta B = (A \cup B) \cap (A \cup \complement A) \cap (\complement B \cup B) \cap (\complement B \cup \complement A)$$

Comme $(A \cup \complement A) = (\complement B \cup B) = E$ on en déduit

$$A \Delta B = (A \cup B) \cap (\complement B \cup \complement A)$$

Enfin l'utilisation de $(\complement B \cup \complement A) = \complement(B \cap A)$ donne :

$$A \Delta B = (A \cup B) \cap \complement(B \cap A)$$

et donc

$$A \Delta B = A \cup B \setminus (A \cap B).$$

Remarque : Même si la méthode de double inclusion est la première à laquelle penser pour prouver l'égalité de deux ensembles, le calcul précédent montre qu'il y en a d'autres !

Exercice 47 :

1. Quand je pose cette question en classe en début d'année j'obtiens en général une moyenne de 4 copies doubles et donc d'environ 15 pages (à cause de la première).
2. Là aussi j'ai facilement des réponses allant de 15 mn à 1 h 30 par individu. Après un minimum d'échanges la moyenne s'établit souvent autour de 45 mn pour corriger le devoir d'un élève.
3. Après souvent un douloureux calcul, on se rend alors compte que cela fait donc plus de 30 heures pour une classe de 42 élèves, ce qui est évidemment impensable.
4. Si inversement on part de 12 heures pour corriger le paquet de copies, cela fait entre 15 et 20 mn par élèves et donc de l'ordre de 1 mn par page.

Conclusion : il est bon de méditer les ordres de grandeur précédents afin d'améliorer le plus possible l'attrait de votre copie, en soignant la présentation, l'orthographe, la qualité de l'expression sans oublier une utilisation correcte de la ponctuation, des accents et de majuscules : en un mot, comme on dirait dans la grande distribution, soigner le "packaging" de votre copie.

Exercice 48 :

Lorsque $E = \{1, 2\}$ et $F = \{1, 2, 3\}$ on a :

$$E \times F = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$$

soit un ensemble de 6 éléments.

Rappel : ne pas oublier que $(1, 2)$ et $(2, 1)$ sont deux éléments distincts (cf. axiome du couple).

Exercice 49 :

Démarche analogue à celle des deux premières questions de l'exercice 32.

Exercice 50 :

1. Pour montrer

$$(\exists x \in E \forall y \in F A(x, y)) \Rightarrow (\forall y \in F \exists x \in E A(x, y))$$

supposons donc :

$$\exists x \in E \forall y \in F A(x, y) \tag{i}$$

et montrons

$$\forall y \in F \exists x \in E A(x, y). \tag{ii}$$

D'après (i) on peut trouver un élément $x_0 \in E$ tel que $\forall y \in F A(x_0, y)$ soit vraie.

Soit y_0 un élément de F .

- D'après ce qui précède $A(x_0, y_0)$ est vraie.
- Par suite l'assertion $\exists x \in E \ A(x, y_0)$ est vraie.

On en déduit que $\forall y \in F \ (\exists x \in E \ A(x, y))$ est vraie, ce qui termine la démonstration de l'implication

$$\boxed{(\exists x \in E \ \forall y \in F \ A(x, y)) \Rightarrow (\forall y \in F \ \exists x \in E \ A(x, y))}.$$

2. En prenant $E = F = \mathbf{R}$ et le prédicat $A(x, y) : x = y$ défini sur $E \times F$, on voit que
- l'assertion $\forall y \in F \ \exists x \in E \ A(x, y)$ est vraie ;
 - l'assertion $\exists x \in E \ \forall y \in F \ A(x, y)$ est fausse.

Par suite $\boxed{\text{il est impossible de prouver l'implication réciproque.}}$

Exercice 51 :

1. Pour exprimer que f est majorée, on écrit : $\exists M \in \mathbf{R} \ \forall x \in \mathbf{R} \ f(x) \leq M$.
Par suite : f non majorée s'obtient en niant cette assertion :

$$\boxed{\forall M \in \mathbf{R} \ \exists x \in \mathbf{R} \ f(x) > M}.$$

2. Comme M n'est pas quantifié, ce n'est pas une variable muette de l'assemblage

$$\forall x \in \mathbf{R} \ f(x) \leq M.$$

Il s'agit donc d'un prédicat en M traduisant : “ f est majorée par M ”.

Exercice 52 :

Recherche de démonstration : le plus simple est d'écrire une assertion correspondante traduisant $f = g$.

Démonstration : Comme $f = g$ s'écrit : $\forall x \in \mathbf{R} \ f(x) = g(x)$, sa négation $f \neq g$ peut s'écrire

$$\boxed{\exists x \in \mathbf{R} \ f(x) \neq g(x)}.$$

Important : Cette façon de faire qui consiste

- à partir de quelque chose de sûr, ici $f = g$ que l'on sait traduire sans hésiter,
- puis à utiliser les règles automatiques de négation des assertions mathématiques,

est la méthode la plus sûre pour obtenir une relation correcte sans hésitation ni angoisse.

Elle est donc à privilégier sans réfléchir !

Remarque : si vous n'avez pas utilisé la méthode précédente, peut-être avez vous écrit

$$\forall x \in \mathbf{R} \ f(x) \neq g(x)$$

qui n'a rien à voir avec la question posée mais traduit que

les fonctions f et g ne prennent jamais la même valeur.

