

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed Boudiaf

Faculté de Génie Mécanique

Département de Génie Mécanique

POLYCOPIE

MECANIQUE RATIONNELLE Centres d'inertie et moments d'inertie

Cours et exercices

Présenté par :

Mr : LEBBAL Habib

Introduction

Cet ouvrage s'intéresse à une partie de la mécanique rationnelle : centre d'inertie et moment d'inertie du solide, à savoir la géométrie des masses, et ce dans un esprit pédagogique visant à simplifier des notions qui ne sont pas toujours évidentes (centre et moment d'inertie, tenseur d'inertie)

Le polycopié comporte deux chapitres, et considéré comme document de travail dans la spécialité de mécanique de construction. Il est destiné de prime abord aux étudiants de licence 2^{ème} année LMD dont l'intitulé du module même (en S3). Il peut être aussi un aide-mémoire pour les étudiants des autres années en construction mécanique et en fabrication mécanique de la filière génie mécanique. Il contient deux chapitres des cours et des exercices résolus. Le premier chapitre traite les centres d'inertie des masses. Les notions des systèmes matériels sont exposées, à savoir les différentes méthodes de détermination de leur centre d'inertie: la méthode d'intégration et la méthode de Guldin (1^{er} 2^{ème} théorèmes). Dans le second chapitre sont présentées les notions des moments d'inertie qui sont des grandeurs caractérisant la géométrie des masses indéformables. Les formulations matricielles sous forme de tenseurs d'inertie concernent des solides qui présentent des formes particulières admettant des plans de symétrie par rapport aux axes du repère considéré. Les moments d'inertie quantifient également la résistance à une mise en rotation du solide autour d'un axe. Aussi, le théorème de Huygens est-il bien explicité pour la translation des moments d'inertie par rapport à des axes autres que ceux du repère considéré. Ces connaissances sont d'un intérêt majeur pour les étudiants notamment dans les modules de vibrations (O.V en S3) et en RDM (S4).

Sommaire

Chapitre I : Centre d'inertie

I.1. Notions de masse d'un système matériel	1
I.2. Notion de point matériel	1
I.2.1. Système de points matériels	1
I.2.1.a. Systèmes continus	2
I.2.1.b. Le système (S) est linéaire	2
I.2.1.c. Le système (S) est une surface	2
I.2.1.d. Le système (S) est un volume	3
I.3. Centre d'inertie d'un système matériel	3
I.3.1. Cas d'un système complexe	4
I.3.2. Calcul du centre d'inertie par la méthode de l'intégration	5
I.4. Méthode du Guldin	11
I.4.1.1 ^{er} Théorème de Guldin	11
I.4.2.2 ^{ème} Théorème de Guldin	13
I.4.3. Calcul du centre d'inertie par la méthode de Guldin	14

Chapitre II : Moment d'inertie

II.1. Moment d'inertie - Opérateur d'inertie	20
II.2. Définitions	20
II.3. Moment d'inertie par rapport à un axe	20
II.4. Matrice d'inertie	21
II.4.1. Solides présentant des plans de symétrie	22
II.4.2. Solides à symétrie de révolution	24
II.4.3. Solides à symétrie sphériques	24
II.4.4. Solides plans	25
II.5. Matrice principale d'inertie	26
II.6. Théorème de Huygens	27
II.6.1. Expressions des produits d'inertie	27
II.6.2. Expressions des moments d'inertie	28
II.7. Exercices sur le moment d'inertie	30

I.1. Notions de masse d'un système matériel

A chaque système matériel (S) est associé, une quantité scalaire positive invariable en mécanique classique, appelée : masse du système.

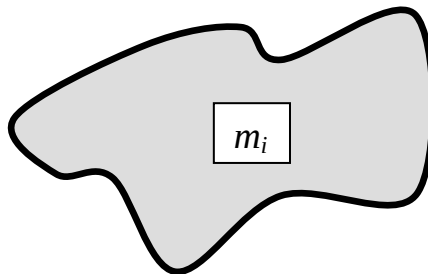
La masse d'un solide fait référence à la quantité de matière contenue dans le volume de ce solide.

I.2. Notion de point matériel

Les objets matériels qui, dans certaines circonstances, peuvent être considérés comme petits et dont la position sera repérée avec suffisamment de précision par trois coordonnées, seront appelés des “points matériels” (les circonstances sont parfois telles qu'un objet, énorme à notre échelle, le soleil par exemple, puisse être considéré comme petit au sens ci-dessus). On appelle ainsi “point matériel” un point doué de masse. Ce concept est donc une idéalisation, souvent utile, de la notion familière d'objet matériel.

I.2.1. Système de points matériels

On appelle “système de points matériels”, ou plus simplement “système matériel”, tout ensemble (fini ou non) de points matériels. Dans le cas des systèmes constitués d'un nombre fini de points, on appelle masse m du système matériel la somme des masses m_i de chacun de ses n points :



$$m = \sum_{i=1}^n m_i$$

I.2.1.a.Systèmes continus

Si le système est constitué d'un ensemble continu de masses, la masse du système s'écrirait sous la forme d'une intégrale continue :

$$m = \int_{(S)} dm(p)$$

$dm(p)$: élément de masse au point p.

I.2.1.b.Le système (S) est linéaire: (cas des tiges fines) les deux dimensions sont négligeables devant la longueur de la tige.

La masse s'écrirait :

$$m = \int_L \lambda(p) dl$$

$\lambda(p)$ est la densité linéique au point P et -un élément de longueur du solide (S)

Dans les systèmes homogènes (solides homogènes) la densité des solides est constante.

I.2.1.c.Le système (S) est une surface: (cas des plaques fines) l'épaisseur est négligeable devant les deux autres dimensions.

La masse s'écrirait :

$$m = \int_S \sigma(p) ds$$

$\sigma(p)$ est la densité surfacique au point P et dans un élément de surface du solide (S).

I.2.1.d. Le système (S) est un volume:

La masse s'écrirait :

$$m = \int_V \rho(p) dv$$

$\rho(p)$ est la masse volumique au point P et dv un élément de volume du solide (S).

I.3. Centre d'inertie d'un système matériel

On appelle centre d'inertie d'un système matériel (S) le point G défini par la relation :

$$\int_{p \in (S)} \overrightarrow{GP} dm = \vec{0} \quad \text{et sa masse} \quad M = \int_{p \in (S)} dm$$

O étant un point arbitraire il vient :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\int_{p \in (S)} dm} \int_{p \in (S)} \overrightarrow{OP} dm = \frac{1}{M} \int_{p \in (S)} \overrightarrow{OP} dm$$

Les coordonnées du point G sont donc définies par

$$X_G = \frac{1}{M} \int_{p \in (S)} X dm$$

$$Y_G = \frac{1}{M} \int_{p \in (S)} Y dm$$

$$Z_G = \frac{1}{M} \int_{p \in (S)} Z dm$$

I.3.1.Cas d'un système complexe

Très souvent un système est composé d'un assemblage de systèmes élémentaires pour lesquels les calculs sont aisés ; chacun de ces systèmes a un centre d'inertie G_i et de masse m_i .

D'après la théorie de l'intégration, le centre d'inertie du système complexe s'obtient par :

$$\vec{OG} = \frac{1}{\sum_i m_i} \sum_i \int_{p \in (S_i)} \vec{OP} \, dm$$

Or

$$\vec{OG} = \frac{1}{m_i} \int_{p \in (S_i)} \vec{OP} \, dm$$

Donc

$$\vec{OG} = \frac{1}{\sum_i m_i} \sum_i m_i \vec{OG_i}$$

Le point G est donc le barycentre des points G_i affectés des coefficients m_i .

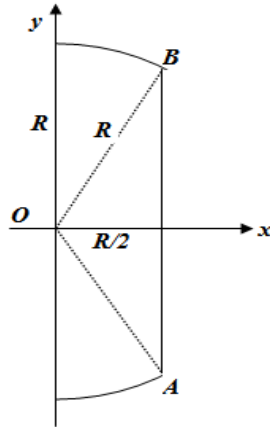
On procède donc en deux étapes pour déterminer le centre d'inertie :

- On détermine le centre d'inertie G_i pour chacun des sous-ensembles de masse m_i .
- On détermine le centre d'inertie G comme barycentre des points G_i affectés des coefficients m_i .

I.3.2. Calcul le centre d'inertie par la méthode de l'intégration

Exercice 1

Soit la surface homogène constituée de deux portions de disque symétriques par rapport à l'axe Ox et d'une surface triangulaire OAB .

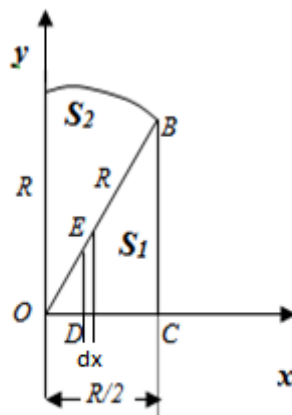


1. Déterminer par intégration la coordonnée suivant l'axe Ox du centre d'inertie de cette surface.

Solution

Par raison de symétrie par rapport à l'axe Ox , $y_G = 0$ et x_G se trouve sur l'axe Ox nous cherchons seulement le centre d'inertie de la partie supérieure du solide. Elle est composée d'un triangle rectangle (S_1) et d'une portion de disque (S_2)

Solide (S_1) : $dm_1 = \sigma ds_1 = \sigma DE \cdot dx$

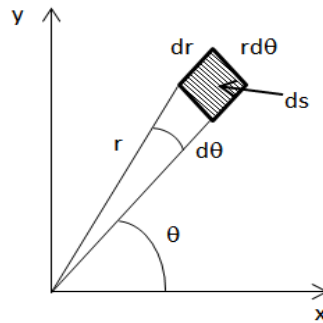
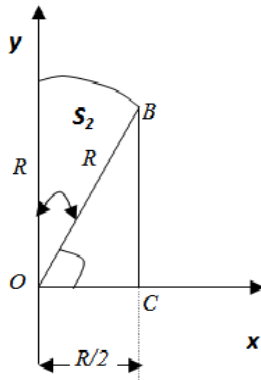


$$\frac{DE}{CB} = \frac{OD}{OC} \Leftrightarrow \frac{DE}{R\sqrt{3}/2} = \frac{x}{R/2} \Rightarrow DE = x\sqrt{3}$$

$$m_1 = \int_0^{R/2} \sigma x\sqrt{3} dx = \sigma\sqrt{3} \frac{R^2}{8}$$

$$x_{1G} = \frac{1}{m_{S1}} \int x dm = \frac{8}{\sigma R^2 \sqrt{3}} \int_0^{R/2} \sigma \sqrt{3} x^2 dx = \frac{4}{R^2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^{R/2} = \frac{R}{3}$$

