LES TORSEURS

Exercice 1

On appelle division vectorielle l'opération qui fait correspondre à deux vecteurs $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ un vecteur $\vec{x}$ tel que :

$$\vec{u}\ \wedge \vec{x} = \vec{v}$$

1- Montrer que cette opération n'est possible que si $\vec{u} \perp \vec{v}$.
2- Montrer que $\vec{x}$ doit être dans un plan $\pi \perp \vec{v}$ et qu'il peut être mis sous la forme :
$$\vec{w} + \lambda\,\vec{u} = \vec{x}$$
Où $\lambda \in \mathbb{R}\ et\ \vec{w}$ un vecteur de $\pi \perp au\ plan(\vec{u}\,,\vec{v})$
3- En posant alors $\vec{w} = \alpha(\vec{u}\ \wedge \vec{v})$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$; montrer que $\alpha = \frac{-1}{\|\vec{u}\|^2}$

Solution

1- <u>Montrons que</u> $\vec{u} \perp \vec{v}$
Calculons le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot(\vec{u}\wedge\vec{x}) = \vec{x}\cdot(\vec{u}\wedge\vec{u}) = 0 \Rightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$

Donc : $\vec{u}\ \wedge \vec{x} = \vec{v}$ n'est possible que si $\vec{u}\perp\vec{v}$

2- <u>Montrons que</u> $\vec{x} = \vec{w} + \lambda\,\vec{u}$
De même, le calcul de $\vec{x}\cdot\vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{x}\perp\vec{v} \Rightarrow \vec{x}\epsilon\ plan\ \pi \perp \vec{v}$

Soient $\vec{x}\ et\ \vec{w}$ appartenant tous les deux au plan $\pi \perp \vec{v}$ tels que :

$$\vec{u}\ \wedge\vec{x} = \vec{v} \quad et \quad \vec{u}\ \wedge\vec{w} = \vec{v}\ \Rightarrow\ \vec{u}\wedge(\vec{x}-\vec{w}\,) = \vec{0} \Rightarrow \vec{u}\ parallèle\ à(\vec{x}-\vec{w})$$

$$\Rightarrow \quad \exists\,\lambda\,\epsilon\,\mathbb{R} :\ \lambda\,\vec{u} = (\vec{x}-\vec{w}\,) \Rightarrow\ \vec{w}+\lambda\,\vec{u} = \vec{x}$$

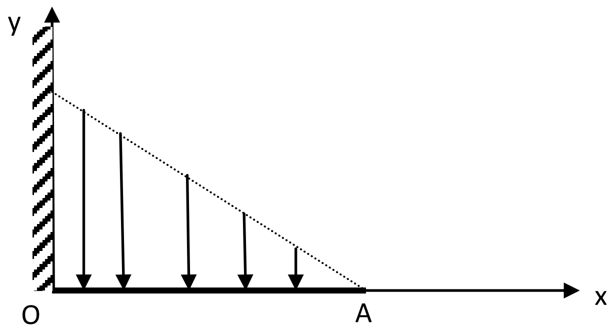
3- <u>Montrons que</u> $\alpha = \frac{-1}{\|\vec{u}\|^2}$

$\vec{x} = \vec{w} + \lambda\,\vec{u}$ et $\vec{w} = \alpha(\vec{u}\ \wedge\vec{v})$, et en remplaçant $\vec{w}\ et\ \vec{x}$ par leurs valeurs, on obtient :

$$\vec{x} = \alpha(\vec{u}\ \wedge\vec{v}) + \lambda\,\vec{u} \Rightarrow \vec{v} = \ \vec{u}\wedge[\alpha(\vec{u}\ \wedge\vec{v}) + \lambda\,\vec{u}] = \alpha\vec{u}\wedge(\vec{u}\ \wedge\vec{v})$$
$$\Rightarrow \alpha[(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{u} - \|u\|^2\vec{v}] = \vec{v}\ \ or\ \ \vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Rightarrow\ -\alpha\|u\|^2\vec{v} = \vec{v} \Rightarrow \alpha = \frac{-1}{\|u\|^2}$$

Exercice 2

Soit $R\big(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\big)$ un repère orthonormé direct. Sur une poutre OA de longueur l, encastrée dans un mur à son extrémité O, s'exerce une action mécanique répartie, définie en tout point M(x) de OA par sa densité linéique $\vec{F}(M) = -\frac{P}{l}(l-x)\vec{j}$ où P représente la pression de contact au point O.



1- Déterminer la résultante et le moment au point O du champ de vecteurs $\vec{F}(M)$ défini en tout point M de OA.
2- En déduire l'expression du moment au point B(x=λ) de l'ensemble infini de glisseurs.
3- Pour quelle valeur de λ le moment au point B est-il nul ?

Solution

1- * Résultante

$\vec{F}(M)$ est la densité linéique de l'action mécanique, c'est la force mécanique (qui s'exerce sur la poutre) par unité de longueur.

$$\Rightarrow \vec{F}(M) = \frac{\overrightarrow{df}}{dx} = -\frac{P}{l}(l-x)\vec{j} \qquad \Rightarrow \qquad \overrightarrow{df} = \vec{F}(M)dx$$

Donc la résultante de toutes les forces qui s'exercent sur OA est :

$$\vec{R} = \int \overrightarrow{df} = \int_0^l -\frac{P}{l}(l-x)\,dx\,\vec{j} = -\frac{Pl}{2}\,\vec{j}$$

On remarque que le module de la résultante est égal à la surface du triangle des pressions.$\|\vec{R}\| = f(x=0)\frac{OA}{2} = |-P|\frac{l}{2}$

*Moment

Le moment en O du champ de vecteurs $\vec{F}(M)$ qui s'exerce sur la poutre est :

$$\vec{H}(O) = \int \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{df} = \int_0^l x\vec{\imath} \wedge \left(-\frac{P}{l}(l-x)\,dx\,\vec{j}\right) = -\frac{Pl^2}{6}\vec{k}$$

2- Moment en B

$$\vec{H}(B) = \vec{H}(O) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OB} = -\frac{Pl^2}{6}\vec{k} - \frac{Pl}{2}\,\vec{j} \wedge \lambda\vec{\imath} = -\frac{Pl}{2}\left(\frac{l}{3} - \lambda\right)\vec{k}$$

3- Moment en B nul

Le moment en B est nul si $\lambda = \frac{l}{3}$

On sait que le support du glisseur est l'ensemble des points où le moment est nul, et qu'il est parallèle à la résultante, donc le support de ce glisseur est parallèle à l'axe OY, de sens contraire à celui-ci, et passe par le point B(x= λ).

Exercice 3

Soit le champ des moments $\vec{H}$ qui a pour valeur :

$$\overrightarrow{H_A} = (a, 2, -1)\ ;\ \overrightarrow{H_B} = (1, b, 0)\ et\ \overrightarrow{H_C} = (1, 1, c)$$

où A, B et C sont les points : A(1,0,0), B(0,1,0) et C(0,0,1)

1- Calculer a, b, c. Que représente le vecteur (a, b, c) ?
2- Déterminer les éléments de réduction en O du torseur dont $\vec{H}$ est le moment.
3- Déterminer le moment résultant en un point quelconque.
4- Déterminer l'axe central.

Solution

1- Calcul de a, b et c

Le champ des moments étant équiprojectif alors :

$$\begin{cases} \overrightarrow{H_C} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{H_B} \cdot \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{H_A} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{H_C} \cdot AC \\ \overrightarrow{H_B} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{H_A} \cdot \overrightarrow{AB} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b + c - 1 = 0 \\ a + c = 0 \\ a + b - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -1 \end{cases}$$

De Même soient α, β, γ les composantes du moment au point O(0, 0, 0). $\overrightarrow{H_O}$ vérifie :

$$\begin{cases} \overrightarrow{H_O} \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{H_A} \cdot \overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{H_O} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{H_B} \cdot \overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{H_O} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{H_C} \cdot \overrightarrow{OC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = a \\ \beta = b \\ \gamma = c \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{H_O} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k}$$

Donc le vecteur (a, b, c) est la valeur du moment au point O(0, 0, 0).

2- Eléments de réduction du torseur

Soit $\vec{R}$ de composantes (X, Y, Z) la résultante du torseur .

$$\overrightarrow{H_O} = \overrightarrow{H_A} + \overrightarrow{OA} \wedge \vec{R} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \Rightarrow Z = 0\ \ et\ \ Y = 0$$

$$\overrightarrow{H_O} = \overrightarrow{H_B} + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{R} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \Rightarrow X = 1 \quad \Rightarrow \quad \vec{R} = \vec{\imath}$$

$$[T] = \begin{cases} \vec{R} = \vec{\imath} \\ \overrightarrow{H_O} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k} \end{cases}$$

3- Moment en un point M

Soit M un point quelconque de coordonnées (x, y, z) et $\overrightarrow{H_M}$ le moment en ce point de composantes (l, m, n).

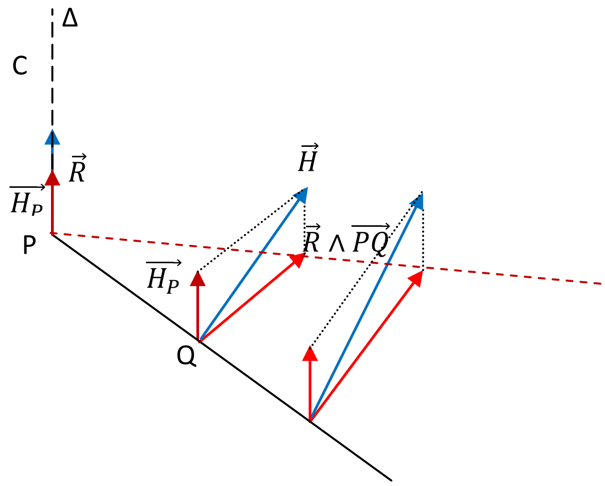
$$\overrightarrow{H_M} = \overrightarrow{H_O} + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OM} \Rightarrow \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} l = 1 \\ m = 2 - z \\ n = -1 + y \end{cases}$$

Donc le moment au point M est : $\overrightarrow{H_M} = \vec{\imath} + (2 - z)\vec{\jmath} + (y - 1)\vec{k}$

4- Axe central

Rappel

- L'axe central du torseur [T] est l'ensemble des points où ce torseur a un moment colinéaire à sa résultante (seul le moment central est parallèle à la résultante).