Exercice 53 :

Soit A , B et C trois parties d'un ensemble E . Montrons que

$$A \subset B \Rightarrow A \cap C \subset B \cap C.$$

Supposons donc $A \subset B$ et prouvons $A \cap C \subset B \cap C$.

Soit donc x_0 un élément de $A \cap C$; alors

- x_0 appartient à A , donc à B d'après l'hypothèse $A \subset B$;
- x_0 appartient à C ;

par suite $x_0 \in B \cap C$, ce qui prouve l'inclusion

$$A \cap C \subset B \cap C$$

et termine la démonstration de $\boxed{A \subset B \Rightarrow A \cap C \subset B \cap C}$.

Exercice 54 :

Recherche de démonstration : Pour montrer l'implication : $A \subset B \Rightarrow A \cup C \subset B \cup C$

- on suppose que $A \subset B$,
- il faut ensuite prouver que $A \cup C \subset B \cup C$.

Mais, ici, inutile de “descendre au niveau des éléments”, il suffit d'utiliser le résultat analogue que l'on a établi précédemment avec l'intersection ainsi que quelques relations entre $\cap$, $\cup$ et $\complement$.

Important : à lire avant de continuer !

- Au fait quel est ce résultat analogue concernant la réunion ?
Si vous voulez faire un travail efficace :
 - * vous devez commencer par reformuler par vous même ce résultat en assurant cette relation avec tous les moyens dont vous pouvez disposer (ici surtout des dessins) ;
 - * après (si nécessaire) vous pouvez avoir recours aux pages précédentes pour vérification.
- La démarche précédente peut vous paraître une incroyable perte de temps car il est toujours moins efficace au début d'utiliser une nouvelle méthode mais vous verrez lorsque vous en aurez pris l'habitude que cette re-réflexion du déjà-vu est la meilleure façon d'assimiler les notions et propriétés précédemment rencontrées.

Exercice 55 :

Rédaction de démonstration

Soit A , B et C trois parties d'un ensemble E . Montrons :

$$A \subset B \Rightarrow A \cup C \subset B \cup C.$$

Supposons donc : $A \subset B$. D'après la relation ②5, on a : $\complement B \subset \complement A$.

- Le résultat ②3 appliqué à $\complement A$, $\complement B$ et $\complement C$ nous dit alors que :

$$\complement B \cap \complement C \subset \complement A \cap \complement C.$$

- Avec ②9, on en déduit que :

$$\complement(\complement A \cap \complement C) \subset \complement(\complement B \cap \complement C).$$

- La relation ①9 nous donne alors :

$$\complement(\complement A \cap \complement C) = \complement(\complement A) \cup \complement(\complement C) = A \cup C$$

ainsi que :

$$\complement(\complement B \cap \complement C) = \complement(\complement B) \cup \complement(\complement C) = B \cup C$$

ce qui entraîne :

$$A \cup C \subset B \cup C.$$

Par suite on a prouvé $\boxed{A \subset B \Rightarrow A \cup C \subset B \cup C}$.

Exercice 56 :

Recherche de démonstration : Au départ on dispose donc de deux parties A et B de E , et on veut démontrer une équivalence, c'est-à-dire deux implications.

- On commence par prouver $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$.
Il s'agit d'une implication, donc on suppose $A \subset B$.
Il reste alors à prouver $A \cup B = B$, ce que l'on peut schématiser ainsi

Acquis	Reste à prouver
$A \subset E, B \subset E$ $A \subset B$	$A \cup B = B$

ou encore

Acquis	Reste à prouver
$A \subset E, B \subset E$ $A \subset B$	$A \cup B \subset B$ et $B \subset A \cup B$

- * On commence par prouver $A \cup B \subset B$.
Ce qu'il faut prouver est du type " $\subset$ " :
 - ★ la méthode basique voudrait que l'on prenne un élément de $A \cup B$ puis que l'on prouve qu'il appartienne à B ;
 - ★ mais ici il n'est pas nécessaire de descendre au niveau des éléments car on peut utiliser le résultat ② ...
- * L'inclusion $B \subset A \cup B$ étant vraie pour deux parties A et B quelconques de E , cela termine la démonstration de l'implication

$$A \subset B \Rightarrow A \cup B = B.$$

- On prouve ensuite l'implication : $A \cup B = B \Rightarrow A \subset B$
Il s'agit d'une implication, donc on suppose : $A \cup B = B$.
Il reste alors à prouver $A \subset B$, ce que l'on peut schématiser ainsi

Acquis	Reste à prouver
$A \subset E, B \subset E$ $A \cup B = B$	$A \subset B$

Bien que la conclusion soit du type " $\subset$ " il n'est, encore une fois, pas nécessaire de descendre au niveau des éléments ; il suffit d'utiliser le résultat ① ...

Exercice 57 :**Rédaction de démonstration**

Démontrons $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$ en prouvant deux implications.

- Démontrons : $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$.
Supposons $A \subset B$.
 - * D'après la proposition précédente, on a : $A \cup B \subset B \cup B$;
 - * comme $B \cup B = B$, on en déduit $A \cup B \subset B$.
Comme $B \subset A \cup B$ est vraie d'après ①, on en déduit : $A \cup B = B$.

Par suite on a prouvé $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$.