Solide (S₂) : $dm_2 = \sigma ds_2 = \sigma r dr d\theta$



$$ds = r dr d\theta$$

$$ds \begin{cases} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{cases}$$

$$\text{Nous avons : } \cos \alpha_0 = \frac{R/2}{R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha_0 = \frac{\pi}{3}$$

$$0 \leq r \leq R ; \text{ et } \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$m_2 = \sigma \int_0^R r dr \int_{\pi/3}^{\pi/2} d\theta = \sigma \frac{R^2}{2} \cdot \frac{\pi}{6} = \sigma \frac{\pi R^2}{12}$$

$$x_{2G} = \frac{1}{m_2} \int x dm_2 = \frac{12}{\sigma \pi R^2} \int_{S_2} r \cos \theta \sigma r dr d\theta$$

$$x_{2G} = \frac{12}{\pi R^2} \int_0^R r^2 dr \int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \frac{12}{\pi R^2} \cdot \frac{R^3}{3} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

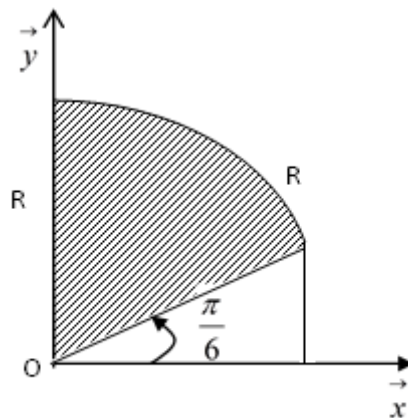
$$x_{2G} = \frac{2R}{\pi} (2 - \sqrt{3})$$

Le centre d'inertie de la surface totale est donnée par :

$$x_G = \frac{x_{1G}S_1 + x_{2G}S_2}{S_1 + S_2}$$

Exercice 2

Déterminer, par intégration, les coordonnées, du centre de masse, d'une surface homogène plane, en forme de portion circulaire de rayon R, par rapport au repère (Oxy).



Solution

$$dm = \sigma ds$$

et $ds = r d\theta dr$

avec $0 \leq r \leq R$ et $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

et $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$

$$S = \int_{(s)} ds = \int_0^R r dr \cdot \int_{\pi/6}^{\pi/2} d\theta = \frac{R^2}{2} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi R^2}{6} ;$$

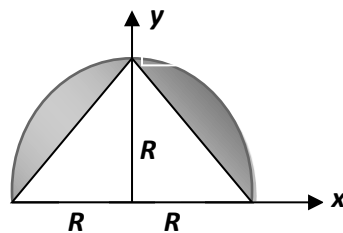
$$m = \sigma S = \sigma \frac{\pi R^2}{6}$$

$$x_G = \frac{1}{m} \int x dm = \frac{1}{\frac{\pi R^2}{6}} \int_0^R r^2 dr \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \frac{6}{\pi R^2} \cdot \frac{R^3}{3} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{R}{\pi}$$

$$y_G = \frac{1}{m} \int y dm = \frac{6}{\pi R^2} \int_0^R r^2 dr \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin \theta d\theta = \frac{6}{\pi R^2} \cdot \frac{R^3}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{R\sqrt{3}}{\pi}$$

Exercice 3

Déterminer les coordonnées du centre d'inertie de la figure suivante par intégration :



Solution

L'axe (Oy) est un axe de symétrie donc : $x_G = 0$

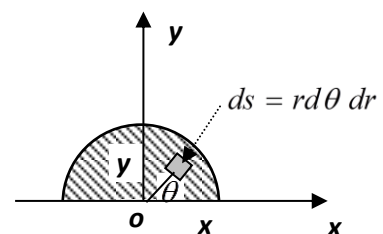
a) Centre d'inertie du demi disque plein de rayon R

Le solide est un demi disque, sa masse est donnée par :

$$m_1 = \int_S \sigma ds \quad \text{où : } \sigma \text{ est la densité surfacique}$$

et ds un élément de surface. L'élément de surface

$$ds \text{ a pour coordonnées : } \begin{cases} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{cases} \quad \text{avec : } 0 \leq \theta \leq \pi ; 0 \leq r \leq R$$



$$m_1 = \int_S \lambda ds = \int_0^\pi \lambda r d\theta dr = \lambda \int_0^R r dr \int_0^\pi d\theta = \sigma \frac{\pi R^2}{2}$$

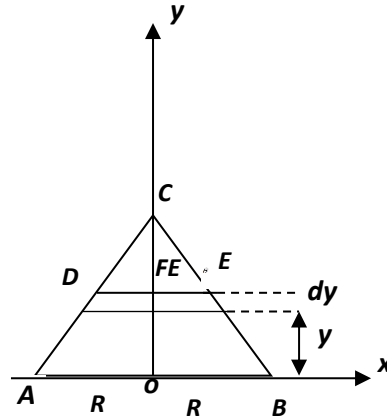
$$y_{G1} = \frac{1}{m_1} \int_S y dm = \frac{1}{m_1} \int_S y \sigma ds = \frac{2}{\sigma \pi R^2} \int_0^\pi r \sin \theta \sigma r d\theta dr = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta$$

$$y_{G1} = \frac{4R}{3\pi} \quad \text{d'où : } G_1 \begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = \frac{4R}{3\pi} \end{cases}$$

a) Centre d'inertie de la surface triangulaire

$$\text{Masse du triangle plan : } m_2 = \sigma S_2 = \sigma \cdot \frac{1}{2} 2R \cdot R = \sigma R^2$$

$$\text{Calculons } y_{G2} = \frac{1}{m_2} \int_S y dm = \frac{1}{m_2} \int_S y \sigma ds$$



L'élément de surface est donné par : $ds_2 = L dy$; avec $L = DE$; $OA = OB = OC = R$

Dans les triangles semblables ABC et DEC , nous avons : $\frac{DE}{AB} = \frac{FC}{OC} \Leftrightarrow \frac{L}{2R} = \frac{R-y}{R}$

$L = 2(R-y)$ ce qui donne : $ds_2 = 2(R-y)dy$ avec $0 \leq y \leq R$

$$y_{G2} = \frac{1}{m} \int_S y \sigma ds_2 = \frac{1}{\sigma R^2} \int_0^R y \sigma 2(R-y) dy = \frac{2}{R^2} \left(\frac{Ry^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^R = \frac{R}{3} ; \quad y_{G2} = \frac{R}{3}$$

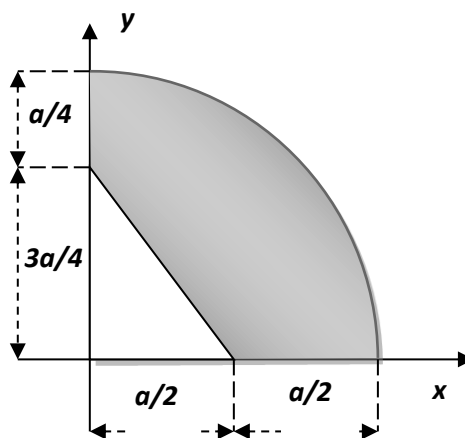
Centre d'inertie du solide

$$y_G = \frac{y_{1G} \cdot m_1 - y_{2G} \cdot m_2}{m_1 - m_2} = \frac{y_{1G} \cdot S_1 - y_{2G} \cdot S_2}{S_1 - S_2} = \frac{\frac{4R}{3\pi} \cdot \frac{\pi R^2}{2} - \frac{R}{3} \cdot R^2}{\frac{\pi R^2}{2} - R^2} = \frac{2}{3} \frac{R}{\pi - 2}$$

Exercice 4

Le système suivant est composé d'un quart de disque homogène évidé d'un triangle rectangle.

Déterminer le centre d'inertie du solide par la méthode d'intégration;



Solution

a) Soit S_1 la surface du quart de disque :

$$ds_1 = r dr \cdot d\theta \quad ; \quad 0 \leq r \leq a \quad ; \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad ; \quad S_1 = \int_0^a r dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi \cdot a^2}{4}$$

$$x_{1G} = \frac{1}{S_1} \cdot \int_{S_1} x ds_1 = \frac{4}{\pi \cdot a^2} \cdot \int_0^a r \cos \theta \cdot r dr \cdot d\theta = \frac{4}{\pi \cdot a^2} \cdot \int_0^a r^2 \cdot dr \cdot d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \cdot d\theta = \frac{4a}{3\pi}$$

$$y_{1G} = \frac{1}{S_1} \cdot \int_{S_1} y ds_1 = \frac{4}{\pi \cdot a^2} \cdot \int_0^a r \sin \theta \cdot r dr \cdot d\theta = \frac{4}{\pi \cdot a^2} \cdot \int_0^a r^2 \cdot dr \cdot d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cdot d\theta = \frac{4a}{3\pi}$$

a) Soit S_2 la surface du triangle :

$ds_2 = dx.dy$; la droite limitant le triangle a pour équation :

$$y = \frac{3}{2} \left(\frac{a}{2} - x \right) ; \text{ où } x = \frac{2}{3} \left(\frac{3a}{4} - y \right)$$

$$S_2 = \int_{S_2} dx.dy = \int_0^{\frac{a}{2}} dx \cdot \int_0^{\frac{3}{2}(\frac{a}{2}-x)} dy = \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{3}{2} \left(\frac{a}{2} - x \right) dx = \frac{3}{16} a^2$$

$$x_{2G} = \frac{1}{S_2} \int_{S_2} x ds_2 = \frac{16}{3a^2} \int_0^{\frac{a}{2}} x dx \cdot \int_0^{\frac{3}{2}(\frac{a}{2}-x)} dy = \frac{16}{3a^2} \cdot \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{3}{2} x \left(\frac{a}{2} - x \right) dx = \frac{a}{6}$$

$$y_{2G} = \frac{1}{S_2} \int_{S_2} y ds_2 = \frac{16}{3a^2} \int_0^{\frac{3a}{4}} y dy \cdot \int_0^{\frac{2}{3}(\frac{3a}{4}-y)} dx = \frac{16}{3a^2} \cdot \int_0^{\frac{3a}{4}} \frac{2}{3} y \left(\frac{3a}{4} - y \right) dy = \frac{a}{4}$$

$$x_G = \frac{S_1 \cdot x_{1G} - S_2 \cdot x_{2G}}{S_1 - S_2} = \frac{\frac{\pi \cdot a^2}{4} \cdot \frac{4a}{3\pi} - \frac{3 \cdot a^2}{16} \cdot \frac{a}{6}}{\frac{\pi a^2}{4} - \frac{3a^2}{16}} = 0,506a$$

$$y_G = \frac{S_1 \cdot y_{1G} - S_2 \cdot y_{2G}}{S_1 - S_2} = \frac{\frac{\pi \cdot a^2}{4} \cdot \frac{4a}{3\pi} - \frac{3 \cdot a^2}{16} \cdot \frac{a}{4}}{\frac{\pi a^2}{4} - \frac{3a^2}{16}} = 0,479a$$