- Le moment d'un torseur est constant le long d'une parallèle à l'axe central

Soit C un point de Δ, le moment en ce point est donné par :

$$\overrightarrow{H_C} = \overrightarrow{H_P} + \vec{R} \wedge \overrightarrow{PC} \quad or\ \vec{R}\ parallèle\ à\ \overrightarrow{PC} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{H_C} = \overrightarrow{H_O}$$

- Les lignes de champ du moment d'un torseur sont des hélices circulaires ayant pour axe l'axe central ($\mathcal{L}$ est ligne de champ si la tangente en chaque point de $\mathcal{L}$ admet comme vecteur directeur le moment du torseur en ce point).
- L'équation vectorielle de l'axe central.

  P est un point de l'axe central $\Rightarrow \overrightarrow{H_P} = \alpha\vec{R}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow \overrightarrow{H_P} = \overrightarrow{H_0} + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OP} = \alpha\vec{R}$

  Multiplions vectoriellement cette équation par $\vec{R}$, ce qui donne :

$$\vec{0} = \vec{R} \wedge \overrightarrow{H_0} + \vec{R} \wedge [\vec{R} \wedge \overrightarrow{OP}] = \vec{R} \wedge \overrightarrow{H_0} + \vec{R} \cdot (\vec{R} \cdot \overrightarrow{OP}) - \|\vec{R}\|^2 \overrightarrow{OP} \quad \Rightarrow$$

$\overrightarrow{OP} = \frac{\vec{R}\wedge\overrightarrow{H_0}}{\|\vec{R}\|^2} + \frac{(\vec{R}\cdot\overrightarrow{OP})}{\|\vec{R}\|^2}\vec{R}$ C'est l'équation vectorielle de l'axe central.

- Le pas d'un torseur.

  P est un point de l'axe central $\Rightarrow \overrightarrow{H_P} = \alpha\vec{R}$ où $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \overrightarrow{H_P} = \overrightarrow{H_0} + \vec{R}\wedge\overrightarrow{OP} = \alpha\vec{R}$

  $$\overrightarrow{H_0} - \alpha\vec{R} = \overrightarrow{OP}\wedge\vec{R}$$

  $\overrightarrow{OP}$est le résultat de la division vectorielle de $\left[\overrightarrow{H_0} - \alpha\vec{R}\right]$ par $\vec{R}$, ceci n'est possible que si $\left[\overrightarrow{H_0} - \alpha\vec{R}\right]$ est perpendiculaire à $\vec{R} \Rightarrow \left[\overrightarrow{H_0} - \alpha\vec{R}\right]\cdot\vec{R} = o \Rightarrow \alpha = \frac{\overrightarrow{H_0}\cdot\vec{R}}{\|\vec{R}\|^2} = \frac{I_s}{\|\vec{R}\|^2}$

  I_s est l'invariant scalaire du torseur et α son pas.

Soit I le point d'intersection de l'axe central avec le plan perpendiculaire à $\vec{R}$ (c. à. d le plan YOZ)

$$\Rightarrow \overrightarrow{OI} \perp \vec{R} \quad \Rightarrow \vec{R}\cdot\overrightarrow{OP} = 0 \Rightarrow \quad \overrightarrow{OI} = \frac{\vec{R}\wedge\overrightarrow{H_0}}{\|\vec{R}\|^2} = \vec{\imath}\wedge\left(\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k}\right) = \vec{\jmath} + 2\vec{k}$$

L'axe central est alors, l'axe parallèle à ox et passant par le point I(0, 1, 2). Le pas du torseur est donné par :$\alpha = \frac{\vec{R}\cdot\overrightarrow{H_0}}{\|\vec{R}\|^2} = 0$ donc le moment central est nul le torseur est alors un glisseur.

Exercice 4

1- On se donne deux glisseurs $(A, \vec{U})$ et $(B, \vec{V})$ tels que A(1, 1, α), B(0, 2, 0), $\vec{U}(0, 0, \alpha)$et $\vec{V}(\beta, 3, 0)$ où α et β sont des réels.

Soit le torseur $[T] = (A, \vec{U}) + (B, \vec{V})$

a- Donner les éléments de réduction de $[T]$ au point O(0, 0, 0).

b- Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que $[T]$ soit un glisseur ? Déterminer alors son support.

c- Déterminer l'axe central de $[T]$.

2- A tout point P(x, y, z) de l'espace, on associe la famille de champs de vecteurs $\overrightarrow{H_t}(P)$ définis par : $\overrightarrow{H_t}(P) = (3y - tz + 1)\vec{\imath} + (-3x + 2tz)\vec{\jmath} + \left(tx - t^2y - \frac{4}{3}\right)\vec{k}$ où t réel

a- Montrer que les seuls champs équiprojectifs sont obtenus pour t=0 et t=2.

b- Déterminer les torseurs $[\tau_0]$ et $[\tau_2]$ associés aux champs $\overrightarrow{H_0}(P)$ et $\overrightarrow{H_2}(P)$ par leurs éléments de réduction au point O(0, 0, 0).

c- Déterminer le torseur $[\tau] = [\tau_0] - [\tau_2]$.

d- Montrer que $[\tau_2]$ est un glisseur. En déduire que la somme de deux glisseurs n'est pas en général un glisseur.

Solution

1-Torseur $[T] = (A, \vec{U}) + (B, \vec{V})$

a- Les éléments de réduction de $[T]$ sont :

La résultante $\vec{R} = \vec{U} + \vec{V} = \beta\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + \alpha\vec{k}$

Le moment au point O $\vec{H}(o) = \overrightarrow{OA}\wedge\vec{U} + \overrightarrow{OB}\wedge\vec{V} = \alpha\vec{\imath} - \alpha\vec{\jmath} - 2\beta\vec{k}$

b- $[T]$ est un glisseur si et seulement si $\vec{R}\cdot\vec{H}(O) = 0$ et $\vec{R} \neq \vec{0}$

On a $\vec{R} \neq \vec{0}$ et $\vec{R}\cdot\vec{H}(O) = -\alpha(3 + \beta) = 0 \Leftrightarrow (\alpha = 0 \text{ ou } \beta = -3)$

- La condition nécessaire et suffisante pour que $[T]$ soit un glisseur est : $\alpha = 0$ ou $\beta = -3$
- Le support d'un glisseur est son axe central, c'est l'ensemble des points où le moment est nul. (D) est le support du glisseur si $\forall P(x, y, z) \in (D)$, on a $\overrightarrow{H_P} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \quad \vec{H}(O) = \overrightarrow{H_P} - \vec{R} \wedge \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{R}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ -2\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \beta \\ 3 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y\alpha - 3z \\ z\beta - \alpha x \\ 3x - y\beta \end{pmatrix} \text{où} (\ \alpha = 0 \ ou \ \beta = -3\ )$$

- 1^{er} cas : $\alpha = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2\beta \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} -3z \\ z\beta \\ 3x - y\beta \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ 3x - y\beta = -2\beta \end{cases}$$

Pour chaque valeur de β, on a un glisseur dont le support (parallèle à $\vec{R}$)est l'ensemble des points P(x, y, z) tel que : z=0 et $3x - y\beta = -2\beta \quad \forall\, \beta$

- $2^{ème}$ cas : $\beta = -3$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ 6 \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} y\alpha - 3z \\ -3\ z - \alpha x \\ 3x + 3y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = y\alpha - 3z \\ \alpha = 3z + \alpha x \\ 2 = x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6z = \alpha(y - x) \\ 2 = x + y \end{cases}$$

Le support de $[T]$ est l'ensemble des droites ayant pour vecteur $\vec{R}$ et qui passent par le point P(x, y, z) tel que : 6z= $\alpha(y - x)$ et $2 = x + y \ \forall\, \alpha$

c- Axe central du torseur $[T]$

L'axe central (Δ) du torseur $[T]$ est l'ensemble des points P(x, y, z) tels que le moment en P est parallèle à la résultante $\vec{R}$.

$$\overrightarrow{H_P} = \overrightarrow{H_O} + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OP} = \lambda \vec{R} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ -2\beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta \\ 3 \\ \alpha \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge = \begin{pmatrix} -y\alpha + 3z + \alpha \\ -z\beta + \alpha x - \alpha \\ -3x + y\beta - 2\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\beta \\ 3\lambda \\ \alpha\lambda \end{pmatrix}$$

(Δ)est défini par les équations :

$$\frac{3z - \alpha y + \alpha}{\beta} = \frac{\alpha x - \beta z - \alpha}{3} = \frac{\beta y - 3x - 2\beta}{\alpha}$$

2- <u>Le champ des vecteurs $H_t(P)$.</u>

a- Champ équiprojectif.

$$\overrightarrow{H_t}(P) = (3y - tz + 1)\overrightarrow{e_x} + (-3x + 2tz)\overrightarrow{e_y} + \left(tx - t^2 y - \frac{4}{3}\right)\overrightarrow{e_z}$$

Ce vecteur peut être écrit sous la forme d'une somme de deux vecteurs.

$$\overrightarrow{H_t}(P) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3y - tz \\ -3x + 2tz \\ tx - t^2 y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & -t \\ -3 & 0 & 2t \\ t & -t^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Un champ antisymétrique est équiprojectif et réciproquement.