- Démontrons $A \cup B = B \Rightarrow A \subset B$.
Supposons donc $A \cup B = B$.
Comme $A \subset A \cup B$, on en déduit $A \subset B$.

Par suite on a prouvé $A \cup B = B \Rightarrow A \subset B$.

Exercice 58 :**Recherche de démonstration :**

- La propriété à démontrer est de type “ $\forall A \in \mathcal{P}(E) \dots$ ”.
Donc on commence par prendre une partie A_0 incluse dans E .
- On doit alors prouver une propriété du type $\forall B \in \mathcal{P}(E) Q(B)$ où $Q(B)$ est le prédicat :

$$A_0 \subset B \Leftrightarrow A_0 \cap B = A_0.$$

et donc on fixe une partie B_0 quelconque de E .

- On en arrive alors à devoir prouver l'équivalence : $A_0 \subset B_0 \Leftrightarrow A_0 \cap B_0 = A_0$.
 - * La méthode basique consisterait à travailler par double implication, puis à démontrer, selon le cas, inclusion ou égalité d'ensemble, éventuellement en allant chercher des éléments
 - * Mais ici on peut faire beaucoup plus rapide, et même faire une démonstration par équivalence, en utilisant le résultat de la proposition précédente.

Exercice 59 :**Rédaction de démonstration**

Montrons : $\forall A \in \mathcal{P}(E) \quad \forall B \in \mathcal{P}(E) \quad A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$.

Soit donc $A_0 \subset E$ et $B_0 \in E$. Prouvons : $A_0 \subset B_0 \Leftrightarrow A_0 \cap B_0 = A_0$.

- D'après la relation ②⑤ on a :

$$A_0 \subset B_0 \Leftrightarrow \complement B_0 \subset \complement A_0.$$

- D'après la relation ②⑥ on a :

$$\complement B_0 \subset \complement A_0 \Leftrightarrow \complement B_0 \cup \complement A_0 = \complement A_0.$$

- Comme

$$\complement B_0 \cup \complement A_0 = \complement(B_0 \cap A_0)$$

on a donc

$$\complement B_0 \cup \complement A_0 = \complement A_0 \Leftrightarrow \complement(B_0 \cap A_0) = \complement A_0.$$

- Enfin le passage au complémentaire nous dit que

$$\complement(B_0 \cap A_0) = \complement A_0 \Leftrightarrow B_0 \cup A_0 = A_0$$

Par transitivité de l'équivalence, on en déduit :

$$A_0 \subset B_0 \Leftrightarrow \complement B_0 \cup \complement A_0 = \complement A_0.$$

Par suite on a prouvé

$\forall A \in \mathcal{P}(E) \quad \forall B \in \mathcal{P}(E) \quad A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A.$

Exercice 60 :

Montrons que la fonction $f_1 : x \rightarrow 2x$ vérifie $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad f_1(x+y) = f_1(x) + f_1(y)$.

Soit donc $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$f_1(x+y) = 2(x+y) = 2x + 2y = f_1(x) + f_1(y).$$

Par suite on a prouvé que

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad f_1(x+y) = f_1(x) + f_1(y).$

Exercice 61 :

1. Comme la relation (b) est : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad f_2(x+y) = f_2(x) + f_2(y)$, sa négation s'obtient automatiquement avec les règles vues page II.2.d) et peut s'écrire :

$$\boxed{\exists x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad f_2(x+y) \neq f_2(x) + f_2(y)}$$

Remarque : en utilisant la notion de produit cartésien la relation (b) s'écrit aussi :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f_2(x+y) = f_2(x) + f_2(y),$$

et sa négation peut alors s'écrire :

$$\boxed{\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f_2(x+y) \neq f_2(x) + f_2(y)}$$

2. D'après ce qui est écrit ci-dessus, la relation *non*(b) est de type "∃" ; par suite la façon la plus simple de prouver qu'elle est vraie est d'exhiber un couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f_2(x+y) \neq f_2(x) + f_2(y)$.
3. Si on prend $x = 1$ et $y = -1$, on a :

$$f_2(x) = 2 \quad f_2(y) = 0 \quad f_2(x+y) = 1$$

et donc $f_2(x+y) \neq f_2(x) + f_2(y)$. Par suite on a prouvé

$$\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f_2(x+y) \neq f_2(x) + f_2(y).$$

ce qui signifie bien que la relation (b) est fausse.

Exercice 62 :

Recherche de démonstration : L'assertion

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad (a+b=0 \text{ et } a-b=0) \Rightarrow a=b=0$$

que l'on peut encore visualiser sous la forme

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \left(\forall b \in \mathbb{R} \quad ((a+b=0 \text{ et } a-b=0) \Rightarrow a=b=0) \right)$$

est de type : $\forall a \in \mathbb{R} \quad (\forall b \in \mathbb{R} \quad P(a, b))$ où $P(a, b)$ est le prédicat :

$$(a+b=0 \text{ et } a-b=0) \Rightarrow a=b=0.$$

Donc pour la démontrer

- on commence par fixer un réel a_0 et il reste alors à prouver : $\forall b \in \mathbb{R} \quad P(a_0, b)$;
- on fixe alors un réel b_0 et il faut prouver $P(a_0, b_0)$.
- Comme $P(a_0, b_0)$ est alors l'implication :

$$(a_0 + b_0 = 0 \text{ et } a_0 - b_0 = 0) \Rightarrow a_0 = b_0 = 0$$

on suppose donc ...