I.4.Méthode de Guldin

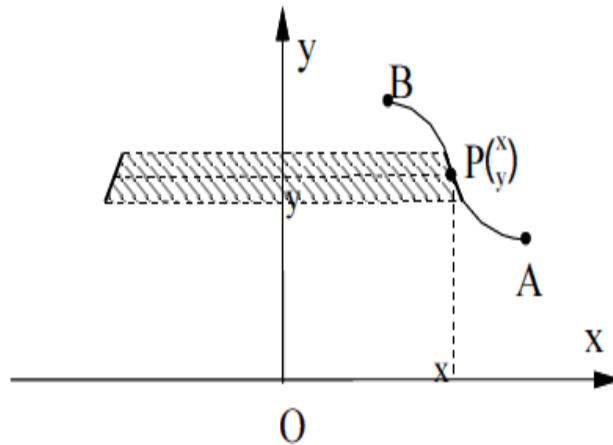
Une seconde méthode pour la détermination des centres d'inertie des solides linéaires ou surfaciques homogènes fut trouvée par Guldin. Elle consiste à faire tourner ces solides autour des axes qu'ils n'interceptent pas. Les solides linéaires décriront des surfaces et les solides surfaciques décriront des volumes.

I.4.1.1^{er} Théorème de Guldin

AB est une courbe homogène située dans le plan xOy.

Une rotation de AB autour de Oy/(Ox) engendre une surface $S_y/(S_x)$. La rotation autour de

Oy du petit élément $d\ell$, construit autour de P, engendre une surface $dS_y = 2\pi x d\ell$



Donc :

$$S_y = \int_{AB} 2\pi x d\ell \Rightarrow \int_{AB} x d\ell = \frac{S_y}{2\pi}$$

La rotation du même élément autour de Ox engendre la surface $dS_x = 2\pi y d\ell$

$$\text{Alors : } S_x = \int_{AB} 2\pi y d\ell \Rightarrow \int_{AB} y d\ell = \frac{S_x}{2\pi}$$

Le centre de masse G de (AB) est tel que $m \overrightarrow{OG} = \int_{AB} \overrightarrow{OP} dm \Rightarrow \lambda L \overrightarrow{OG} = \int_{AB} \lambda \overrightarrow{OP} d\ell$

Par projection dans le plan xOy :

$$x_G = \frac{1}{L} \int_{AB} x d\ell = \frac{S_y}{2\pi L}$$

et

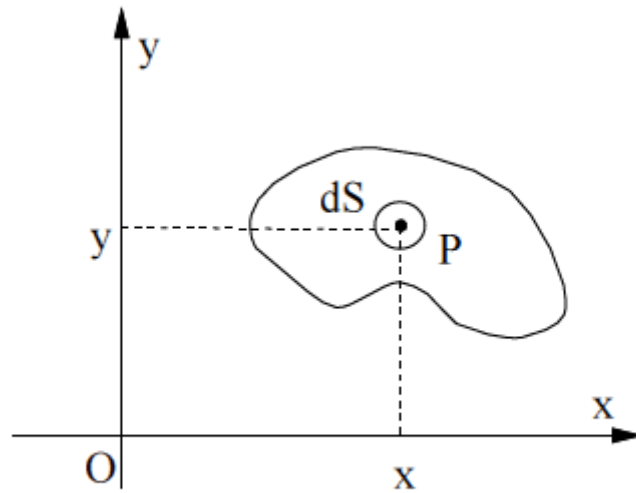
$$y_G = \frac{1}{L} \int_{AB} y d\ell = \frac{S_x}{2\pi L}$$

Dans le cas d'un système homogène de plusieurs éléments on aura :

$$R_G = \frac{S_{totale/\Delta}}{2\pi L_{totale}}$$

I.4.2.2^{ème} Théorème de Guldin

Soit (S) une surface plane située dans le plan xOy.



Une rotation de élément ds autour de Oy engendre le volume $dV_y = 2\pi x ds \Rightarrow$

$$V_y = \int_S dV_y = 2\pi \int_S x ds \Rightarrow \int_S x ds = \frac{V_y}{2\pi}$$

De même, une rotation ds autour de Ox engendre le volume $dV_x = 2\pi y ds \Rightarrow$

$$V_x = \int_S dV_x = 2\pi \int_S y ds \Rightarrow \int_S y ds = \frac{V_x}{2\pi}$$

Comme $\vec{OG} = \int_{AB} \vec{OP} dm \Rightarrow \vec{OG} = \frac{1}{S} \int_{(S)} \vec{OP} ds$

Par projection on aura :

$$x_G = \frac{1}{S} \int_S x ds = \frac{V_y}{2\pi S}$$

et

$$y_G = \frac{1}{S} \int_S y ds = \frac{V_x}{2\pi S}$$

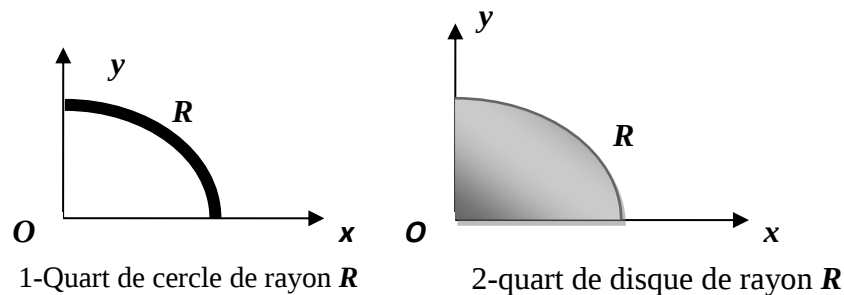
I.4.3. Calcul du centre d'inertie par la méthode de Guldin

Exercice 1

Déterminer les coordonnées des centres d'inertie des corps homogènes suivants dans le repère (Oxy) :

1-quart de cercle de rayon R .

2-quart de disque de rayon R .



Solution

1-Centre d'inertie du quart de cercle :

Par raison de symétrie :

$$x_G = y_G = \frac{S_{tot/y}}{2\pi \cdot L_{tot}} = \frac{S_{demi-sphère}}{2\pi \cdot L_{tot}} = \frac{2\pi \cdot R^2}{2\pi \cdot \frac{\pi}{2} \cdot R} = \frac{2R}{\pi} ;$$

Donc le centre d'inertie du quart de cercle est le point $G \left(\frac{2R}{\pi}, \frac{2R}{\pi} \right)$

2-Centre d'inertie du quart de disque :

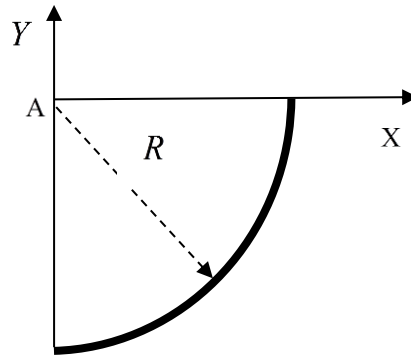
Par raison de symétrie :

$$x_G = y_G = \frac{V_{tot/y}}{2\pi \cdot S_{tot}} = \frac{V_{demi-sphère}}{2\pi (S_{quart-disque})} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \pi R^3}{2\pi \cdot \frac{\pi R^2}{4}} = \frac{4R}{3\pi} ;$$

Donc le centre d'inertie du quart de disque est le point $G \left(\frac{4R}{3\pi}, \frac{4R}{3\pi} \right)$

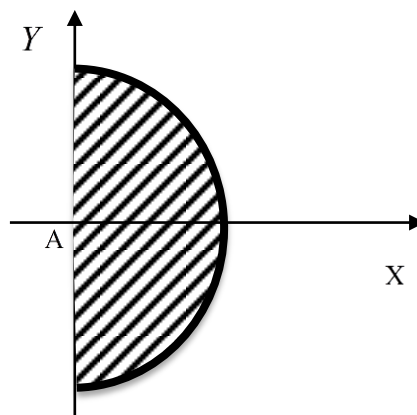
Exercice 2

- 1- Déterminer les coordonnées (X_G, Y_G) du centre de masse du corps homogène linéique suivant, ayant la forme d'un quart de cercle.
- 2- En déduire l'aire de la surface de révolution obtenue, lors de la rotation du corps autour de l'axe Ox.

**Solution****Détermination de X_G**

On applique directement le premier théorème de Guldin :

$$X_G = \frac{S_{Tot/OY}}{2\pi \cdot L_{tot}} = \frac{(4\pi R^2)/2}{2\pi \cdot (2\pi R)/4} = \frac{2R}{\pi}$$

Détermination de Y_G 

On fait une translation de repère vers le point A.

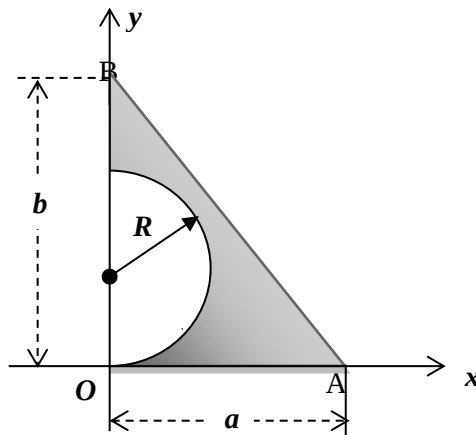
En tournant le solide par rapport à l'axe **AX** on obtient la surface d'une demi-sphère. On applique le premier théorème de Guldin :

$$Y_G = R - \frac{S_{Tot/AX}}{2\pi \cdot L_{tot}} = R - \frac{(4\pi R^2)/2}{2\pi \cdot (2\pi R)/4} = R - \frac{2R}{\pi} = R \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)$$

Exercice 3

1-En utilisant le théorème de Guldin calculer la surface de révolution d'un cône de hauteur b et de rayon de base a .