Un champ est antisymétrique si la matrice associée est antisymétrique.

La matrice associée à $\overrightarrow{H_t}(P)$ est $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -t \\ -3 & 0 & 2t \\ t & -t^2 & 0 \end{pmatrix}$, elle est antisymétrique si et seulement si $2t = t^2 \Leftrightarrow (t = 0 \; ou \; t = 2)$

b- Torseurs associés à $\overrightarrow{H_0}(P)$ et $\overrightarrow{H_2}(P)$.

- Torseur $[\tau_0]$associé à $\overrightarrow{H_0}(P)$.(t=0)

$$\overrightarrow{H_0}(P) = \begin{pmatrix} 1+3y \\ -3x \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix} = \overrightarrow{H_0}(O) + \overrightarrow{R_0} \wedge \overrightarrow{OP}$$

où $\overrightarrow{\mathrm{H}_0}(\mathrm{O})$ est le moment en O et $\overrightarrow{\mathrm{R}_0}$ la résultante du torseur $[\tau_0]$,.on pose $\overrightarrow{R_0} = \alpha\vec{\imath} + \beta\vec{\jmath} + \gamma\vec{k}$

$$\begin{pmatrix} 1+3y \\ -3x \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\beta z-\gamma y \\ \gamma x-\alpha z \\ -\frac{4}{3}+\alpha y-\beta x \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = -3 \end{cases}$$

Les éléments de réduction du torseur $[\tau_0]$ au point P sont : $\overrightarrow{R_0} = -3\vec{k} \quad et \; \overrightarrow{H_0}(0) = \vec{\imath} - \frac{4}{3}\vec{k}$

Au point O : $\qquad [\tau_0] = \begin{cases} \overrightarrow{R_0} = -3\vec{k} \\ \overrightarrow{H_0}(O) = \vec{\imath} - \frac{4}{3}\vec{k} \end{cases}$

- Torseur $[\tau_2]$associé à $\overrightarrow{H_2}(P)$.

$$\overrightarrow{H_2}(P) = \begin{pmatrix} 1+3y-2z \\ -3x+4z \\ 2x-4y-\frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\beta z-\gamma y \\ \gamma x-\alpha z \\ -\frac{4}{3}+\alpha y-\beta x \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -4 \\ \beta = -2 \\ \gamma = -3 \end{cases}$$

Les éléments de réduction du torseur $[\tau_2]$ sont : $\overrightarrow{R_2} = -4\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - 3\vec{k} \quad et \; \overrightarrow{H_2}(0) = \vec{\imath} - \frac{4}{3}\vec{k}$

Au point O : $\qquad [\tau_2] = \begin{cases} \overrightarrow{R_2} = -4\vec{k} - 2\vec{\jmath} - 3\vec{k} \\ \overrightarrow{H_2}(O) = \vec{\imath} - \frac{4}{3}\vec{k} \end{cases}$

c- Torseur $[\tau] = [\tau_0] - [\tau_2]$au point O

$$[\tau]_0 = \begin{cases} \vec{R} = \overrightarrow{R_0} - \overrightarrow{R_2} = 4\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} \\ \vec{H}(0) = \overrightarrow{H_0}(0) - \overrightarrow{H_2}(0) = \vec{0} \end{cases}$$

d- *Montrons que* $[\tau_2]$ est un glisseur

On appelle glisseur tout torseur d'invariant scalaire nul avec une résultante non nulle, ou torseur pour lequel il existe un point où le moment est nul.

Calculons l'invariant scalaire de $[\tau_2]$.

$$I_s = \overrightarrow{R_2} \cdot \overrightarrow{H_2}(0) = 0 \;\text{ et } \vec{R} \neq \vec{0} \quad [\tau_2] \text{ est donc un glisseur.}$$

$[\tau]$ est un glisseur car son moment est nul au point O.

$$[\tau_0] = [\tau] + [\tau_2]$$

$[\tau_0]$ n'est pas un glisseur car son invariant scalaire n'est pas nul $I_s = \overrightarrow{R_0}\,\overrightarrow{H_0}(0) = 4$

Donc la somme de deux glisseurs n'est pas en général un glisseur.

Exercice 5.

Une plaque rigide S constituée d'un demi-disque de rayon a, de centre O, se trouve située dans le demi-plan (yOz) des z>0 d'un repère R(O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$). Elle baigne dans un champ de vecteurs continu défini en un point P(r,φ) de la plaque par le vecteur $d\vec{f}(P)$ associé à l'élément de surface dS(P) entourant le point P tel que :

$d\vec{f}(P) = kr\overrightarrow{e_u}\,dS(P)$ où r et φ sont les coordonnées polaires du point P : OP=r et φ=($\vec{\jmath}$, $\overrightarrow{OP}$)

$\overrightarrow{e_u}$ est un vecteur unitaire fixe par rapport à R tel que θ=($\vec{\imath}$, $\overrightarrow{e_u}$) est contenu dans le plan (xoy).

K est une constante strictement positive. On désigne par $\overrightarrow{e_v}$ le vecteur unitaire directement normal à $\overrightarrow{e_u}$ dans le plan (xoy) et par R' le repère R'(O, $\overrightarrow{e_u}, \overrightarrow{e_v}, \vec{k}$).

1- Donner l'expression de la résultante du torseur [T] associé à la répartition vectorielle, projetée dans R'
2- Calculer dans R', l'expression du vecteur moment en O de [T].
3- Calculer l'invariant scalaire. Que peut-on en conclure à propos du moment en un point quelconque K de l'axe central Δ ?
4- Donner l'équation vectorielle de l'axe central du torseur sous la forme :

$$\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OQ} + \lambda\,\vec{R} \qquad \lambda\epsilon\mathbb{R}$$

Q étant le point d'intersection de l'axe central avec le plan (yOz).
   a- Par la méthode générale de la division vectorielle.
   b- En utilisant le résultat de la troisième question.

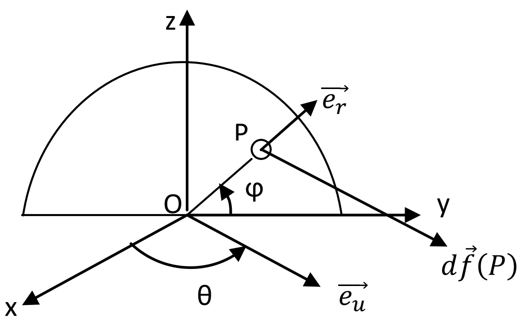
Solution

1- Résultante du torseur

$\vec{R} = \int d\vec{f}(P)\,dS$ Or dS=r dr dφ

En remplaçant chaque terme par sa valeur, on trouve :

$$\vec{R} = k\overrightarrow{e_u}\int_0^a r^2\,dr\int_0^\pi d\varphi = k\pi\frac{a^3}{3}\,\overrightarrow{e_u}$$



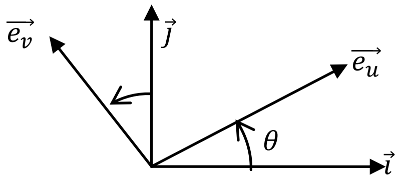
2- Moment en O du torseur

$d\vec{H}(O) = \overrightarrow{OP}\wedge d\vec{f}(P)$ $avec\ \overrightarrow{OP} = r\ sin\varphi\ \vec{k} + r\ cos\varphi\ \vec{\jmath} = r\ sin\varphi\ \vec{k} + r\ cos\varphi(sin\theta\ \overrightarrow{e_u} + cos\theta\ \overrightarrow{e_v})$

$$d\vec{H}(O) = \begin{pmatrix} r\ cos\varphi\ sin\theta \\ r\ cos\varphi\ cos\theta \\ r\ sin\varphi \end{pmatrix}_{R'} \wedge \begin{pmatrix} kr^2\ dr\ d\varphi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R'} = kr^3 dr\ d\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ sin\varphi \\ -cos\varphi\ cos\theta \end{pmatrix}_{R'}$$

$$\vec{H}(O) = \left[k\int_0^a r^3\,dr\int_0^\pi sin\varphi\,d\varphi\right]\overrightarrow{e_v} + \left[k\int_0^a r^3 dr\int_0^\pi -cos\varphi\,d\varphi\right]cos\theta\,\vec{k} = \frac{k}{2}a^4\,\overrightarrow{e_v}$$

$$\Rightarrow [T] = \begin{cases} \vec{R} = k\pi \frac{a^3}{3}\,\overrightarrow{e_u} \\ \vec{H}(O) = \frac{k}{2}a^4\,\overrightarrow{e_v} \end{cases}$$



3- Invariant scalaire

$$I_s = \vec{R}\cdot\vec{H}(O) = 0 \quad et \quad \vec{R} = k\pi\frac{a^3}{3}\,\overrightarrow{e_u}$$

L'invariant scalaire est nul avec une résultante non nulle, donc le torseur est un glisseur.

Le moment central est donc nul.