Remarque : on peut aussi "voir" la propriété donnée sous la forme :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad (a+b=0 \text{ et } a-b=0) \Rightarrow a=b=0$$

et on peut donc directement prendre un couple $(a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2$ puis démontrer l'implication

En fait cela ne change pas grand chose à la démonstration.

Rédaction de démonstration : Montrons : $\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad (a+b=0 \text{ et } a-b=0) \Rightarrow a=b=0$.

Soit $a_0 \in \mathbb{R}$ et $b_0 \in \mathbb{R}$ tel que $a_0 + b_0 = 0$ et $a_0 - b_0 = 0$.

- En sommant ces deux égalités on en déduit $2a_0 = 0$ et donc $a_0 = 0$.
- On en déduit alors immédiatement $b_0 = 0$.

Ainsi on a prouvé $\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad (a+b=0 \text{ et } a-b=0) \Rightarrow a=b=0$.

Exercice 63 :

Recherche de démonstration : pour démontrer que u est croissante à partir d'un certain rang il faut prouver :

$$\exists p \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq p \Rightarrow u_{n+1} \geq u_n$$

autrement dit, il faut construire un p . Mais pour le trouver on a besoin de calculer $u_{n+1} - u_n$

Rédaction de démonstration :

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On a alors

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 9(n+1) - (n^2 - 9n) = 2(n-4).$$

- Posons $p = 4$.

D'après le calcul précédent, pour $n \geq 4$, on a

$$u_{n+1} - u_n = 2(n-4) \geq 0.$$

Par suite on a établi :

$$\exists p \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq p \Rightarrow u_{n+1} \geq u_n$$

ce qui prouve que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang.

Exercice 64 :

Soit f une application donnée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, ou encore soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. On a déjà rencontré l'assertion $\exists M \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq M$.

Elle est vraie si, et seulement si, f est majorée.

2. **Recherche de démonstration :** Dans l'assertion

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq M$$

on peut dire que “le M dépend de x ” et, en suivant la remarque de notation de la page II.2.d), on aurait pu aussi écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists M_x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq M_x.$$

Il est alors évident que cette relation est vérifiée pour toute fonction $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Rédaction de démonstration :

Montrons f vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq M.$$

Soit donc $x \in \mathbb{R}$. En posant $M = f(x)$ on a $f(x) \leq M$, ce qui prouve que l'assertion précédente est vraie.

Remarque : comme on a prouvé le résultat précédent pour toute fonction f , on a en fait prouvé :

$$\forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq M.$$

3. **Recherche de démonstration :** l'assertion

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq M$$

qui peut aussi (*cf.* page 28) s'écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall M \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq M$$

est manifestement fausse, ce qui peut se justifier en prouvant que sa négation est vraie.

Rédaction de démonstration :

Comme $x = 0$ et $M = f(0) - 1$ vérifient $f(x) > M$, on en déduit que l'assertion

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad f(x) > M$$

est vraie et donc que sa négation : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall M \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq M$ est fausse.

Par permutation des deux quantificateurs universels, on en déduit que :

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq M \text{ est fausse.}$$

Exercice 65 :**1. Recherche de démonstration :**

- En n'utilisant pas $f_a(x)$: il suffit de traduire la phrase donnée ...
- En utilisant $f_a(x)$: dans la relation précédente traduire $f_a = 0$ à l'aide de $f_a(x)$.

Rédaction de démonstration :

- Pour le premier énoncé on obtient directement :

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R} \quad f_a = 0 \Rightarrow a = 0.}$$

Remarque : Il faut toutefois prendre garde que les deux “0” intervenant dans la relation précédente ne sont pas les mêmes : quand on écrit “ $f_a = 0$ ”, par homogénéité le “0” est alors la fonction nulle ; pour préciser cela, certains écrivent alors :

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R} \quad f_a = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \Rightarrow a = 0 ;}$$

cette précision, intéressante au début mais lourde et pénible à la longue, n'est absolument pas indispensable car une égalité relie évidemment deux objets de même nature !

- On obtient le second énoncé en explicitant la relation $f_a = 0$, ce qui donne :

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R} \quad (\forall x \in \mathbb{R} \quad f_a(x) = 0) \Rightarrow a = 0.} \quad (i)$$

Remarque : Dans ce cas, il est préférable de laisser les parenthèses car l'énoncé

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f_a(x) = 0 \Rightarrow a = 0$$

pourrait aussi s'interpréter :

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (f_a(x) = 0 \Rightarrow a = 0) \quad (ii)$$

Alors que (i) est vrai (comme nous allons le démontrer ci-après) la relation (ii) est fausse (ce que vous devez pouvoir justifier).

2. Recherche de démonstration :

- La relation : $\forall a \in \mathbb{R} \quad (\forall x \in \mathbb{R} \quad f_a(x) = 0) \Rightarrow a = 0$
étant de type “ $\forall$ ”, on commence par se fixer un réel a .
- Il reste alors à prouver l'implication : $(\forall x \in \mathbb{R} \quad f_a(x) = 0) \Rightarrow a = 0$.
On suppose donc : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f_a(x) = 0$, et il reste à prouver $a = 0$...