2-Déterminer le centre d'inertie du système ci-dessous par le théorème de Guldin.



Solution

1-Le centre d'inertie de la droite **AB** est en son milieu $C(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$. Le segment **AB** en rotation autour de l'axe y décrira une surface conique de hauteur b et de rayon a Application du

premier théorème de Guldin : $S = 2\pi \cdot \frac{a}{2} \cdot AB = 2\pi \cdot \frac{a}{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$

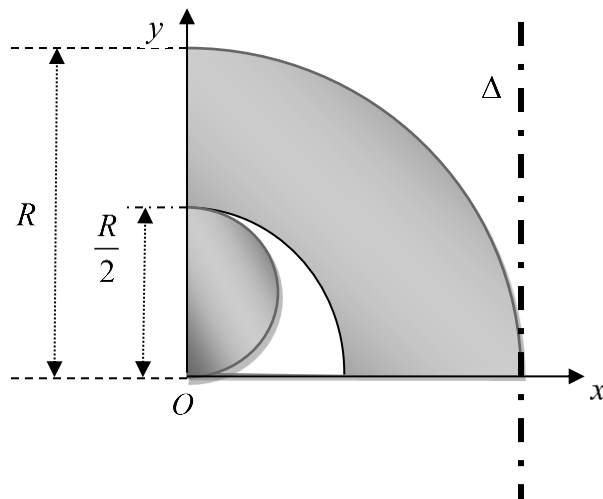
2-Centre d'inertie du système :

$$x_G = \frac{V_{tot/y}}{2\pi \cdot S_{tot}} = \frac{V_{cone} - V_{sphère}}{2\pi \cdot (\frac{ab}{2} - \frac{\pi R^2}{2})} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \pi a^2 \cdot b - \frac{4}{3} \pi R^3}{2\pi \cdot (\frac{ab}{2} - \frac{\pi R^2}{2})} = \frac{a^2 b - 4R^3}{3(ab - \pi R^2)}$$

$$y_G = \frac{V_{tot/x}}{2\pi \cdot S_{tot}} = \frac{V_{cone} - V_{demittoire}}{2\pi \cdot (\frac{ab}{2} - \frac{\pi R^2}{2})} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \pi b^2 \cdot a - 2\pi \cdot R \cdot \frac{\pi R^2}{2}}{2\pi \cdot (\frac{ab}{2} - \frac{\pi R^2}{2})} = \frac{b^2 a - 3\pi R^3}{3(ab - \pi R^2)}$$

Exercice 4

Soit la figure suivante :



1-En utilisant le théorème de Guldin, déterminer le centre d'inertie de la surface homogène

(S), constituée d'un demi-disque et d'un quart de couronne circulaire

2-En déduire le volume engendré par la rotation de (S) autour de l'axe (Δ).

Solution

1-Coordonnées du centre d'inertie du solide surfacique :

D'après le théorème du Guldin on a :

$$x_G = \frac{V_{tot/0y}}{2\pi S_{tot}} = \frac{V_{demi-grandesphère} - V_{demi-petitesphère} + V_{petitesphère}}{2\pi (S_{grandquartdisque} - S_{petitquartdisque} + S_{demi disque})}$$

$$x_G = \frac{\frac{2}{3}\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^3 + \frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{4}\right)^3}{2\pi\left[\frac{\pi R^2}{4} - \frac{\pi}{4}\left(\frac{R}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{2}\left(\frac{R}{4}\right)^2\right]} = \frac{\pi R^3\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{12} + \frac{1}{54}\right)}{2\pi \cdot \pi R^2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32}\right)} = 0.438R$$

$$y_G = \frac{V_{tot/Ox}}{2\pi S_{tot}} = \frac{V_{demi-grandesphère} - V_{demi-petitesphère} + V_{demitorre}}{2\pi(S_{grandquartdisque} - S_{petitquartdisque} + S_{demi-disque})}$$

$$y_G = \frac{\frac{2}{3}\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^3 + 2\pi\left(\frac{R}{4}\right) \cdot \frac{\pi}{2}\left(\frac{R}{4}\right)^2}{2\pi\left[\frac{\pi R^2}{4} - \frac{\pi}{4}\left(\frac{R}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{2}\left(\frac{R}{4}\right)^2\right]} = \frac{\pi R^3\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{12} + \frac{\pi}{64}\right)}{2\pi \cdot \pi R^2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32}\right)} = 0.46R$$

2-Volume obtenu en tournant le solide autour de l'axe (Δ)

Comme le centre d'inertie de ce solide est connu, nous pouvons calculer le volume engendré en tournant le solide autour de l'axe (Δ) :

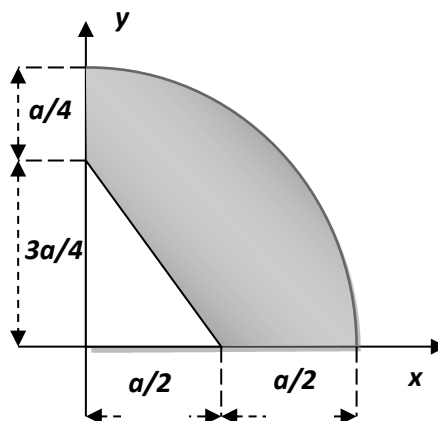
$$V_{tot} = 2\pi \cdot R_G \cdot S_{tot} = 2\pi \cdot (R - 0,307R) \cdot \left(\frac{\pi R^2}{4} - \frac{\pi}{4}\left(\frac{R}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{2}\left(\frac{R}{4}\right)^2 \right)$$

$$V_{tot} = 2\pi \cdot (R - x_G) \cdot \pi R^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \right) = 2.23R^3$$

Exercice 5

Le système suivant est composé d'un quart de disque homogène évidé d'un triangle rectangle.

Déterminer le centre d'inertie du solide en utilisant le théorème de Guldin ;



Solution

1) Centre d'inertie par le théorème de Guldin : $S_{tot} = \frac{\pi a^2}{4} - \frac{3a^2}{16}$

$$x_G = \frac{V_{tot/y}}{2\pi \cdot S_{tot}} = \frac{V_{demi-sphère} - V_{cône}}{2\pi \cdot S_{tot}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi a^3 - \frac{1}{3} \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{3a}{4}}{2\pi \left(\frac{\pi a^2}{4} - \frac{3a^2}{16}\right)} = 0,506a$$

$$y_G = \frac{V_{tot/x}}{2\pi \cdot S_{tot}} = \frac{V_{demi-sphère} - V_{cône}}{2\pi \cdot S_{tot}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi a^3 - \frac{1}{3} \pi \left(\frac{3a}{4}\right)^2 \cdot \frac{a}{2}}{2\pi \left(\frac{\pi a^2}{4} - \frac{3a^2}{16}\right)} = 0,479a$$

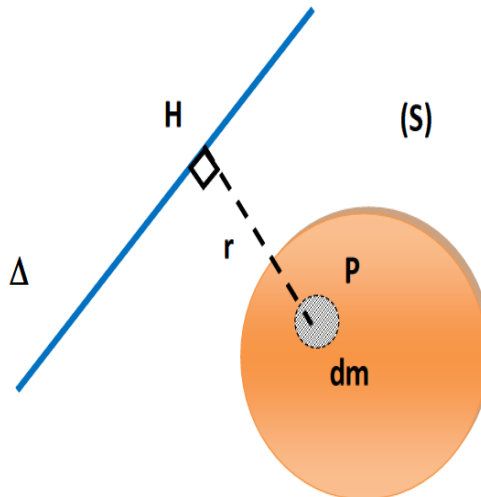
II.1.Moment d'inertie - Opérateur d'inertie

II.2.Définitions

La notion de moment d'inertie présente un grand intérêt sur le plan de la véritable histoire de la mécanique et sur celui de la philosophie et de ses principes. C'est en 1673 que Huygens, dans la solution du problème du centre d'oscillation du pendule composé (livre : Traité du Pendule), fit apparaître pour la première fois une quantité de la forme $\sum mr^2$. C'est en 1810-1811 que cette quantité intervint pour la première fois sous le nom de moment d'inertie, et d'une manière officielle et systématique, dans l'enseignement de la Mécanique des solides indéformables.

Concernant la signification physique, le moment d'inertie est une grandeur qui caractérise la géométrie des masses d'un solide, c'est-à-dire la répartition de la matière en son sein. Il quantifie également la résistance à une mise en rotation de ce solide (ou plus généralement à une accélération angulaire).

II.3.Moment d'inertie par rapport à un axe



Le moment d'inertie d'un solide (S) par rapport à un axe (Δ) est le scalaire positif défini par:

$$I_{\Delta}(S) = \int_{p \in (S)} r^2 dm$$

$r = PH = d(P, \Delta)$ est la distance du point P du solide (S) à l'axe (Δ). H étant la projection orthogonale du point P sur l'axe (Δ).

II.4. Matrice d'inertie

Pour un solide (S) donné, un point O appartenant à (S) et un repère orthonormé $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, on appelle tenseur d'inertie de (S), en O, relativement au repère considéré, noté I_0 , la matrice symétrique :

$$I_0(S) = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Avec :

$$I_{xx} = \int_{(S)} (y^2 + z^2) dm$$

$$I_{yy} = \int_{(S)} (x^2 + z^2) dm$$

$$I_{zz} = \int_{(S)} (x^2 + y^2) dm$$

$$I_{xy} = \int_{(S)} xy dm$$

$$I_{xz} = \int_{(S)} xz dm$$

$$I_{yz} = \int_{(S)} yz dm$$

Les éléments diagonaux : I_{xx}, I_{yy} et I_{zz} s'appellent les moments d'inertie .

Les éléments non-diagonaux : I_{xy}, I_{yz} et I_{xz} s'appellent les produits d'inertie.

II.4.1. Solides présentant des plans de symétrie

I_{xx} : est le produit d'inertie de (S) par rapport à l'axe (OX).

I_{yy} : est le produit d'inertie de (S) par rapport à l'axe (OY).

I_{zz} : est le produit d'inertie de (S) par rapport à l'axe (OZ).

I_{xy} : est le moment d'inertie de (S) par rapport aux axes (OX) et (OY).

I_{xz} : est le moment d'inertie de (S) par rapport aux axes (OX) et (OZ).