4- Equation vectorielle de l'axe central du glisseur.

a- Détermination de l'axe central par division vectorielle

Considérons le torseur [T] en un point quelconque A, on peut décomposer son moment en deux composantes parallèle et perpendiculaire à $\vec{R}$.

$$\vec{H}(A) = \overrightarrow{H_\parallel}(A) + \overrightarrow{H_\perp}(A) \qquad \text{tel que :} \quad \overrightarrow{H_\parallel}(A)\wedge\vec{R} = \vec{0} \qquad et \quad \overrightarrow{H_\perp}(A)\cdot\vec{R} = 0$$

K un point de l'axe central (Δ), d'après la définition de l'invariant scalaire, on a :

$$I_s = \vec{R}\cdot\vec{H}(k) = \vec{R}\cdot\vec{H}(A) = \vec{R}\cdot\overrightarrow{H_\parallel}(A) \qquad \Rightarrow \qquad \vec{H}(k) = \overrightarrow{H_\parallel}(A)$$

$$\text{Or } \vec{H}(A) = \vec{H}(k) + \overrightarrow{Ak}\wedge\vec{R} \qquad d'où \quad \overrightarrow{H_\perp}(A) = \overrightarrow{Ak}\wedge\vec{R}$$

Par division vectorielle(voir exercice 1), on obtient :

$$\overrightarrow{Ak} = \frac{\vec{R}\wedge\ \overrightarrow{H_\perp}(A)}{\|\vec{R}\|^2} + \lambda\vec{R} = \frac{\vec{R}\wedge\ \vec{H}(A)}{\|\vec{R}\|^2} + \lambda\vec{R}$$

Si on prend A confondu avec l'origine de notre repère, on obtient :

$$\overrightarrow{Ok} = \frac{\vec{R}\wedge\ \vec{H}(A)}{\|\vec{R}\|^2} + \lambda\vec{R} = \frac{3a}{2\pi}\,\vec{k} + \lambda\vec{R} = \overrightarrow{OQ} + \lambda\vec{R} \qquad avec\ \ \overrightarrow{OQ} = \frac{3a}{2\pi}\,\vec{k}$$

L'axe central (Δ) est le lieu des points k, c'est une droite parallèle à $\vec{R}$ et passant par le point Q qui est le point d'intersection de l'axe (Δ)avec le plan yOz.

b- Détermination de l'axe central en utilisant le résultat de la 3ième question

Soit Q un point de l'axe central (Δ), d'après le résultat de la question 3, on a :

$$\vec{H}(Q) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{H}(O) = \overrightarrow{OQ}\wedge\vec{R} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\alpha\overrightarrow{e_u} + \beta\overrightarrow{e_v} + \gamma\vec{k}\right]\wedge\frac{k\pi}{3}a^3\,\overrightarrow{e_u} = \frac{k}{2}a^4\,\overrightarrow{e_v}$$

$$\gamma\frac{k\pi}{3}a^3\overrightarrow{e_v} - \beta\frac{k\pi}{3}a^3\vec{k} = \frac{k}{2}a^4\,\overrightarrow{e_v} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \beta = 0 \\ \gamma = \dfrac{3a}{2\pi} \end{cases}$$

L'axe central est parallèle à $\vec{R}$ et passe par le point Q tel que $\overrightarrow{OQ} = \frac{3a}{2\pi}\vec{k}$.

Exercice 6

Soit le repère orthonormé direct (O, x, y, z) avec Ox horizontal et Oy vertical ascendant. On considère une barre rigide rectiligne homogène (S), de masse m, d'extrémités O et A, telle que $\overrightarrow{OA} = a\vec{z}$. Elle est reliée à un bâti fixe en O par une liaison rotule parfaite caractérisée par le torseur :

$$[\tau_O] = \begin{bmatrix} \overrightarrow{R_0} = X_0\,\vec{x} + Y_0\,\vec{y} + Z_0\,\vec{z} \\ \overrightarrow{H_0}(O) = \vec{0} \end{bmatrix}$$

Et tenue en position horizontale par deux câbles inextensibles de masses négligeables fixés en A à la barre et respectivement en B et C au bâti. Les torseurs associés à l'action des câbles sont respectivement :

$$[\tau_1] = \begin{bmatrix} \overrightarrow{R_1} = T_1\,\overrightarrow{u_1} \\ \overrightarrow{H_1}(A) = \vec{0} \end{bmatrix} \qquad [\tau_2] = \begin{bmatrix} \overrightarrow{R_2} = T_2\,\overrightarrow{u_2} \\ \overrightarrow{H_2}(A) = \vec{0} \end{bmatrix}$$

Où $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont respectivement les vecteurs unitaires portés par $\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{AB}$. La barre OA est soumise au champ de pesanteur $-g\vec{y}$ représenté par le torseur :

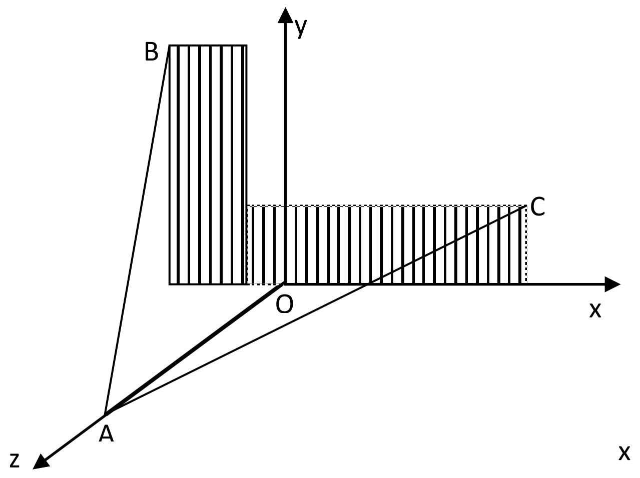
$$[\tau] = \begin{bmatrix} \vec{R} = \int_0^a -g\lambda\, dz\, \vec{y} \\ \vec{H}(O) = \int_0^a (z\,\vec{z} \wedge -g\lambda\vec{y})dz \end{bmatrix} \quad \text{où } \lambda \text{ est la densité linëique de masse}$$

On donne les coordonnées des trois points en mètres : $\overrightarrow{OA} = 9\vec{z}$; $\overrightarrow{OB} = -2\vec{x} + 6\vec{y}$; $\overrightarrow{OC} = 6\vec{x} + 2\vec{y}$

Les inconnues du problème sont : X_0 , Y_0 , Z_0, T_1 et T_2.

1- Calculer les éléments de réduction du torseur τ en fonction de m, g et a. Calculer l'invariant scalaire du torseur, en déduire que τ est un torseur univectoriel. Préciser le point G intersection de l'axe (Δ)du torseur avec OA tel que $\vec{H}(G) = \vec{0}$, on posera par la suite P=mg.
2- Ecrire les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ dans la base$(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, en déduire les expressions de $\overrightarrow{R_1}$et $\overrightarrow{R_2}$ dans la même base.
3- En utilisant la condition d'équilibre de (S), écrire les expressions de T_1 , T_2. X_0 , Y_0 *et* Z_0en fonction de P et a, en déduire alors les résultantes : $\overrightarrow{R_0}$, $\overrightarrow{R_1}$ et $\overrightarrow{R_2}$.

Solution



1- Eléments de réduction de$[\tau]$.

La résultante est **:**

$$\vec{R} = \int_0^a -g\lambda dz\,\vec{y} = -g\lambda\, a\,\vec{y} = -mg\vec{y}$$

Le moment au point O est :

$$\vec{H}(O) = \int_0^a g\lambda z\, dz\,\vec{x} = \frac{1}{2}mga\,\vec{x}$$

L'Invariant scalaire du torseur est :

$$I_s = \vec{R}\cdot\vec{H}(O) = 0$$

$[\tau]$ est un glisseur. G point d'intersection de l'axe

(Δ)du torseur avec OA tel que $\vec{H}(G) = \vec{0} = \vec{H}(O) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OG}$

$$\vec{H}(G) = \frac{1}{2} mga\, \vec{x} - mg\vec{y} \wedge (X_G\, \vec{x} + Y_G\, \vec{y} + Z_G\, \vec{z}) = mg\left(\frac{a}{2} - Z_G\right)\vec{x} + mgX_G\, \vec{z} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} X_G = 0 \\ Z_G = \dfrac{a}{2} \end{cases}$$

$Y_G = 0$ car G intersection de OA avec l'axe (Δ).$\overrightarrow{OG} = \frac{a}{2}\, \vec{z}$

(Δ) axe central du glisseur $\Rightarrow (\Delta) = \left\{ p \in \mathcal{A} \;:\; \vec{H}(p) = \vec{0} \right\}$($\mathcal{A}$ espace affine)

$$\vec{H}(p) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} mg\left(\dfrac{a}{2} - z\right) \\ 0 \\ mgx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y \text{ quelconque} \\ z = \dfrac{a}{2} \end{cases}$$

(Δ) est l'axe parallèle à Oy et passant par le point G centre d OA.

$\vec{R}$ est le poids de la barre OA son point d'application est G, $[\tau]$ est un torseur univectoriel.

2- <u>Expressions des vecteurs $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{R_1}$et $\overrightarrow{R_2}$ dans la base. $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.</u>

$$\overrightarrow{u_1} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}}{\|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{6\vec{x} + 2\vec{y} - 9\vec{z}}{11} \quad et \quad \overrightarrow{u_2} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{-2\vec{x} + 6\vec{y} - 9\vec{z}}{11}$$

$$\overrightarrow{R_1} = \frac{T_1}{11}(6\vec{x} + 2\vec{y} - 9\vec{z}) \qquad et \quad \overrightarrow{R_2} = \frac{T_2}{11}(-2\vec{x} + 6\vec{y} - 9\vec{z})$$

3- <u>Condition d'équilibre de (S)</u>

La condition d'équilibre de la barre est telle que la somme de tous les torseurs agissant sur la barre soit un torseur nul.

$$\begin{cases} \overrightarrow{R_0} + \overrightarrow{R_1} + \overrightarrow{R_2} + \vec{R} = \vec{0} & \text{équation 1} \\ \overrightarrow{H_0}(O) + \overrightarrow{H_1}(O) + \overrightarrow{H_2}(O) + \vec{H}(O) = \vec{0} & \text{équation 2} \end{cases}$$

L'équation 1 donne : $\begin{cases} X_0 + \frac{6}{11}T_1 - \frac{2}{11}T_2 = 0 & \text{équation 3} \\ Y_0 + \frac{2}{11}T_1 + \frac{6}{11}T_2 - mg = 0 & \text{équation4} \\ Z_0 - \frac{9}{11}T_1 - \frac{9}{11}T_2 = 0 & \text{équation 5} \end{cases}$