Rédaction de démonstration :

Montrons que : $\forall a \in \mathbb{R} \quad (\forall x \in \mathbb{R} \quad f_a(x) = 0) \Rightarrow a = 0$.

Soit donc a un réel fixé quelconque.

Supposons $(\forall x \in \mathbb{R} \quad f_a(x) = 0)$.

En utilisant cette dernière relation avec $x = 1$, on en déduit : $0 = f_a(1) = a$.

On a ainsi prouvé $\boxed{\forall a \in \mathbb{R} \quad (\forall x \in \mathbb{R} \quad f_a(x) = 0) \Rightarrow a = 0.}$

Remarque : L'ordre utilisé ci-dessus pour écrire $0 = f_a(1) = a$ n'est pas anodin :

- l'hypothèse $f_a = 0$ nous dit que $f_a(1) = 0$ ou aussi $0 = f_a(1)$;
- la définition de f_a nous dit que $f_a(1) = a$;
- c'est la transitivité de l'égalité qui permet alors d'en déduire $a = 0$.

Autrement dit, cette petite attention apportée à l'ordre dans lequel on écrit ces trois réels apporte énormément de précision pour la rédaction et la présentation du raisonnement.

Exercice 66 :

- Comme les lettres a et b se trouvent de chaque côté de l'implication, il n'y a aucune ambiguïté en ce qui concerne le “ $\forall a$ ” et le “ $\forall b$ ” qui doivent donc porter sur l'ensemble :

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \left(\forall b \in \mathbb{R} \quad (\forall x \in \mathbb{R} \quad ax + b = 0 \Rightarrow a = b = 0) \right)$$

ou encore

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad (\forall x \in \mathbb{R} \quad ax + b = 0 \Rightarrow a = b = 0).$$

Mais ensuite pour le “ $\forall x$ ” on peut aussi bien écrire :

$$\forall(a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad \left(\forall x \in \mathbb{R} \quad (ax + b = 0 \Rightarrow a = b = 0) \right) \quad (i)$$

que :

$$\forall(a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad \left((\forall x \in \mathbb{R} \quad ax + b = 0) \Rightarrow a = b = 0 \right). \quad (ii)$$

La première relation peut aussi s’écrire :

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (ax + b = 0 \Rightarrow a = b = 0) \quad (i)$$

ou encore

$$\forall(a, b, x) \in \mathbb{R}^3 \quad (ax + b = 0 \Rightarrow a = b = 0) \quad (i)$$

2. Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ appelons $f_{a,b}$ la fonction affine : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto ax + b$$

- L’assertion (i) dit alors : “pour tout triplet de réels (a, b, x) , si la fonction $f_{a,b}$ s’annule en x alors on a : $a = b = 0$ ”
- L’assertion (ii), qui peut aussi s’écrire :

$$\forall(a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad (f_{a,b} = 0 \Rightarrow a = b = 0), \quad (ii)$$

dit : “pour tout couple de réels (a, b) , si la fonction $f_{a,b}$ est nulle alors on a : $a = b = 0$ ”

Il est intuitivement évident que (i) est fausse alors que (ii) est vraie.

3. Recherche de démonstration :

Pour montrer que (i) est fausse, il suffit prouver que sa négation est vraie.

Rédaction de démonstration :

La négation de (i) étant :

$$\exists(a, b, x) \in \mathbb{R}^3 \quad (ax + b = 0) \text{ et } (a \neq 0 \text{ ou } b \neq 0),$$

le triplet $(a, b, x) = (1, 0, 0)$ montre que cette négation est vraie, et donc que (i) est fausse.

Recherche de démonstration : on démontre (ii) par réduction classique.

Rédaction de démonstration :

Montrons que :

$$\forall(a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad (\forall x \in \mathbb{R} \quad ax + b = 0) \Rightarrow a = b = 0.$$

Soit donc $(a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2$. Montrons : $(\forall x \in \mathbb{R} \quad a_0 x + b_0 = 0) \Rightarrow a_0 = b_0 = 0$.

Supposons donc $(\forall x \in \mathbb{R} \quad a_0 x + b_0 = 0)$.

- En utilisant cette dernière relation avec $x = 0$, on obtient $b_0 = 0$.
- En l’utilisant avec $x = 1$, on obtient $a_0 = 0$, ce qui termine la démonstration.

Par suite on a prouvé : $\forall(a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad (\forall x \in \mathbb{R} \quad ax + b = 0) \Rightarrow a = b = 0.$

Remarque : Dans le cours de la démonstration on a croisé la relation : $\forall x \in \mathbb{R} \quad a_0 x + b_0 = 0$, relation qui n’était pas une conclusion à démontrer mais un acquis que supposé vrai.

- Certains seront peut-être gênés de ne pas avoir utilisé toute cette hypothèse puisque l’on n’a utilisé que deux “malheureuses” valeurs $x = 0$ et $x = 1$!
- Encore une fois il ne faut pas perdre de vue le but qui était le nôtre à cette étape : il s’agissait de prouver $a_0 = b_0 = 0$ et on a pu y parvenir avec ces deux seules valeurs, alors comme dit la publicité : “pourquoi dépenser plus ?”

Exercice 67 :

Il y a la même ambiguïté ce qui concerne la portée du “ $\forall x$ ”.