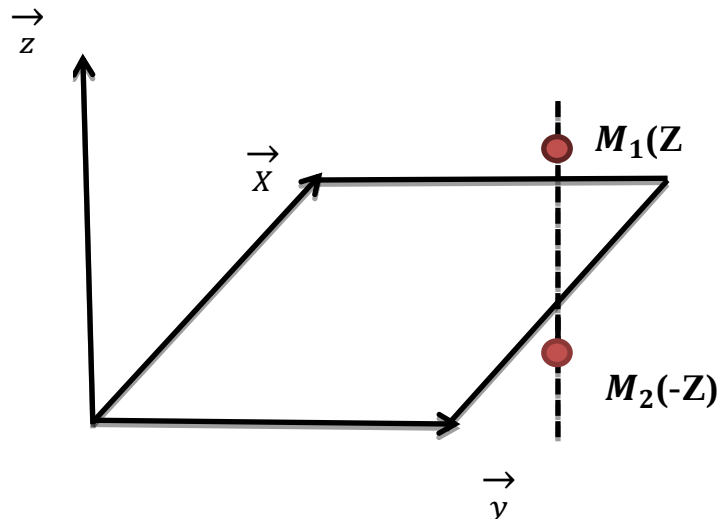
I_{yz} : est le moment d'inertie de (S) par rapport aux axes (OY) et (OZ).

Certains solides présentent des formes particulières admettant des plans de symétrie par rapport aux axes du repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, choisi. Pour chaque plan de symétrie, les produits d'inertie sur les deux autres plans sont nuls :

- **Si Oxy est un plan de symétrie** : à tout point M_1 de côté z , on peut associer le point M_2 de côté $-z$.

$$I_{xz} = \int_{P \in (S)} x z \, dm = 0 \text{ et } I_{yz} = \int_{P \in (S)} y z \, dm = 0 \quad \text{car} \quad Z_G = 0$$

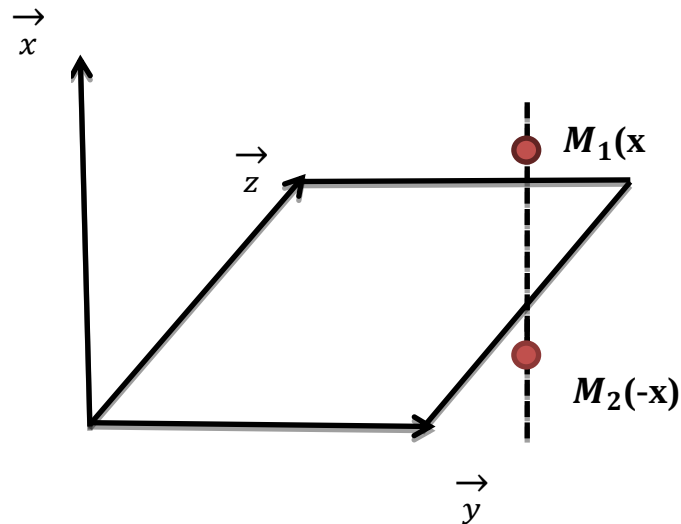
$$I_0(S) = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & 0 \\ -I_{xy} & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$



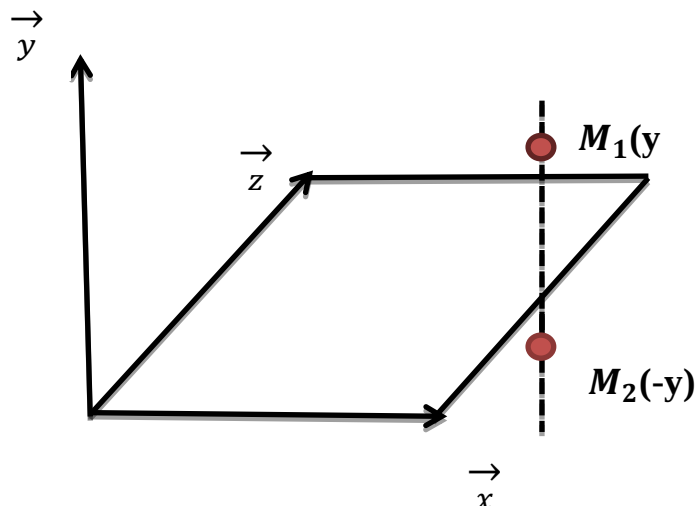
- **Si Oyz est un plan de symétrie** : à tout point M_1 de côté x , on peut associer le point M_2 de côté $-x$.

$$I_{yx} = \int_{P \in (S)} x y \, dm = 0 \text{ et } I_{zx} = \int_{P \in (S)} z x \, dm = 0 \quad \text{car} \quad X_G = 0$$

$$I_0(S) = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & -I_{yz} \\ 0 & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$$



- **Si Oxz est un plan de symétrie** : à tout point M_1 de côté y , on peut associer le point M_2 de côté $-y$.



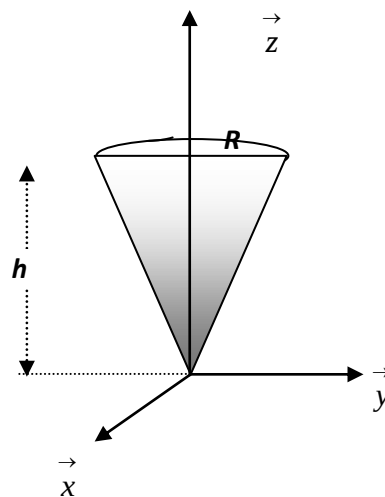
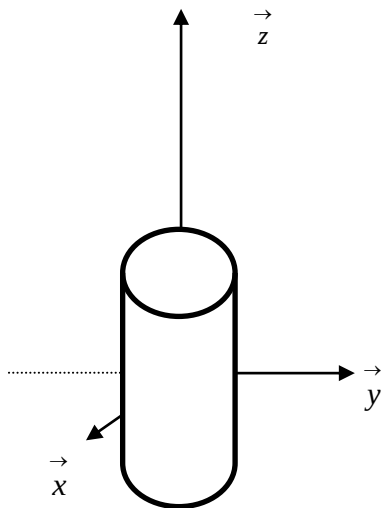
$$I_{yz} = \int_{P \in (S)} y z \, dm = 0 \text{ et } I_{xy} = \int_{P \in (S)} x y \, dm = 0 \quad \text{car} \quad Y_G = 0$$

$$I_0(S) = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & -I_{xz} \\ 0 & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

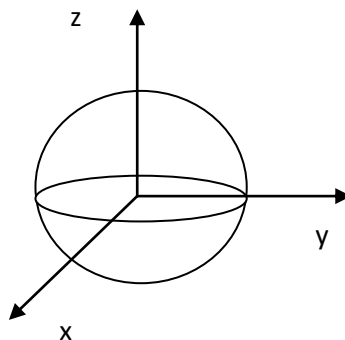
II.4.2. Solides à symétrie de révolution

Dans le cas des solides ayant un axe de révolution tel que (cylindre, disque, cône, etc...), la masse est répartie de façon symétrique autour de cet axe. Soit un cylindre d'axe de révolution $\overrightarrow{OZ}$ dans un repère orthonormé $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Tout plan passant par l'axe $\overrightarrow{OZ}$ est un plan de symétrie, donc tous les produits d'inertie sont nuls.

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$$



II.4.3. Solides à symétrie sphériques



Pour tout solide à symétrie sphérique (sphère pleine ou creuse) de centre O, tous les repères $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ ayant pour centre le même point O sont des repères principaux d'inertie.

Les trois axes du repère jouent le même rôle, alors tous les moments d'inertie sont égaux :

$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$ et tous les produits d'inertie sont nuls car tous les plans sont des plans de symétrie : $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$

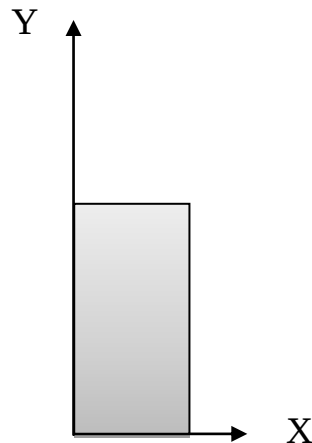
II.4.4. Solides plans

Dans le cas des solides plans, l'une des coordonnées de l'élément, dm est nulle. Si le solide est dans le plan (xOy) alors $z = 0$

On déduit immédiatement que :

$$I_{xx} = \int_{(S)} y^2 dm, \quad I_{yy} = \int_{(S)} x^2 dm \text{ d'où :}$$

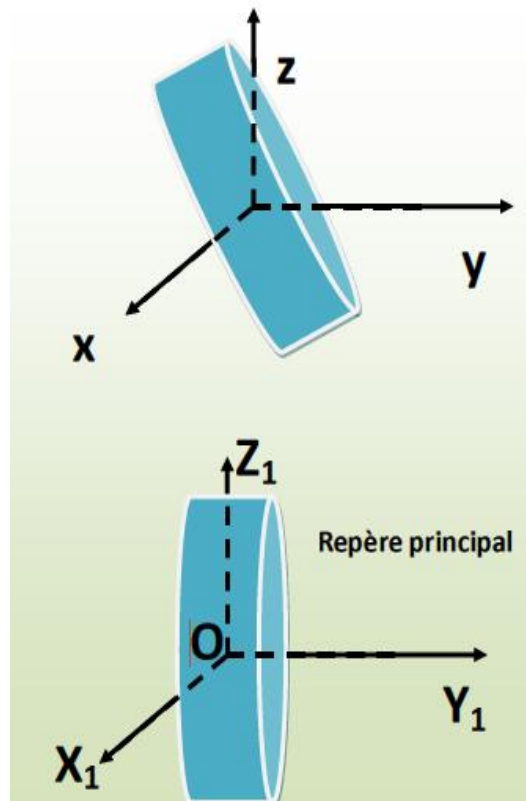
$$I_{zz} = \int_{(S)} (x^2 + y^2) dm = I_{xx} + I_{yy}; \quad \text{et } I_{xz} = I_{yz} = 0; \quad I_{xy} = \int_{(S)} x y dm$$



Le moment d'inertie par rapport à l'axe perpendiculaire au plan du solide est égal à la somme des moments par rapport aux deux axes du plan du solide.

II.5. Matrice principale d'inertie

La matrice d'inertie est symétrique, donc elle est diagonalisable et ses valeurs propres sont réelles. Elle possède un système de 3 vecteurs propres deux à deux orthogonaux qui forment une base principale d'inertie.



Les repères (R_P), associés aux bases principales s'appellent les repères principaux d'inertie dont les axes s'appellent les axes principaux d'inertie.