L'équation 2 donne : $\underbrace{\overrightarrow{H_1}(A)}_{=\vec{0}} + \overrightarrow{R_1} \wedge \overrightarrow{AO} + \underbrace{\overrightarrow{H_2}(A)}_{=\vec{0}} + \overrightarrow{R_2} \wedge \overrightarrow{AO} + \frac{1}{2} mga\, \vec{x} = \vec{0} \;\Leftrightarrow$

$$\overrightarrow{OA} \wedge \left(\overrightarrow{R_1} + \overrightarrow{R_2}\right) + \frac{1}{2} mga\, \vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} 6T_1 - 2T_2 = 0 & \Rightarrow & T_2 = 3T_1 \\ -\dfrac{180}{11}T_1 + mg\dfrac{a}{2} = 0 & \Rightarrow & T_1 = \dfrac{11}{360}\, mga \end{cases}$$

En remplaçant T_1 par sa valeur, on trouve : $T_2 = \frac{11}{120}\, mga$

L'équation 3 donne : $X_0 = -\frac{6}{11}T_1 + \frac{2}{11}T_2 = 0$

L'équation 4 donne : $Y_0 = mg - \frac{2}{11}T_1 - \frac{6}{11}T_2 = mg\left(1 - \frac{a}{18}\right)$

L'équation 5 donne : $Z_0 = \frac{9}{11}(T_1 + T_2) = \frac{mga}{10}$

$$\overrightarrow{R_0} = \frac{mg}{18}(18-a)\vec{y} + \frac{mga}{10}\vec{z} \quad ; \quad \overrightarrow{R_1} = mga\left(\frac{1}{60}\vec{x} + \frac{1}{180}\vec{y} - \frac{1}{40}\vec{z}\right)$$

$$\overrightarrow{R_2} = mga\left(-\frac{1}{60}\vec{x} + \frac{1}{20}\vec{y} - \frac{3}{40}\vec{z}\right)$$

Exercice 7.

Soit le torseur $[T_1]$ défini au point O, origine d'un repère orthonormé direct $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, par les trois vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{V_1} = -2\vec{x} + 3\vec{y} - 7\vec{z} \qquad défini\ au\ point\ A(1,0,0)$$

$$\overrightarrow{V_2} = 3\vec{x} - \vec{y} - \vec{z} \qquad défini\ au\ point\ B(0,1,0)$$

$$\overrightarrow{V_3} = -\vec{x} - 2\vec{y} + 8\vec{z} \qquad défini\ au\ point\ C(0,0,1)$$

Soit $[T_2]$ le torseur défini au point O par :

$$[T_2] = \begin{cases} \overrightarrow{R_2} = 2\vec{x} + \vec{y} + 3\vec{z} \\ \overrightarrow{M_2}(O) = -3\vec{x} + 2\vec{y} - 7\vec{z} \end{cases}$$

1- Déterminer les éléments de réduction de $[T_1]$ au point O.
2- Déterminer le pas et l'axe central du torseur $[T_2]$.
3- Calculer la somme des deux torseurs.
4- Calculer le comoment des deux torseurs.
5- Calculer l'invariant scalaire du torseur somme $[T] = [T_1] + [T_2]$

Solution

1- <u>Eléments de réduction de $[T_1]$ au point O</u>

$$[T_1] = \begin{cases} \overrightarrow{R_1} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_3} = \vec{0} \\ \overrightarrow{H_1}(O) = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{V_3} = \vec{x} + 6\vec{y} \end{cases}$$

La résultante est nulle, le torseur est alors un couple, de moment $\overrightarrow{H_1} = \vec{x} + 6\vec{y}$

Le moment du couple est invariant.

2- <u>Pas du torseur $[T_2]$</u>

L'axe central du torseur est l'ensemble des points P où le moment en ce point est parallèle à la résultante

$$\overrightarrow{H_2}(p) = \alpha\overrightarrow{R_2} = \overrightarrow{H_2}(O) + \overrightarrow{R_2} \wedge \overrightarrow{Op} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{Op} \wedge \overrightarrow{R_2} = \overrightarrow{H_2}(O) - \alpha\overrightarrow{R_2}$$

$\overrightarrow{Op}$ est alors le résultat de la division vectorielle de $(\overrightarrow{H_2}(O) - \alpha\overrightarrow{R_2})$ par $\overrightarrow{R_2}$. Cette division n'est possible que si

$$\overrightarrow{R_2}[\overrightarrow{H_2}(O) - \alpha\overrightarrow{R_2}] = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\overrightarrow{R_2} \cdot \overrightarrow{H_2}(O)}{\left\|\overrightarrow{R_2}\right\|^2}$$

α est appelé Pas du torseur. $\alpha = -\frac{25}{14}$

Axe central du torseur $[T_2]$

Soit p un point de l'axe central

$$\overrightarrow{R_2} \wedge \overrightarrow{H_2}(p) = \overrightarrow{R_2} \wedge \overrightarrow{H_2}(O) + \overrightarrow{R_2} \wedge [\overrightarrow{R_2} \wedge \overrightarrow{Op}] = \overrightarrow{R_2} \wedge \overrightarrow{H_2}(O) + (\overrightarrow{R_2} \cdot \overrightarrow{Op})\overrightarrow{R_2} - \left\|\vec{R}_2\right\|^2 \overrightarrow{Op} = \vec{0}$$

Car $\overrightarrow{R_2} \parallel \overrightarrow{H_2}(p) \ \Rightarrow \ \overrightarrow{Op} = \frac{\overrightarrow{R_2} \wedge \overrightarrow{H_2}(O)}{\left\|\vec{R}_2\right\|^2} + \lambda\overrightarrow{R_2} = \left(-\frac{13}{14} + 2\lambda\right)\vec{x} + \left(\frac{5}{14} + \lambda\right)\vec{y} + \left(\frac{1}{2} + 3\lambda\right)\vec{z}$

3- Somme des deux torseurs

$$[T] = [T_1] + [T_2] = \begin{cases} \vec{R} = \overrightarrow{R_1} + \overrightarrow{R_2} \\ \vec{H}(O) = \overrightarrow{H_1}(O) + \overrightarrow{H_2}(O) \end{cases} = \begin{cases} \vec{R} = 2\vec{x} + \vec{y} + 3\vec{z} \\ \vec{H}(O) = -2\vec{x} + 8\vec{y} - 7\vec{z} \end{cases}$$

4- Comoment des deux torseurs

$$[T_1] \otimes [T_2] = \overrightarrow{R_1} \cdot \overrightarrow{H_2}(O) + \overrightarrow{R_2} \cdot \overrightarrow{H_1}(O) = 8$$

5- Invariant scalaire de $[T]$

$$I_s = \vec{R} \cdot \vec{H} = -17$$

Exercice 8

On considère les trois vecteurs : $\overrightarrow{V_1} = \vec{y} + \vec{z}$, $\overrightarrow{V_2} = \vec{x} + \vec{z}$ et $\overrightarrow{V_3} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} - 2\vec{z}$, définis relativement à un repère orthonormé direct $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et liés respectivement aux points :

$A\left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right), B\left(0, 0, -\frac{1}{2}\right)$ et $C\left(-\frac{1}{2}, 0, -1\right)$ α, β sont des nombres réels.

1- Déterminer les éléments de réduction du torseur $[T]$ associé au système des trois vecteurs au point O.

2- Montrer que quel que soient α, β le torseur est un glisseur.

3- Trouver les coordonnées des points P où $\vec{H}(P) = \vec{0}$.

4- Pour quelles valeurs de α, β le torseur est-il nul ? Vérifier que pour ces valeurs les trois vecteurs sont coplanaires

Solution

1- Eléments de réduction du torseur $[T]$

$$[T] = \begin{cases} \vec{R} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_3} = (\alpha + 1)\vec{x} + (\beta + 1)\vec{y} \\ \vec{H}(O) = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{V_3} = (\beta + 1)\vec{x} - (\alpha + 1)\vec{y} - \frac{1}{2}(\beta + 1)\vec{z} \end{cases}$$

2- $[T]$ est un glisseur

Le torseur $[T]$ est un glisseur s'il vérifie l'un des critères suivants :

- L'invariant scalaire de $[T]$ est nul avec une résultante non nulle.
- S'il existe un point où le moment de $[T]$ est nul.

Calculons l'invariant scalaire de $[T]$.

$$I_s = \vec{R} \cdot \vec{H} = 0 \quad avec \quad \vec{R} \neq \vec{0} \qquad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Donc $[T]$ est un glisseur.

3- <u>Coordonnées des points P où $\vec{H}(P) = \vec{0}$</u>

$[T]$ est un glisseur, l'axe central est l'ensembles des points P où le moment en ces points est nul.

$$\vec{H}(P) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{H}(O) = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{R} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1+\beta \\ -(1+\alpha) \\ -\frac{1}{2}(1+\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1+\alpha \\ 1+\beta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(1+\beta)z \\ (1+\alpha)z \\ (1+\beta)x-(1+\alpha)y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = -1 \\ x - \dfrac{1+\alpha}{1+\beta}y = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

P est dans le plan horizontal de côte z=-1, et dont les coordonnées dans ce plan vérifient l'équation : $\quad x - \frac{1+\alpha}{1+\beta}y = -\frac{1}{2}$.

On remarque que la résultante est parallèle à ce plan.