Mais ici les deux assertions sont vraies.

Exercice 68 :

Montrons : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \exists k \in \mathbb{R} \quad |f(y) - f(x)| \leq k |y - x|$.

Soit donc $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

- Si $x = y$ alors la valeur $k = 1$ vérifie $|f(y) - f(x)| \leq k |y - x|$ et donc l'assertion $\exists k \in \mathbb{R} \quad |f(y) - f(x)| \leq k |y - x|$ est vraie.

- Si $x \neq y$ alors posons $k = \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|}$. On a alors

$$|f(y) - f(x)| = k |y - x| \leq k |y - x|$$

et donc l'assertion $\exists k \in \mathbb{R} \quad |f(y) - f(x)| \leq k |y - x|$ est vraie.

Par suite $\exists k \in \mathbb{R} \quad |f(y) - f(x)| \leq k |y - x|$ est vraie, ce qui prouve

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \exists k \in \mathbb{R} \quad |f(y) - f(x)| \leq k |y - x|}.$$

Exercice 69 :

1. Pour tout $(x, y) \in I^2$, on a :

$$|f(y) - f(x)| = |(x - y)(x + y)| = |x - y| |x + y| \leq |x - y| (|x| + |y|) \leq 2 |x - y|.$$

Par suite en posant $k = 2$ on a :

$$\forall x \in I \quad \forall y \in I \quad |f(y) - f(x)| \leq k |y - x|$$

ce qui montre que :

$$\boxed{\exists k \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad \forall y \in I \quad |f(y) - f(x)| \leq k |y - x|}.$$

2. Phase de recherche

- On veut prouver une relation du type “ $\forall \varepsilon$ ”, donc on commence par fixer un réel quelconque ε strictement positif, et le curseur avance d'un cran

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \uparrow \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in I \quad \forall y \in I \quad |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

- Ensuite il faut construire un η , évidemment en utilisant la première question (cf. “en déduire”). Une fois définie une valeur de η , on en est donc là :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \uparrow \forall x \in I \quad \forall y \in I \quad |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

- Il reste alors à prouver une assertion de type “ $\forall$ ” : on fixe $x \in I$ et $y \in I$, ce qui donne :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in I \quad \forall y \in I \uparrow |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

- Comme ce qu'il faut alors prouver est une implication on suppose $|x - y| \leq \eta$.

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in I \quad \forall y \in I \quad |x - y| \leq \eta \Rightarrow \uparrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Nous verrons dans la rédaction finale que l'on peut gagner du temps en regroupant ces deux étapes.

- Ensuite c'est presque fini : il reste à majorer $|f(x) - f(y)|$, ce qui est évident en utilisant la question précédente.

3. Démonstration

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $\eta = \varepsilon/2$ et montrons que

$$\forall x \in I \quad \forall y \in I \quad |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Soit donc $x \in I$ et $y \in I$ tels que $|x - y| \leq \eta$ (regroupement annoncé).

En utilisant la première question on a alors

$$|f(y) - f(x)| \leq 2 |y - x| \leq 2 \eta = \varepsilon$$

ce qui termine la démonstration et prouve

$$\boxed{\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in I \quad \forall y \in I \quad |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon}.$$

Exercice 70 :

1. On obtient automatiquement la négation de (*) en utilisant les règles vues dans la partie II.2.c), ce qui donne :

$$\forall k \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad |f(y) - f(x)| > |y - x|.$$

2. Supposons que (*) est vraie.

On sait donc que l'on peut trouver un réel k tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad |f(y) - f(x)| \leq k|y - x|.$$

Puisque cette relation est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$, on peut l'utiliser avec $y = 0$, et on en déduit

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |f(0) - f(x)| \leq k|x|.$$

Comme $f(0) = 0$, on en déduit que le réel k utilisé vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x)| \leq k|x|$$

ce qui prouve

$$\exists k \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x)| \leq k|x|$$

3. Montrons par l'absurde que (*) est fausse.

Supposons donc (*) vraie. La question précédente nous montre l'existence d'un réel k tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x)| \leq k|x|.$$

- En utilisant cette relation avec $x = 1$, on en déduit $1 \leq k$.
- On en déduit alors que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$x = \frac{|f(x)|}{|x|} \leq k$$

ce qui est impossible pour $x = k + 1$ (qui est strictement positif).

Par suite on a prouvé par l'absurde que la relation (*) est fausse.

Exercice 71 :

1. Recherche de démonstration de :

$$\uparrow \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad |x - y| \leq 1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq (2|x| + 1)|x - y|.$$

- Comme c'est une assertion de type " $\forall x$ " on commence par prendre $x \in \mathbb{R}$ et le curseur progresse d'un cran

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \uparrow \forall y \in \mathbb{R} \quad |x - y| \leq 1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq (2|x| + 1)|x - y|.$$

- La suite étant du type " $\forall y$ " on prend $y \in \mathbb{R}$ et le curseur progresse d'un cran

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \uparrow |x - y| \leq 1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq (2|x| + 1)|x - y|.$$

- Pour prouver l'implication qui suit on suppose alors $|x - y| \leq 1$ et donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad |x - y| \leq 1 \Rightarrow \uparrow |f(x) - f(y)| \leq (2|x| + 1)|x - y|.$$

- On s'intéresse alors à $|f(x) - f(y)|$ qu'il faut majorer ... (calcul assez simple)

2. Montrons que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad |x - y| \leq 1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq (2|x| + 1)|x - y|.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. On a alors

$$|f(y) - f(x)| = |x - y| |x + y| \leq |x - y| (|x| + |y|).$$

Comme $|x - y| \leq 1$, on a :

$$|y| = |x + y - x| \leq |x| + |y - x| \leq |x| + 1.$$

Des deux relations précédentes on déduit immédiatement :

$$|f(y) - f(x)| \leq (2|x| + 1)|x - y|.$$

Par suite on a bien prouvé

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad |x - y| \leq 1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq (2|x| + 1)|x - y|.$$

3. Montrons que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

(où est alors le curseur de conclusion ?)