Dans un repère principal d'inertie (R_P), d'origine O la matrice d'inertie est diagonale:

$$I_O(S) = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres I_{xx} , I_{yy} et I_{zz} de la matrice d'inertie s'appellent les moments principaux d'inertie du solide (S) au point O.

➤ **Moment d'inertie par rapport à un point A**

$$I_A(S) = \int_{p \in (S)} r^2 dm$$

Où $r(P) = AP = d(P, A)$ est la distance du point P du solide (S) au point A.

➤ **Moment d'inertie du solide (S) par rapport au point O origine du référentiel (R)**

$$I_O = \int_{(S)} (x^2 + y^2 + z^2) dm$$

$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ est le carré de la distance du point P au point O.

II.6. Théorème de Huygens

Si le tenseur d'inertie est connu au centre d'inertie G du solide (S) dans la base R; alors on peut déterminer le tenseur d'inertie au point O dans la même base.

Le tenseur d'inertie en G I_G^* connu $\Rightarrow$ déterminé I_O en fonction de I_G^* ?

On pose :

$$\overrightarrow{OP} \begin{cases} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{cases} \quad \overrightarrow{OG} \begin{cases} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{cases} \quad \overrightarrow{GP} \begin{cases} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GP} \Rightarrow x_i = a_i + x_i^* \quad \text{avec } i = 1, 2, 3$$

II.6.1. Expressions des produits d'inertie I_{ij}

$$I_{ij} = \int_{p \in (S)} x_i x_j dm = \int_{p \in (S)} (a_i + x_i^*) (a_j + x_j^*) dm$$

$$I_{ij} = \int_{p \in (S)} x_i^* x_j^* dm + m a_i a_j + a_i \int_{p \in (S)} x_j^* dm + a_j \int_{p \in (S)} x_i^* dm$$

D'après la définition du centre d'inertie :

$$\int_{p \in (S)} x_j^* dm = \int_{p \in (S)} \overrightarrow{GP} dm = 0$$

Donc

$$I_{ij} = I_{ij}^* + m a_i a_j$$

D'où

$$I_{xy} = I_{xy}^* + m a_1 a_2$$

$$I_{yz} = I_{yz}^* + m a_2 a_3$$

$$I_{xz} = I_{xz}^* + m a_1 a_3$$

II.6.2. Expressions des moments d'inertie I_{ii}

$$I_{ii} = \int_{p \in (S)} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_i^2) dm$$

$$\text{Puisque } x_i = a_i + x_i^*$$

$$\text{On a donc } x_i^2 = a_i^2 + 2a_i x_i^* + x_i^{*2}$$

$$\begin{aligned} I_{ii} = m(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_i^2) + 2a_1 \int_{p \in (S)} x_1^* dm + 2a_2 \int_{p \in (S)} x_2^* dm + 2a_3 \int_{p \in (S)} x_3^* dm \\ - 2a_i \int_{p \in (S)} x_i^* dm + \int_{p \in (S)} (x_1^{*2} + x_2^{*2} + x_3^{*2} - x_i^{*2}) dm \end{aligned}$$

Comme précédemment

$$\int_{p \in (S)} x_i^* dm = 0 \quad i = 1, 2, 3$$

D'où

$$I_{ii} = I_{ii}^* + m(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_i^2)$$

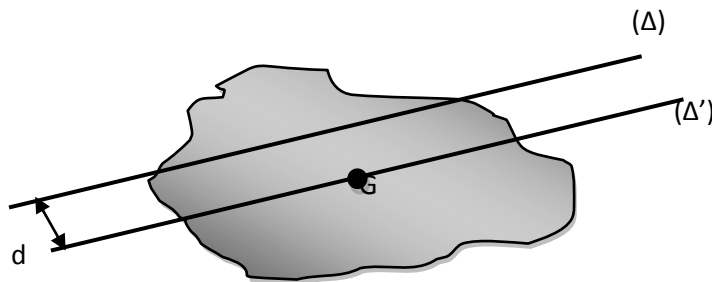
Donc

$$I_{xx} = I_{xx}^* + m(a_2^2 + a_3^2)$$

$$I_{yy} = I_{yy}^* + m(a_1^2 + a_3^2)$$

$$I_{zz} = I_{zz}^* + m(a_1^2 + a_2^2)$$

- Le moment d'inertie d'un système par rapport à la droite $(O, \vec{n})$ est égale au moment d'inertie de ce système par rapport à la droite $(G, \vec{n})$ augmenté du moment d'inertie de G affecté de la masse par rapport à la droite $(O, \vec{n})$.



$$I_{\Delta} = I_{\Delta'} + M d^2$$

- Le produit d'inertie d'un système par rapport à deux droites perpendiculaires $(O, \vec{n})$ et $(O, \vec{t})$ est égale au produit d'inertie de ce système par rapport aux droites $(G, \vec{n})$ et $(G, \vec{t})$ augmenté du produit d'inertie de G, affecté de la masse totale, par rapport aux $(O, \vec{n})$ et $(O, \vec{t})$.

II.7.Exercices sur le moment d'inertie

Exercices 1

1-Déterminer par le théorème de Guldin la surface latérale de l'enveloppe cônica mince obtenue par la rotation autour de l'axe (Oz) de la barre AB de longueur L (voir *figure 01*). Retrouver cette valeur par intégration.

2-Déterminer le tenseur d'inertie en O du corps homogène obtenu par la rotation autour de l'axe Oz de la barre coudée OAB de la *figure 2*.

On posera : m_1 = masse du disque et m_2 = masse de l'enveloppe conique

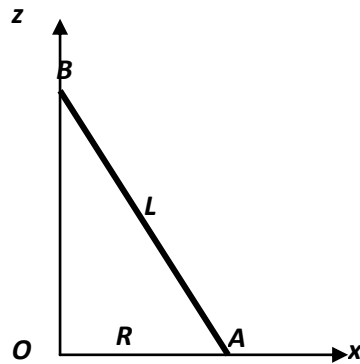


Figure :01

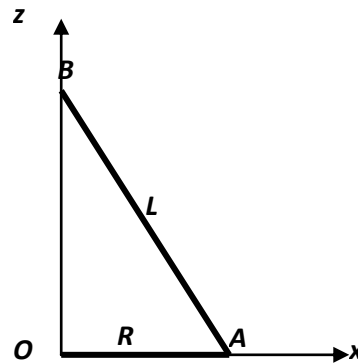


Figure :02

Solution

1-Surface Latérale :

a) Par le théorème de Guldin

$$S = 2\pi \cdot R_G \cdot L \quad ; \quad \vec{OG} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2} \quad ;$$

$$\vec{OG} = \begin{cases} R/2 \\ h/2 \end{cases} \quad \text{avec} \quad R_G = CG = \frac{R}{2}$$

$$\text{Alors : } S = 2\pi \cdot \frac{R}{2} \cdot L = \pi \cdot R \cdot L$$

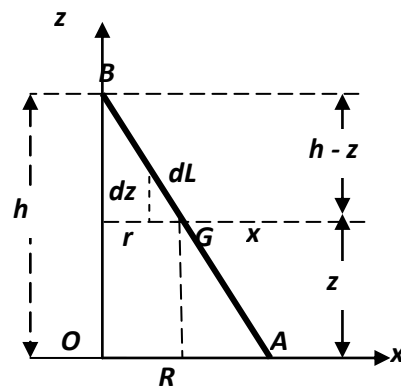


Figure :01

b) Par intégration

L'élément d'intégration est donné par : $ds = 2\pi.r.dL$

Les triangles OAB et CGB sont semblables, nous avons : $\frac{CG}{OA} = \frac{CB}{OB} \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{h-z}{h}$

Nous avons aussi : $\frac{dz}{dL} = \frac{h}{L} \Rightarrow dL = \frac{L}{h} dz$ et $h^2 + R^2 = L^2$

$$ds = 2\pi.r.dL = 2\pi \frac{R(h-z)}{h} \cdot \frac{L}{h} dz \Rightarrow S = \frac{2\pi.R.L}{h^2} \int_0^h (h-z) dz$$

$$S = \frac{2\pi.R.L}{h^2} \left(h^2 - \frac{h^2}{2} \right) = \pi.R.L$$

2-Tenseur d'inertie :

La rotation de la barre **OA** autour de l'axe **Oz** donne un disque de masse m_1 de rayon **R**, et la barre **AB** donne une enveloppe conique de masse m_2 . Le moment d'inertie du système est la somme des moments d'inertie des deux solides : $I_{O(\text{syst})} = I_{O(\text{disque})} + I_{O(\text{cône})}$

Pour le disque :

(xoz) et **(yoz)** sont des plans de symétrie : $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$

Les axes Ox et Oy jouent le même rôle alors : $I_{xx} = I_{yy}$; de plus nous avons un solide plan

$$\text{alors : } I_{xx} + I_{yy} = I_{zz} \Rightarrow I_{xx} = I_{yy} = \frac{I_{zz}}{2}$$

$$I_{zz} = \int_S (x^2 + y^2) dm = \frac{m_1 R^2}{2} \Rightarrow I_{xx} = I_{yy} = \frac{m_1 R^2}{4} ; \quad I_{O(\text{disque})} = \begin{bmatrix} \frac{m_1 R^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_1 R^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_1 R^2}{2} \end{bmatrix}$$

Pour l'enveloppe conique : (Oz) est un axe de révolution

Les plans **(xoz)** et **(yoz)** sont des plans de symétrie : $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$

Les axes **Ox** et **Oy** jouent le même rôle alors : $I_{xx} = I_{yy}$

$$I_{zz} = \int_S (x^2 + y^2) dm = \int_S r^2 dm = \int_S r^2 \sigma . ds ; \text{ on a déjà } ds = 2\pi.r.dL = \frac{2\pi.R.L}{h^2} (h-z) dz$$

$$I_{zz} = \int_S r^2 \sigma \cdot \frac{2\pi \cdot R \cdot L}{h^2} (h-z) dz = \sigma \int_S \frac{R^2}{h^2} (h-z)^2 \cdot \frac{2\pi \cdot R \cdot L}{h^2} (h-z) dz = \sigma \cdot \pi \cdot R \cdot L \cdot \frac{R^2}{2} = \frac{m_2 R^2}{2}$$

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{I_{zz}}{2} + \int_S z^2 dm ; \text{ on calcul seulement l'intégrale: } \int_S z^2 dm$$

$$\int_S z^2 dm = \int_S z^2 \cdot \sigma \cdot \frac{2\pi \cdot R \cdot L}{h^2} (h-z) dz = \sigma \cdot \frac{2\pi \cdot R \cdot L}{h^2} \cdot \frac{h^4}{12} = \frac{m_2 h^2}{6}$$