4- <u>Valeurs de α, β pour lesquelles le torseur est nul</u>

Le torseur est nul si ses éléments de réduction sont nuls.

$$\begin{cases} \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{H}(O) = \vec{0} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta = -1$$

Pour ces valeurs, on a : $\vec{V_1} = \vec{y} + \vec{z}\,, \vec{V_2} = \vec{x} + \vec{z}\; et\; \vec{V_3} = -\vec{x} - \vec{y} - 2\vec{z}$

Ces vecteurs sont coplanaires si leur produit mixte est nul/

$$(\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}) \cdot \vec{V_3} = 0 = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

Exercice 9

Soit l'espace affine Euclidien de repère : $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Soient les points A(1, 0, 0), B(0, 1, 0).et le torseur $[T(\lambda)]$ donné par ses trois moments aux points O, A et B :

$$\begin{cases} \vec{H}(O) = -2\vec{\imath} + 2(1+\lambda)\vec{\jmath} \\ \vec{H}(A) = -2\vec{\imath} + (3+2\lambda)\vec{\jmath} - 3\vec{k} \\ \vec{H}(B) = -3\vec{\imath} + 2(1+\lambda)\vec{\jmath} + (2+\lambda)\vec{k} \end{cases}$$

1- Vérifier l'équiprojectivité de ces moments.
2- Déterminer la résultante $\vec{R} = X\vec{\imath} + Y\vec{\jmath} + Z\vec{k}$ du torseur.
3- Soit C le point de coordonnées (0, 0, 1), déterminer le moment au point C par la condition d'équiprojectivité.
4- Pour quelle valeur de λ, le torseur $[T(\lambda)]$ est-il un glisseur ? déterminer son axe central.
5- Pour quelle valeur de λ, l'axe central est-il parallèle au plan (O, y, z). Déterminer l'axe dans ce cas.

Solution

1- Equiprojectivité des moments

Un champ est dit équiprojectif si quels que soient les points A et B de l'espace affine on a :

$$[\vec{H}(B) - \vec{H}(A)] \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

$$[\vec{H}(A) - \vec{H}(O)] \cdot \overrightarrow{OA} = (\vec{\jmath} - 3\vec{k}) \cdot \vec{\imath} = 0$$

$$[\vec{H}(B) - \vec{H}(O)] \cdot \overrightarrow{OB} = [-\vec{\imath} + (2+\lambda)\vec{k}] \cdot \vec{\jmath} = 0$$

$$[\vec{H}(B) - \vec{H}(A)] \cdot \overrightarrow{AB} = [-\vec{\imath} - \vec{\jmath} + (5+\lambda)\vec{k}] \cdot (\vec{\jmath} - \vec{\imath}) = 0$$

Le champ est alors équiprojectif.

2- Résultante du torseur

$$\vec{H}(O) = \vec{H}(A) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AO} = \vec{H}(B) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{BO}$$

$$\vec{H}(O) = \vec{H}(A) + \overrightarrow{OA} \wedge \vec{R} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 2(1+\lambda) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3+2\lambda \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} Y = 3 \\ Z = 1 \end{cases}$$

$$\vec{H}(O) = \vec{H}(B) + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{R} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 2(1+\lambda) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2(1+\lambda) \\ (2+\lambda) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X = 2+\lambda \\ Z = 1 \end{cases}$$

$$\vec{R} = (2+\lambda)\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + \vec{k}$$

3- Moment au point C

Soit $\vec{H}(C) = \alpha\vec{\imath} + \beta\vec{\jmath} + \gamma\vec{k}$, le champ est équiprojectif on peut donc écrire :

$$[\vec{H}(C) - \vec{H}(O)] \cdot \overrightarrow{OC} = 0 \Leftrightarrow [(2+\alpha)\vec{\imath} - (2+2\lambda-\beta)\vec{\jmath} + \gamma\vec{k}]\vec{k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma = 0$$

$$[\vec{H}(C) - \vec{H}(A)] \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow [(2+\alpha)\vec{\imath} + (\beta-3-2\lambda)\vec{\jmath} + (\gamma+3)\vec{k}](\vec{k} - \vec{\imath}) = 0 \quad \Rightarrow \alpha = 1$$

$$[\vec{H}(C) - \vec{H}(B)] \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow [(3+\alpha)\vec{\imath} + (\beta-2-2\lambda)\vec{\jmath} + (\gamma-2-\lambda)\vec{k}](\vec{k} - \vec{\jmath}) = 0$$

$$\Rightarrow \beta = \lambda \qquad \Rightarrow \vec{H}(C) = \vec{\imath} + \lambda\vec{\jmath}$$

4- Valeur de λ pour laquelle le torseur est un glisseur

$[T(\lambda)]$ est un glisseur si son invariant scalaire est nul avec une résultante non nulle.

$$[T(\lambda)] = \begin{cases} \vec{R} = (2+\lambda)\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + \vec{k} \\ \vec{H}(O) = -2\vec{\imath} + 2(1+\lambda)\vec{\jmath} \end{cases}$$

$$I_s = \vec{R} \cdot \vec{H}(O) = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$$

$[T(\lambda)]$ est un glisseur si et seulement si : $\lambda = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \vec{R} = \frac{3}{2}\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + \vec{k}$

Axe central du glisseur

L'axe central du torseur $[T(\lambda)]$ est l'ensemble des points P tes que le moment central soit parallèle à la résultante.

$$\vec{H}(P) = \vec{H}(O) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OP} = \mu\,\vec{R} \Leftrightarrow \vec{R} \wedge \vec{H}(P) = \vec{R} \wedge \vec{H}(O) + \vec{R} \wedge \vec{R} \wedge \overrightarrow{OP} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{H}(O)}{\|\vec{R}\|^2} + \frac{\vec{R} \cdot \overrightarrow{OP}}{\|\vec{R}\|^2}\,\vec{R}$$

Soit I un point de L'axe central tel que : $\vec{R} \perp \overrightarrow{OI} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{OI} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{H}(O)}{\|\vec{R}\|^2}$

L'axe central est parallèle à $\vec{R}$ et passe par le point I tel que : $\quad \overrightarrow{OI} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{H}(O)}{\|\vec{R}\|^2}$

$$[T(\lambda)] = \begin{cases} \vec{R} = (2+\lambda)\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + \vec{k} \\ \vec{H}(O) = -2\vec{\imath} + 2(1+\lambda)\vec{\jmath} \end{cases}$$

$$\vec{R} \wedge \vec{H}(O) = \begin{pmatrix} 2+\lambda \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -2 \\ 2(1+\lambda) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2(1+\lambda) \\ -2 \\ 2(1+\lambda)(2+\lambda)+6 \end{pmatrix}$$

Et $\|\vec{R}\|^2 = (2+\lambda)^2 + 10 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{OI} = \frac{-2}{(2+\lambda)^2+10}\left[(1+\lambda)\vec{\imath} + \vec{\jmath} - [(1+\lambda)(2+\lambda)+3]\vec{k}\right]$

Pour le glisseur , $\lambda = -\frac{1}{2} \Rightarrow \overrightarrow{OI} = \frac{-2}{49}\left[2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - 15\vec{k}\right]$

5- <u>Axe central parallèle au plan (O, y, z)</u>

L'axe central est parallèle au plan (O, y, z) si la résultante du torseur est parallèle à ce plan.

$$\vec{R} \cdot \vec{\imath} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -2$$

L'axe central dans ce cas est la droite parallèle à $\vec{R}$ et passant par I tel que :

$$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{5}\left[\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 3\vec{k}\right]$$

Exercice 10

L'espace affine Euclidien réel orienté de dimension trois (E), étant muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère le champ de vecteurs $\vec{H}$ qui, pour α, β, γ réels fixés, associe à tout point $P \in (E)$, le vecteur $\vec{H}(P)$ de composantes :

$$\begin{cases} X = 1 + (\gamma - 2)y + (\alpha + \gamma)z \\ Y = -1 + (\alpha + \beta)x + (2\gamma - 1)z \\ Z = 1 + (\alpha - \beta)x + (3\alpha - \beta)y \end{cases} \qquad \text{où } (x, y, z) \text{sont les coordonnées de P}$$

1- Pour quelles valeurs de α, β, γ, $\vec{H}$ est-il un champ equiprojectif ?
2- Montrer que la résultante du torseur $[T]$ associé au champ equiprojectif $\vec{H}$ est :

$$\vec{R} = -\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$$

3- Déterminer l'équation analytique de l'axe central Δ de $[T]$. En quel point l'axe Δ coupe le plan (x, y) ?

Solution

1- $\vec{H}$ champ équiprojectif

Le champ$\vec{M}$ est équiprojectif si : $\forall\ P\ (E), on\ a: [\vec{H}(P)-\vec{H}(O)]\cdot\overrightarrow{OP}=0.$

Ou si la matrice associée est antisymétrique : $[\vec{H}(P)-\vec{H}(O)]=\bar{\bar{A}}\,\overrightarrow{OP}$

$$[\vec{H}(P)-\vec{H}(O)]=\begin{pmatrix}0 & a_{12} & a_{13}\\ -a_{12} & 0 & a_{23}\\ -a_{13} & -a_{23} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

Or $\vec{H}(O)=\vec{\imath}-\vec{\jmath}+\vec{k}$

$$[\vec{H}(P)-\vec{H}(O)]=\begin{pmatrix}(\gamma-2)y+(\alpha+\gamma)z\\ (\alpha+\beta)x+(2\gamma-1)z\\ (\alpha-\beta)x+(3\alpha-\beta)y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & (\gamma-2) & (\alpha+\gamma)\\ (\alpha+\beta) & 0 & (2\gamma-1)\\ (\alpha-\beta) & (3\alpha-\beta) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

Le champ $\vec{H}$ est équiprojectif si :

$$\begin{cases}(\gamma-2)=-(\alpha+\beta) & \Rightarrow\quad \alpha+\beta+\gamma=2\\ (\alpha+\gamma)=-(\alpha-\beta) & \Rightarrow\quad 2\alpha-\beta+\gamma=0\\ (2\gamma-1)=-(3\alpha-\beta) & \Rightarrow\quad 3\alpha-\beta+2\gamma=1\end{cases}\qquad\Rightarrow\qquad\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=1\\ \gamma=1\end{cases}$$