Posons $\eta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2|x|+1}\right)$.

(où est alors le curseur de conclusion ?)

Soit $y \in \mathbb{R}$ tel que $|x - y| \leq \eta$.

- Comme $\eta \leq 1$ la question précédente nous donne :

$$|f(y) - f(x)| \leq (2|x| + 1)|x - y|.$$

- Comme $\eta \leq \frac{\varepsilon}{2|x|+1}$ on a :

$$(2|x| + 1)|x - y| \leq (2|x| + 1)\frac{\varepsilon}{2|x| + 1} = \varepsilon.$$

On en déduit immédiatement

$$|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

En relisant ce qui précède on voit que l'on a prouvé :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Exercice 72 :

Dans la relation (*)

- les variables x et y sont quantifiées et sont donc des variables muettes ;
- en revanche la lettre f n'est pas quantifiée.

Par suite, si f est un objet (ici une application) que l'on a fixé, alors (*) est une assertion qui est vraie ou fausse selon l'application f que l'on a choisie ;

- si f représente une fonction quelconque alors
 - * la ligne (*) est un prédicat (de la seule variable f) que l'on notera $P(f)$ dans toute la suite de cette étude ;
 - * ce prédicat $P(f)$ est défini sur l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et il énonce une propriété de f sans le moindre x ni le moindre y ; nous verrons que $P(f)$ peut aussi s'énoncer " f est linéaire" ce qui ne dépend effectivement ni de x ni de y .

Remarque : dans cette seconde éventualité f devient une variable, ce qui peut dans un premier en étonner certains mais qui devient tout à fait naturel si on pense que f représente alors un élément quelconque de l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$: autrement dit, f peut être considéré soit comme une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ soit comme un élément de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$. Cette dualité peut dérouter les premières fois mais il faut absolument s'y faire !

Exercice 73 :

- On a déjà vu (cf. exercice 60) que la fonction f_1 vérifie (*).
- On a aussi prouvé (cf. exercice 61) que la fonction f_2 ne vérifie pas (*).
- Vous pouvez prouver de façon analogue que f_3 ne vérifie pas (*).

Remarque : si je donne les références des exercices où l'on a déjà démontré les deux premiers résultats, ce n'est pas pour que vous vous précipitez sur les solutions correspondantes. Vous devez commencer par re-réfléchir à une démonstration avant de tourner les pages pour une éventuelle vérification.

Exercice 74 :

Quand on dit que “les fonctions vérifiant (*) sont les fonctions linéaires de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ ” il sagit en fait d’une égalité d’ensemble entre

- d’une part l’ensemble des fonctions vérifiant (*)
- d’autre part l’ensemble des fonctions linéaires de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$

Il n’y a donc rien de surprenant à ce qu’une telle propriété se traduise par une équivalence (cf. définition de l’égalité de deux ensembles).

Un énoncé correct de ce que l’on veut démontrer pourrait donc être :

“une application $f \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ vérifie (*) si, et seulement si,

$$\exists a \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad f(x) = ax.$$

Exercice 75 :

Dans l’énoncé : $\exists a \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad f(x) = ax$,

- les variables a et x sont quantifiées et sont donc des variables muettes,
- en revanche f n’est pas quantifié.

Par suite cet énoncé est un prédicat de la variable f que l’on peut noter $Q(f)$.

Exercice 76 :

1. À l’aide des prédicats P et Q la conclusion qu’il faut prouver s’écrit

$$\forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N}) \quad P(f) \Leftrightarrow Q(f).$$

2. Pour prouver notre conclusion qui est type “ $\forall$ ”, on donc commence par prendre une application f_0 élément de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$.

Il faut alors prouver l’équivalence $P(f_0) \Leftrightarrow Q(f_0)$ c’est-à-dire :

- l’implication $P(f_0) \Rightarrow Q(f_0)$:
- l’implication $Q(f_0) \Rightarrow P(f_0)$.

Exercice 77 :

Soit $f_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$.

1. Pour commencer la démonstration de $Q(f_0) \Rightarrow P(f_0)$, on suppose que $Q(f_0)$ est vraie c’est-à-dire que l’on a :

$$\exists a \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad f_0(x) = ax.$$

Par suite on sait que l’on peut disposer d’un entier a tel que

$$\forall x \in \mathbb{N} \quad f_0(x) = ax.$$

2. Démontrons que $Q(f_0) \Rightarrow P(f_0)$.

Supposons donc $Q(f_0)$. Par suite on sait qu’il exist un $a \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{N} \quad f_0(x) = ax.$$

Montrons $P(f_0)$ est vrai c’est-à-dire que :

$$\forall x \in \mathbb{N} \quad \forall y \in \mathbb{N} \quad f_0(x+y) = f_0(x) + f_0(y).$$

Soit donc $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$. On a alors :

$$f_0(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f_0(x) + f_0(y),$$

ce qui termine la démonstration de $P(f_0)$.