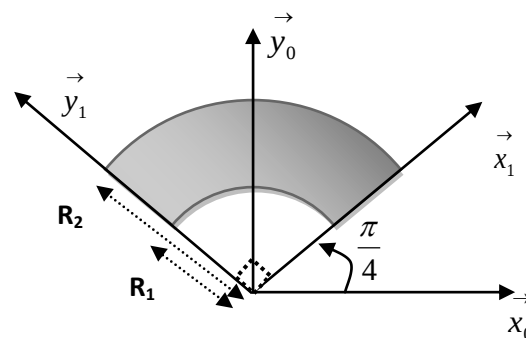
$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{m_2 R^2}{4} + \frac{m_2 h^2}{6}$$

$$I_{O(\text{c\^one})} = \begin{bmatrix} \frac{m_2 R^2}{4} + \frac{m_2 h^2}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_1 R^2}{4} + \frac{m_2 h^2}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_2 R^2}{2} \end{bmatrix} ; \text{ avec : } h^2 = L^2 - R^2$$

$$I_{O(\text{syst\^eme})} = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2) \frac{R^2}{4} + \frac{m_2 h^2}{6} & 0 & 0 \\ 0 & (m_1 + m_2) \frac{R^2}{4} + \frac{m_2 h^2}{6} & 0 \\ 0 & 0 & (m_1 + m_2) \frac{R^2}{2} \end{bmatrix}$$

Exercice 2

Soit le solide surfacique homogène suivant formé d'un quart de couronne circulaire de rayon intérieur R_1 et extérieur R_2 de densité surfacique σ et de masse M comme représenté sur la figure.



1-Montrer que la masse du solide est donnée par :

$$M = \frac{\sigma\pi}{4}(R_2^2 - R_1^2)$$

2-Calculer le tenseur d'inertie du solide au point **O** par rapport au repère $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ en fonction de **M**, **R₁** et **R₂** ;

Solution

1-Masse du solide :

$$M = \sigma S_2 - \sigma S_1 = \sigma \frac{\pi R_2^2}{4} - \sigma \frac{\pi R_1^2}{4} = \sigma \frac{\pi}{4}(R_2^2 - R_1^2)$$

2-Tenseur d'inertie au point O par rapport au repère R_1

S_2 : Grand quart de disque S_1 : petit quart de disque, la différence donne un quart de couronne.

Nous avons : $I_{xx} = I_{yy} = \frac{I_{zz}}{2}$ (solide plan et les axes x et y jouent le même rôle)

$$I_{zz} = \int_S (x^2 + y^2) dm = \int_S (x^2 + y^2) \sigma r d\theta dr = \sigma \int_S r^2 r d\theta dr = \sigma \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr \int_0^{\pi/2} d\theta = \sigma \frac{\pi}{2} \left(\frac{R_2^4 - R_1^4}{4} \right)$$

$$I_{zz} = \sigma \frac{\pi}{4} (R_2^2 - R_1^2) \left(\frac{R_2^2 + R_1^2}{2} \right) = M \left(\frac{R_2^2 + R_1^2}{2} \right) = 2A \quad \text{alors : } I_{xx} = I_{yy} = M \left(\frac{R_2^2 + R_1^2}{4} \right) = A$$

$$I_{xy} = \int_S xy dm = \int_S r \cos \theta \cdot r \sin \theta \sigma r d\theta dr = \sigma \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr \cdot \int_0^{\pi/2} \sin \theta d(\sin \theta) = \sigma \frac{1}{2} \left(\frac{R_2^4 - R_1^4}{4} \right)$$

$$I_{xy} = \sigma \frac{\pi}{2\pi} \left(\frac{R_2^4 - R_1^4}{4} \right) = \sigma \frac{\pi}{4} (R_2^2 - R_1^2) \left(\frac{R_2^2 + R_1^2}{2\pi} \right) = M \left(\frac{R_2^2 + R_1^2}{2\pi} \right) = B$$

La matrice d'inertie du solide s'écrit dans le repère R_1 : $I_O(S/R_1) = \begin{bmatrix} A & -B & 0 \\ -B & A & 0 \\ 0 & 0 & 2A \end{bmatrix}_{R_1}$

Exercice 3

On considère maintenant la tige AB homogène et de masse M avec les masses m_A et m_B aux extrémités (figure 1).

Calculer en fonction de m, L et M :

1-Le centre de masse du système par rapport au repère (Oxyz).

2-Le tenseur d'inertie du système au point O.

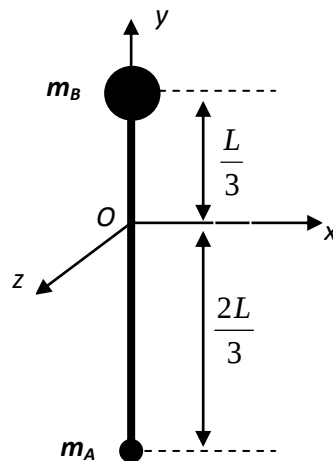


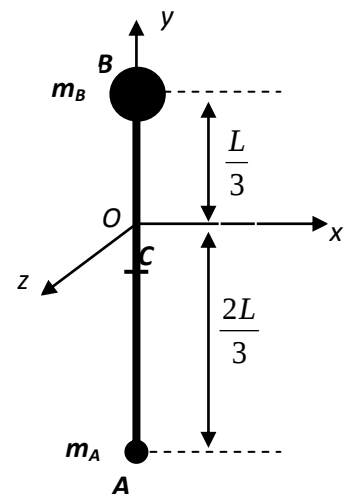
Figure 1

Solution

$$1) \quad m_A = \begin{cases} 0 \\ -2L/3 \\ 0 \end{cases} ; \quad m_B = \begin{cases} 0 \\ L/3 \\ 0 \end{cases} ; \quad M = \begin{cases} 0 \\ -L/6 \\ 0 \end{cases}$$

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} \quad \text{et} \quad \vec{OC} = \vec{OB} + \vec{BC}$$

$$2\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB} \Rightarrow \vec{OC} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2} \quad \text{d'où} \quad \vec{OC} = \begin{cases} 0 \\ -L/6 \\ 0 \end{cases}$$



Centre d'inertie du système :

$$y_G = \frac{y_A m_A + y_B m_B + y_C M}{m_A + m_B + M}$$

$$= \frac{(-2L/3)m + (L/3)3m + (-L/6)M}{m + 3m + M} = \frac{L}{6} \frac{2m - M}{4m + M}$$

2) Tenseur d'inertie du système au point O : $I(\text{syst})/O = I(m_A)/O + I(m_B)/O + I(M)/O$

$$I(m_A)/O = \begin{bmatrix} m\left(\frac{2L}{3}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m\left(\frac{2L}{3}\right)^2 \end{bmatrix} ; \quad I(m_B)/O = \begin{bmatrix} 3m\left(\frac{L}{3}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3m\left(\frac{L}{3}\right)^2 \end{bmatrix}$$

$$I(M)/G = \begin{bmatrix} \frac{ML^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ML^2}{12} \end{bmatrix} \quad \text{On passe au point O par le théorème de Huygens d'où :}$$

$$I(M)/O = \begin{bmatrix} \frac{ML^2}{12} + M\left(\frac{L}{6}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ML^2}{12} + M\left(\frac{L}{6}\right)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{ML^2}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ML^2}{9} \end{bmatrix}$$

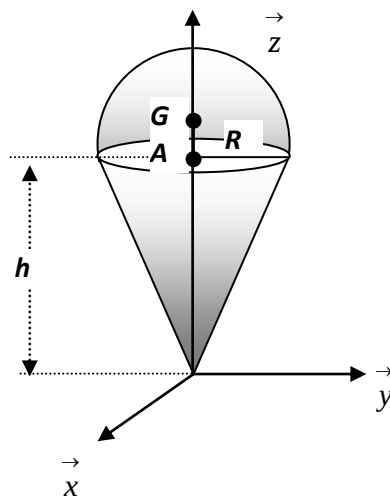
$$I(\text{syst})/O = \begin{bmatrix} \frac{7m+M}{9} L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7m+M}{9} L^2 \end{bmatrix}$$

Exercice 4

Soit le solide homogène suivant formé d'un cône plein de masse M de hauteur h et de rayon R et d'une demi sphère pleine de masse m de même rayon R , soudés entre eux comme indiqué sur la figure.

Déterminer le tenseur d'inertie du solide au point O ; dans le repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

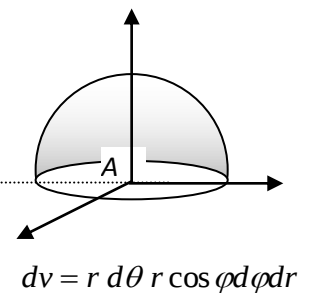
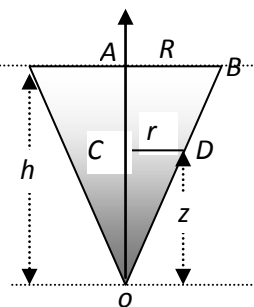
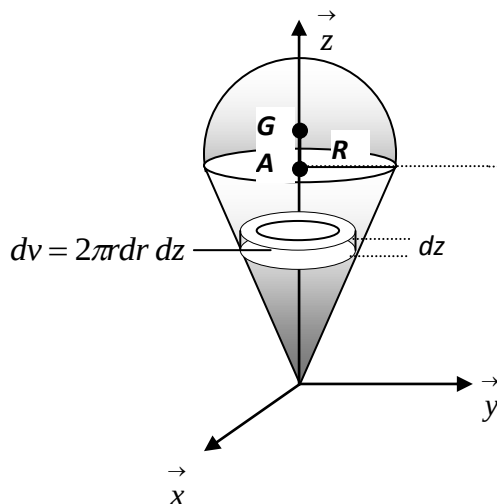
On donne : $\vec{AG} = \frac{3R}{8} \vec{z}$



Solution

Moment d'inertie du système au point O : $I_O(\text{syst}) = I_O(S_1) + I_O(S_2)$

Cône : (S_1) ; Demi sphère : (S_2)



1) **Cône** : Deux plans de symétrie (xoz) et ($yozy$) $\Rightarrow I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$

Les axes ox et oy jouent le même rôle : $I_{xx} = I_{yy}$

Nous avons : $x^2 + y^2 = r^2$ et l'élément de volume est égal à : $dm = \rho dv = \rho 2\pi r dr dz$