2- Résultante du torseur

La matrice associée au torseur est antisymétrique, donc il existe un vecteur $\vec{R}\ tel\ que$:

$$\bar{\bar{A}}\,\overrightarrow{OP}=\vec{R}\wedge\overrightarrow{OP}\qquad avec\ \ \overrightarrow{OP}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}$$

$$\bar{\bar{A}}\,\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}0 & a_{12} & a_{13}\\ -a_{12} & 0 & a_{23}\\ -a_{13} & -a_{23} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X\\ Y\\ Z\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a_{12}y+a_{13}z\\ -a_{12}x+a_{23}z\\ -a_{13}x-a_{23}y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Yz-Zy\\ Zx-Xz\\ Xy-Yx\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}X=-a_{23}=(3\alpha-\beta)\\ Y=a_{13}=(\alpha+\gamma)\\ Z=-a_{12}=(\alpha+\beta)\end{cases}$$

En remplaçant α,β,γ par leurs valeurs, la matrice associée et la résultante s'écrivent :

$$\bar{\bar{A}}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\vec{R}=-\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}$$

3- Equation de l'axe central

L'équation de l'axe central est donnée par :

$$\overrightarrow{OP}=\frac{\vec{R}\wedge\vec{H}(O)}{\|\vec{R}\|^2}+\lambda\,\vec{R}$$

En remplaçant chaque terme par sa valeur, on obtient :

$$\overrightarrow{OP}=\left(\frac{2}{3}-\lambda\right)\vec{\imath}+\left(\frac{2}{3}+\lambda\right)\vec{\jmath}+\lambda\vec{k}$$

D'où l'équation de l'axe central :$z=-x+\frac{2}{3}=y-\frac{2}{3}$

L'axe Δ coupe le plan (xoy) au point P_0 tel que : $x_0=y_0=\frac{2}{3}\qquad et\ z=0$

L'intersection de l'axe central avec le plan (xoy) est le point : $P_0(\frac{2}{3},\frac{2}{3},0)$.

Exercice 11

Dans un repère R$\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ on considère les trois glisseurs définis par les trois vecteurs liés suivant :

$$\begin{cases}\overrightarrow{V_1} = \vec{\imath} - \vec{k} & d'origine \quad A(1,0,0) \\ \overrightarrow{V_2} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 2\vec{k} & d'origine\ B(0,1,0) \\ \overrightarrow{V_3} = \lambda\vec{\imath} + \mu\vec{\jmath} + \nu\vec{k} & d'origine\ \ C(0,0,1)\end{cases}$$

Soit $[T]$ la somme des trois glisseurs.

1- Déterminer λ, μ, ν pour que $[T]$ soit un couple et trouver son moment.
2- Quelle relation doit lier λ, μ, ν pour que $[T]$ soit un glisseur ?
   Déterminer μ, ν en fonction de λ pour que le support du glisseur $[T]$ passe par D(1/3, 1, 4/3).
3- Dans le cas où $(\lambda, \mu, \nu) = (-2, 0, -1)$ trouver les équations de l'axe central de $[T]$. Que peut-on dire de la direction de cet axe ?

Solution

1- <u>Valeurs de λ, μ, ν pour que $[T]$ soit un couple</u>

Un couple est un torseur dont la résultante est nulle et le moment non nul.

$[T]$ est le torseur somme des trois vecteurs liés.

$$\vec{R} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_3} = (2+\lambda)\vec{\imath} + (2+\mu)\vec{\jmath} + (1+\nu)\vec{k} = \vec{0} \quad \Rightarrow$$

$$\lambda = \mu = -2 \quad et \quad \nu = -1$$

Le moment de ce couple est : $\vec{H}(P) = \vec{H}(O) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OP} \quad or \quad \vec{R} = \vec{0} \quad \Rightarrow$

$$\vec{H}(P) = \vec{H}(O) = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{V_3} = 4\vec{\imath} - \vec{\jmath} - \vec{k}$$

2- <u>Relation liant λ, μ, ν pour que $[T]$ soit un glisseur.</u>

$[T]$ est un glisseur si et seulement si son invariant scalaire est nul avec une résultante non nulle.

$$\vec{H}(O) = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{V_3} = (2-\mu)\vec{\imath} + (1+\lambda)\vec{\jmath} - \vec{k}$$

$$\vec{R} \cdot \vec{H}(O) = \left[(2+\lambda)\vec{\imath} + (2+\mu)\vec{\jmath} + (1+\nu)\vec{k}\right] \cdot \left[(2-\mu)\vec{\imath} + (1+\lambda)\vec{\jmath} - \vec{k}\right] = 5 + 4\lambda - \mu - \nu = 0$$

Pour que $[T]$ soit un glisseur, il faut que λ, μ, ν vérifient les équations suivantes :

$$(\lambda, \mu, \nu) \neq (-2, -2, -1) \quad et \quad 4\lambda - \mu - \nu + 5 = 0 \qquad équation\ 1$$

- <u>Le support de $[T]$ passe par D</u>

  Le support de $[T]$ passe par le point D, donc le moment du glisseur en ce point est nul.

$$\vec{H}(D) = \vec{H}(O) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OD} = \vec{0} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{H}(O) = \overrightarrow{OD} \wedge \vec{R}$$

$$\begin{pmatrix} 2-\mu \\ 1+\lambda \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2+\lambda \\ 2+\mu \\ 1+\nu \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -5+3\nu-4\mu \\ 7+4\lambda-\nu \\ -4+\mu-3\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 11 = 3\nu - \mu & équation\ 2 \\ 4 = \nu - \lambda & équation\ 3 \\ 1 = \mu - 3\lambda & équation\ 4 \end{cases}$$

Les équations 3 et 4 vérifient les équations 2 et 1

3(équation 3)-(équation 4)= (équation 2) (équation 3)+(équation 4)= (équation 1)

3- Axe central dans le cas où $(\lambda, \mu, \nu) = (-2, 0, -1)$

En remplaçant (λ, μ, ν) par leurs valeurs, on trouve :

$$\vec{R} = 2\vec{j} \qquad et \qquad \vec{H}(O) = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$$

Soit P un point de l'axe central :

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{H}(O)}{\|\vec{R}\|^2} + \alpha\vec{R} = \frac{1}{4}\left[2\vec{j} \wedge \left(2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}\right)\right] + 2\alpha\vec{j} = -\frac{1}{2}\vec{i} + 2\alpha\vec{j} - \vec{k}$$

L'axe central du glisseur est la droite parallèle à l'axe Oy et passant par le point (-1/2, 0, -1).

Exercice 12

Dans un repère orthonormé direct $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les vecteurs liés définis par :

$$\begin{cases} \vec{V_1} = 3\vec{i} + \vec{j} & d'origine \quad A(2,0,0) \\ \vec{V_2} = -2\vec{j} + \vec{k} & d'origine \; B(0,1,0) \\ \vec{V_3} = -5\vec{i} + 2\vec{k} & d'origine \;\; C(0,0,3) \end{cases}$$

1- Déterminer les éléments de réduction en O du torseur $[T_1]$ associé à ces vecteurs glissants.
2- Déterminer de deux façons différentes les éléments de réduction de $[T_1]$ au point E(2, 1, -2).
3- Vérifier la propriété d'équiprojectivité du champ des moments de $[T_1]$
4- Calculer l'invariant scalaire de $[T_1]$
5- Donner l'équation de son axe central et calculer le moment central.

Soit le torseur $[T_2]$ dont on donne les éléments de réduction en E :

$$[T_2] = \begin{cases} \vec{R_2} = \frac{1}{3}(2\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + \vec{k}) \\ \vec{H_2}(E) = a\,\vec{i} + b\,\vec{j} \end{cases}$$

6- Quelle relation doit exister entre a et b pour que ce torseur soit un glisseur ?
7- Calculer le comoment des deux torseurs $[T_1]\ et\ [T_2]$. Retrouver ce résultat à partir des éléments de réduction de $[T_1]\ et\ [T_2]$ en O

Solution

1- Eléments de réduction de $[T_1]$ en

$$\vec{R_1} = \vec{V_1} + \vec{V_2} + \vec{V_3} = -2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{H_1}(O) = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{V_1} + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{V_2} + \overrightarrow{OC} \wedge \vec{V_3} = \vec{i} - 15\,\vec{j} + 2\,\vec{k}$$

$$[T_1] = \begin{cases} \vec{R_1} = \left(-2\,\vec{i} - \,\vec{j} + 3\vec{k}\right) \\ \vec{H_1}(O) = \,\vec{i} - 15\,\vec{j} + 2\vec{k} \end{cases}$$

2- Eléments de réduction de $[T_1]$ en E.

- Loi de transport des moments

$$\overrightarrow{H_1}(E) = \overrightarrow{H_1}(O) + \overrightarrow{R_1} \wedge \overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} 1 \\ -15 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -13\vec{j} + 2\vec{k}$$

- <u>Somme des moments des trois vecteurs.</u>

$$\overrightarrow{H_1}(E) = \overrightarrow{EA} \wedge \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{EB} \wedge \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{EC} \wedge \overrightarrow{V_3}$$

$$\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OE} = -\vec{j} + 2\vec{k} \quad , \qquad \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OE} = -2\vec{i} + 2\vec{k}$$

$$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OE} = -2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$$

$$\overrightarrow{H_1}(E) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -13\vec{j} + 2\vec{k}$$

3- <u>Propriété d'équiprojectivité du champ des moments</u>

$$\overrightarrow{H_1}(E) = \overrightarrow{H_1}(O) + \overrightarrow{R_1} \wedge \overrightarrow{OE} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{H_1}(E) - \overrightarrow{H_1}(O) = \overrightarrow{R_1} \wedge \overrightarrow{OE}$$

$$\left[\overrightarrow{H_1}(E) - \overrightarrow{H_1}(O)\right] \cdot \overrightarrow{OE} = \left(\overrightarrow{R_1} \wedge \overrightarrow{OE}\right) \cdot \overrightarrow{OE} = \vec{0}$$

Vérifions que $\left[\vec{H}(E) - \overrightarrow{H_1}(O)\right] \cdot \overrightarrow{OE}$ est nul .

$$\left[\overrightarrow{H_1}(E) - \overrightarrow{H_1}(O)\right] \cdot \overrightarrow{OE} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -13 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -15 \\ 2 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = (-1, 2, 0) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

Le champ des moments est équiprojectif, donc antisymétrique.