Par suite on a prouvé : $\boxed{Q(f_0) \Rightarrow P(f_0)}.$

Exercice 78 :

1. Le problème posé peut se résumer par

Hypothèses	Conclusion
$f_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$	$P(f_0) \Rightarrow Q(f_0)$

Comme la conclusion est de type “ $\Rightarrow$ ”, on suppose que $P(f_0)$ est vrai et donc

Acquis	Reste à prouver
$f_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ $P(f_0)$	$Q(f_0)$

ce qui, vu la définition de $Q(f)$, s’écrit aussi

Acquis	Reste à prouver
$f_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ $P(f_0)$	$\exists a \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad f_0(x) = a x$

Il nous reste donc à construire un a tel que : $\forall x \in \mathbb{N} \quad f_0(x) = a x$.

2. Supposons le problème résolu et soit donc $a_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall x \in \mathbb{N} \quad f_0(x) = a_0 x$.

Il est alors évident que $a_0 = f_0(1)$.

3. La nouvelle conclusion est du type “ $\forall x \in \mathbb{N} \quad f_0(x) = a x$ ” se prouve aisément par récurrence.

4. **Rédaction de démonstration**

Montrons que $P(f_0) \Rightarrow Q(f_0)$.

Supposons donc $P(f_0)$ c’est-à-dire : $\forall x \in \mathbb{N} \quad \forall y \in \mathbb{N} \quad f_0(x+y) = f_0(x) + f_0(y)$.

Posons $a_0 = f_0(1)$ et montrons que l’on a alors : $\forall x \in \mathbb{N} \quad f_0(x) = a_0 x$.

Pour $x \in \mathbb{N}$ désignons par H_x l’assertion $f_0(x) = a_0 x$.

Faisons une démonstration par récurrence.

- Supposons $x = 0$. Alors l’hypothèse

$$\forall x \in \mathbb{N} \quad \forall y \in \mathbb{N} \quad f_0(x+y) = f_0(x) + f_0(y),$$

utilisée avec $x = y = 0$, donne : $f_0(0) = 2 f_0(0)$ et donc $f_0(0) = 0$, ce qui prouve H_0 .

- Soit $x \in \mathbb{N}$. Supposons H_x et démontrons H_{x+1} .

L’hypothèse

$$\forall x \in \mathbb{N} \quad \forall y \in \mathbb{N} \quad f_0(x+y) = f_0(x) + f_0(y),$$

utilisée avec notre valeur de x et avec $y = 1$, nous donne

$$f_0(x+1) = f_0(x) + f_0(1).$$

Étant donné que $f_0(1) = a_0$ et que, d’après H_x , on a $f_0(x) = a_0 x$, on en déduit

$$f_0(x+1) = a_0 x + a_0 = a_0 (x+1)$$

ce qui prouve H_{x+1} et termine la démonstration par récurrence.

Ainsi

- après avoir supposé $P(f_0)$ on a trouvé un $a_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{N} \quad f_0(x) = a_0 x$$

- ou encore, après avoir supposé $P(f_0)$ on a montré

$$\exists a \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad f_0(x) = a x ;$$

et on a donc prouvé $P(f_0) \Rightarrow Q(f_0)$.

Exercice 79 :

Montrons que $f \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ vérifie $(*)$ si, et seulement si,

$$\exists a \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = a n.$$

- Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ telle que : $\exists a \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = a n$.

Par hypothèse on peut donc trouver $a \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = a n$.

Pour $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$, on a alors :

$$f(x+y) = a(x+y) = a x + a y = f(x) + f(y),$$

ce qui prouve que f vérifie $(*)$. Par suite

si : $\exists a \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = a n$ alors f vérifie $(*)$.

- Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ vérifiant $(*)$. Posons $a = f(1)$ et montrons que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = a n$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ désignons par H_n l'assertion : $f(n) = a n$ et démontrons H_n par récurrence.

- * Supposons $n = 0$. Alors l'hypothèse $(*)$

$$\forall x \in \mathbb{N} \quad \forall y \in \mathbb{N} \quad f(x+y) = f(x) + f(y),$$

utilisée avec $x = y = 0$, donne : $f(0) = 2 f(0)$ et donc $f(0) = 0$, ce qui prouve H_0 .

- * Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons H_n et démontrons H_{n+1} .

L'hypothèse $(*)$

$$\forall x \in \mathbb{N} \quad \forall y \in \mathbb{N} \quad f(x+y) = f(x) + f(y),$$

utilisée avec $x = n$ et avec $y = 1$, nous donne

$$f(n+1) = f(n) + f(1).$$

Étant donné que $f(1) = a$ et que, d'après H_n , on a $f(n) = a n$, on en déduit

$$f(n+1) = a n + a = a(n+1)$$

ce qui prouve H_{n+1} et termine la démonstration par récurrence.

Par suite

si f vérifie $(*)$ alors : $\exists a \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad f(x) = a x$.

On a ainsi prouvé l'équivalence annoncée.