Dans les triangles OAB et OCD , nous avons $\frac{CD}{AB} = \frac{OC}{OA} \Leftrightarrow \frac{r}{R} = \frac{z}{h} \Rightarrow r = \frac{R}{h} z$

$$0 < r < \frac{R}{h} z \quad \text{et} \quad 0 < z < h$$

$$I_{zz} = \int_{S_1} (x^2 + y^2) dm = \int_{S_1} r^2 \cdot \rho 2\pi r dr dz = \rho 2\pi \int_0^h \left(\int_0^{\frac{R}{h}z} r^3 dr \right) dz = \rho 2\pi \frac{R^4}{4h^4} \int_0^h z^4 dz = \rho 2\pi R^2 h \cdot \frac{R^2}{10}$$

or nous avons la masse d'un cône est donnée par : $m = \frac{1}{3} \rho \pi R^2 h$ alors $\rho \pi R^2 h = 3m$

$$\text{d'où : } \underline{I_{zz} = \frac{3}{10} m R^2}$$

Nous pouvons aussi écrire :

$$2I_{xx} = I_{xx} + I_{yy} = \int_{S_1} (y^2 + z^2) dm + \int_{S_1} (x^2 + z^2) dm = \int_{S_1} (x^2 + y^2) dm + 2 \int_{S_1} z^2 dm$$

$$2I_{xx} = I_{zz} + 2 \int_{S_1} z^2 dm \Rightarrow I_{xx} = \frac{I_{zz}}{2} + \int_{S_1} z^2 dm = \frac{3}{20} m R^2 + \int_{S_1} z^2 \rho 2\pi r dr dz$$

$$I_{xx} = \frac{3}{20} m R^2 + \rho 2\pi \int_0^h \left(\int_0^{\frac{R}{h}z} r dr \right) dz = \frac{3}{20} m R^2 + \rho \pi \frac{R^2}{h^2} \int_0^h z^4 dz = \frac{3}{20} m R^2 + \rho \pi \frac{R^2}{h^2} \frac{h^5}{5}$$

$$I_{xx} = \frac{3}{20} m R^2 + \rho \pi R^2 h \cdot \frac{h^2}{5} = \frac{3}{20} m R^2 + \frac{3}{5} m h^2 = \frac{3}{5} \left(\frac{m R^2}{4} + m h^2 \right)$$



$$I_0(S_1) = \begin{bmatrix} \frac{3}{20}mR^2 + \frac{3}{5}mh^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{20}mR^2 + \frac{3}{5}mh^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10}mR^2 \end{bmatrix}$$

2) Demi-sphère pleine : Deux plans de symétrie (xAz) et (yAz) $\Rightarrow I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$

C'est la moitié d'une sphère de centre A. dans une symétrie sphérique nous avons

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$$

Avec : $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ et l'élément de volume est égal à : $dm = \rho dv = \rho r dr d\theta \cos \varphi d\varphi$

Nous avons alors :

$$3I_{xx} = I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = \int_{S_1} (y^2 + z^2) dm + \int_{S_1} (x^2 + z^2) dm + \int_{S_1} (x^2 + y^2) dm = 2 \int_{S_1} (x^2 + y^2 + z^2) dm$$

$$3I_{xx} = 2 \int_{S_1} r^2 \rho r dr d\theta \cos \varphi d\varphi = 2\rho \int_0^R r^4 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi = 2\rho \frac{R^5}{5} 2\pi \cdot 1 = 4\pi R^3 \cdot \frac{R^2}{5}$$

comme la masse de la demi sphère est égale à : $M = \rho \frac{2}{3} \pi R^3$

$$I_{xx} = \rho \frac{2}{3} \pi R^3 \cdot \frac{2R^2}{5} = \frac{2}{5} MR^2, \text{ nous avons donc le tenseur d'inertie de la demi-sphère au point}$$

A :

$$I_A(S_2) = \begin{bmatrix} 2MR^2/5 & 0 & 0 \\ 0 & 2MR^2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 2MR^2/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}$$

Pour déterminer le tenseur d'inertie au point O nous devons passer la le centre d'inertie en utilisant le théorème de Huygens deux fois : on passe **de A vers G** puis **de G vers O**.

$$I_A(S_3) = I_G(S_3) + [Md^2] \Rightarrow I_G(S_3) = I_A(S_3) - [Md^2]$$

avec : G ayant pour coordonnées $(0,0,\frac{3R}{8})$ dans le repère $R(Ax,y,z)$

$$I_G(S_2) = \begin{bmatrix} A - M(3R/8)^2 & 0 & 0 \\ 0 & A - M(3R/8)^2 & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}$$

Par la suite :

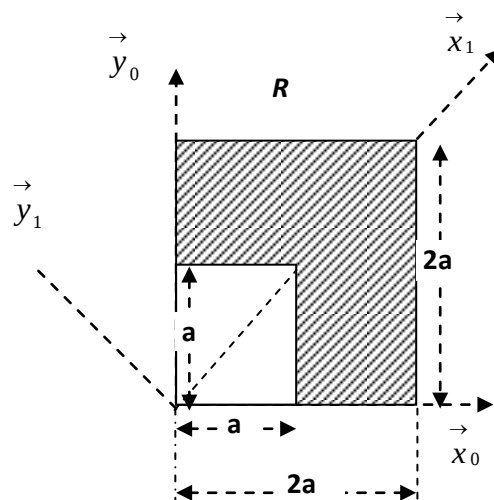
$I_O(S_3) = I_G(S_3) + [Md'^2]$, avec : G ayant pour coordonnées $(0,0,\frac{3R}{8} + h)$ dans le repère $R(Ox,y,z)$

$$I_O(S_2) = \begin{bmatrix} A - M(3R/8)^2 + M(3R/8 + h)^2 & 0 & 0 \\ 0 & A - M(3R/8)^2 + M(3R/8 + h)^2 & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}$$

Exercice 5

Soit une plaque mince S , homogène de densité surfacique σ , comme indiqué sur la figure ci-contre.

- 1- Exprimez la masse M de la plaque en fonction de a et σ ;
- 2- Donnez les coordonnées du centre d'inertie G de cette plaque dans R_0 ;
- 3- Déterminez la matrice d'inertie de la plaque au point O dans R_0 en fonction de M et a ;



Solution

1- Masse de plaque : $M = \sigma(S_1 - S_2) = \sigma(4a^2 - a^2) = 3\sigma a^2$, $m_2 = M/3$, $m_1 = \frac{4}{3}M$

2- Centre de la plaque dans R_1 : Ox_1 est une axe de symétrie, le centre d'inertie appartient à cet axe.

$$\vec{OG}_1 = \begin{cases} a/2 \\ a/2 \\ 0 \end{cases}_{R_0} ; \quad \vec{OG}_2 = \begin{cases} a \\ a \\ 0 \end{cases}_{R_0} \quad \vec{OG} = \frac{m_1 \cdot \vec{OG}_1 - m_2 \cdot \vec{OG}_2}{m_1 - m_2} = \frac{S_1 \cdot \vec{OG}_1 - S_2 \cdot \vec{OG}_2}{S_1 - S_2}$$

$$x_G = \frac{\frac{4}{3}M \cdot a - \frac{M}{3} \cdot \frac{a}{2}}{M} = \frac{7}{6}a \quad ; \quad y_G = \frac{\frac{4}{3}M \cdot a - \frac{M}{3} \cdot \frac{a}{2}}{M} = \frac{7}{6}a$$

4- Moment d'inertie de la plaque :

$$I_O(\text{plaque})/R_0 = I_O(S_1)/R_0 - I_O(S_2)/R_0$$

$$I_O(S_1)/R_0 = \begin{bmatrix} \frac{4m_1 a^2}{3} & -m_1 a^2 & 0 \\ -m_1 a^2 & \frac{4m_1 a^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8m_1 a^2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{16Ma^2}{9} & -\frac{4Ma^2}{3} & 0 \\ -\frac{4Ma^2}{3} & \frac{16Ma^2}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{32Ma^2}{9} \end{bmatrix}$$

$$I_O(S_2)/R_0 = \begin{bmatrix} \frac{m_2 a^2}{3} & -\frac{m_2 a^2}{4} & 0 \\ -\frac{m_2 a^2}{4} & \frac{m_2 a^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2m_2 a^2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Ma^2}{9} & -\frac{Ma^2}{12} & 0 \\ -\frac{Ma^2}{12} & \frac{Ma^2}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2Ma^2}{9} \end{bmatrix}$$

$$I_O(S)/R_0 = \begin{bmatrix} \frac{16Ma^2}{9} & -\frac{4Ma^2}{3} & 0 \\ -\frac{4Ma^2}{3} & \frac{16Ma^2}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{32Ma^2}{9} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{Ma^2}{9} & -\frac{Ma^2}{12} & 0 \\ -\frac{Ma^2}{12} & \frac{Ma^2}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2Ma^2}{9} \end{bmatrix}$$

$$I_O(S)/R_0 = \begin{bmatrix} \frac{5Ma^2}{3} & -\frac{5Ma^2}{4} & 0 \\ -\frac{5Ma^2}{4} & \frac{5Ma^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{10Ma^2}{3} \end{bmatrix}$$

$$I_O(S)/R_0 = \begin{bmatrix} A & -B & 0 \\ -B & A & 0 \\ 0 & 0 & 2A \end{bmatrix}; \quad A = \frac{5Ma^2}{3} \quad ; \quad B = \frac{5Ma^2}{4}$$

Les références

- **A. Kadi** : *Mécanique Rationnelle Cours & Exercices Résolus.*
- **M. Bourich** : *Cours de Mécanique des Systèmes de Solides Indéformables Deuxième Edition 2014.*
- **N. Hamzaoui** : *Mécanique Rationnelle (Module TEC005), Polycopie, USTHB, 1986.*
- **STARJINSKI** : *Mécanique rationnelle, Editions Mir (Moscou) ,479p.*
- **A. KASSOUL** : *Physique 4 : Mécanique Rationnelle Cours et Exercices, Polycopie, 2009.*
- **D.S. Kumar**: *Engineering Mechanics, Static and Dynamics, 1928.*
- **P.B. Ferdinand,V. Russell** : *Mechanics for Engineers Fifth Edition, Statics.*
- **O. Morvan, M. Sylvaine** : *Mécanique Général, Cinématique Et Dynamique Des Mécanismes.*
- **A. Paul** : *Mécanique Rationnelle Dynamique des Systèmes, Mécanique Analytique, 1953.*