4- <u>Invariant scalaire de $[T_1]$</u>

$$I_s = \overrightarrow{R_1} \cdot \overrightarrow{H_1}(O) = 19$$

5- <u>Equation de l'axe central et moment central de $[T_1]$</u>

Soit P (x, y, z) un point de l'axe central, sa position est donnée par la relation :

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{R_1} \wedge \overrightarrow{H_1}(O)}{\left\|\overrightarrow{R_1}\right\|^2} + \lambda \overrightarrow{R_1}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -15 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{43}{14} - 2\lambda \\ y = \dfrac{1}{2} - \lambda \\ z = \dfrac{31}{14} + 3\lambda \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{43 - 14x}{28} = \frac{1 - 2y}{2} = \frac{-31 + 14z}{42}$$

C'est l'équation de l'axe central.

Le moment central est constant le long de l'axe central.

$$\overrightarrow{H_1}(P) = \overrightarrow{H_1}(O) + \overrightarrow{R_1} \wedge \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{H_1}(O) + \overrightarrow{R_1} \wedge \left[\frac{\overrightarrow{R_1} \wedge \overrightarrow{H_1}(O)}{\left\|\overrightarrow{R_1}\right\|^2} + \lambda \overrightarrow{R_1}\right]$$

$$= \overrightarrow{H_1}(O) + \frac{1}{\left\|\overrightarrow{R_1}\right\|^2} \overrightarrow{R_1} \wedge \left[\overrightarrow{R_1} \wedge \overrightarrow{H_1}(O)\right]$$

$$\overrightarrow{H_1}(P) = \overrightarrow{H_1}(O) + \frac{1}{\|\overrightarrow{R_1}\|^2}\left[\left(\overrightarrow{R_1}\cdot\overrightarrow{H_1}(O)\right)\overrightarrow{R_1} - \|\overrightarrow{R_1}\|^2\overrightarrow{H_1}(O)\right] = \frac{I_S}{\|\overrightarrow{R_1}\|^2}\overrightarrow{R_1}$$

$$\overrightarrow{H_1}(P) = \frac{19}{14}\left(-2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 3\vec{k}\right)$$

6- Relation liant a et b pour que le torseur $[T_2]$ soit un glisseur.

$[T_2]$ est un glisseur si son invariant scalaire est nul avec un résultante non nulle.

$$I_s = \overrightarrow{R_2}\cdot\overrightarrow{H_2} = \frac{2}{3}(a+b) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a = -b$$

7- Comoment des deux torseurs

Rappel

Le comoment est invariant :

$$[T_1]\otimes[T_2] = \overrightarrow{R_1}\cdot\overrightarrow{H_2}(P) + \overrightarrow{R_2}\cdot\overrightarrow{H_1}(P) = \overrightarrow{R_1}\cdot\left[\overrightarrow{H_2}(O) + \overrightarrow{R_2}\wedge\overrightarrow{OP}\right] + \overrightarrow{R_2}\cdot\left[\overrightarrow{H_1}(O) + \overrightarrow{R_1}\wedge\overrightarrow{OP}\right]$$

$$= \overrightarrow{R_1}\cdot\overrightarrow{H_2}(0) + \overrightarrow{R_2}\cdot\overrightarrow{H_1}(0) + \overrightarrow{R_1}\cdot\left(\overrightarrow{R_2}\wedge\overrightarrow{OP}\right) + \overrightarrow{R_2}\cdot\left(\overrightarrow{R_1}\wedge\overrightarrow{OP}\right)$$

$$= \overrightarrow{R_1}\cdot\overrightarrow{H_2}(0) + \overrightarrow{R_2}\cdot\overrightarrow{H_1}(0) + \overrightarrow{OP}\cdot\left[\underbrace{\overrightarrow{R_1}\wedge\overrightarrow{R_2} + \overrightarrow{R_2}\wedge\overrightarrow{R_1}}_{=\vec{0}}\right] \quad \Rightarrow$$

$$[T_1]\otimes[T_2] = \overrightarrow{R_1}\cdot\overrightarrow{H_2}(P) + \overrightarrow{R_2}\cdot\overrightarrow{H_1}(P) = \overrightarrow{R_1}\cdot\overrightarrow{H_2}(0) + \overrightarrow{R_2}\cdot\overrightarrow{H_1}(0)$$

$$[T_1]\otimes[T_2] = \overrightarrow{R_1}\cdot\overrightarrow{H_2}(0) + \overrightarrow{R_2}\cdot\overrightarrow{H_1}(0) = \overrightarrow{R_1}\cdot\left[\overrightarrow{H_2}(E) + \overrightarrow{R_2}\wedge\overrightarrow{EO}\right] + \overrightarrow{R_2}\cdot\overrightarrow{H_1}(0)$$

$$= (-2,-1,3)\cdot\left[\begin{pmatrix}a\\b\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}\wedge\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\right] + \frac{1}{3}(2,2,1)\cdot\begin{pmatrix}1\\-15\\2\end{pmatrix} = -2a - b - 8$$

Exercice 13

On donne les trois glisseurs $\left(A_i, \vec{V_i}\right)$ $i = 1, 2, 3$, tels que $A_1(0, 0, a)$, $A_2(a, 0, 0)$, $A_3(0, a, 0)$, $\vec{V_1}(2a, 0, 0), \vec{V_2}(0{,}3a, 0)\ et\ \vec{V_3}(0, 0, 4a)$.

On considère le torseur$[\tau]$. Déterminer les éléments de réduction de $[\tau]$ en un point P quelconque ainsi que son axe central

$$[\tau] = \sum_{i=1}^{3}\left(A_i, \vec{V_i}\right)$$

Solution

Eléments de réduction de $[\tau]$

La résultante est donnée par : $\vec{R} = \vec{V_1} + \vec{V_2} + \vec{V_3} = a(2\vec{x} + 3\vec{y} + 4\vec{z})$

Le moment au point P de coordonnées (x, y, z) est :

$$\vec{H}(P) = \overrightarrow{PA_1}\wedge\vec{V_1} + \overrightarrow{PA_2}\wedge\vec{V_2} + \overrightarrow{PA_3}\wedge\vec{V_3}$$

$$\vec{H}(P) = \begin{pmatrix}-x\\-y\\a-z\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}2a\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a-x\\-y\\-z\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\3a\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-x\\a-y\\-z\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\0\\4a\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}4(a-y)+3z\\4x+2(a-z)\\3(a-x)+2y\end{pmatrix}$$

$$[\tau]_P = \begin{bmatrix} \vec{R} = a(2\vec{x} + 3\vec{y} + 4\vec{z}) \\ \vec{H}(P) = a\left[(4(a-y) + 3z)\vec{x} + \left(4x + 2(a-z)\right)\vec{y} + (3(a-x) + 2y)\vec{z}\right] \end{bmatrix}$$

<u>Axe central de $[\tau]$</u>

L'axe central est défini par l'ensemble des points P tels que $\vec{H}(P) \parallel \vec{R}$

C'est la droite d'équation :

$$\frac{4(a-y)+3z}{2} = \frac{4x+2(a-z)}{3} = \frac{3(a-x)+2y}{4}$$

<u>Exercice 14</u>

On définit un torseur au point P(2, -1, 1) par : $[T]_P = \begin{bmatrix} \vec{R} = -\vec{x} - 2\vec{y} + 2\vec{z} \\ \vec{H}(P) = 4\vec{x} - \vec{z} \end{bmatrix}$

a- Définir ce torseur en Q(0, 2, 0).

b- Calculer l'invariant scalaire de $[T]$.

c- Soit $I \in \Delta$ axe central de $[T]$ tel que $\overrightarrow{PI}$ soit perpendiculaire à Δ. Déterminer $\overrightarrow{PI}$ ainsi que les équations de Δ.

<u>Solution</u>

a- Eléments de réduction de $[T]$ au point Q

$$\vec{H}(Q) = \vec{H}(P) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$[T]_Q = \begin{bmatrix} \vec{R} = -\vec{x} - 2\vec{y} + 2\vec{z} \\ \vec{H}(Q) = -5\vec{y} - 8\vec{z} \end{bmatrix}$$

b- Invariant scalaire

$$I = \vec{R}\,\vec{H} = 10 - 16 = -6$$

c- $\overrightarrow{PI}$ perpendiculaire à Δ

$\overrightarrow{PI}$ perpendiculaire à l'axe central est équivalent à $\overrightarrow{PI}$ perpendiculaire à $\vec{R} \Rightarrow \overrightarrow{PI} \cdot \vec{R} = 0 \Rightarrow$

$$\overrightarrow{PI} = \frac{\vec{R} \wedge \overrightarrow{H(P)}}{\|\vec{R}\|^2} = \frac{1}{9}(2\vec{x} + 7\vec{y} + 8\vec{z})$$

Cherchons maintenant les équations de l'axe central.

$$\vec{H}(I) = \vec{H}(P) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{PI} = \lambda\vec{R}\,, On\ pose\ \overrightarrow{PI} = A\vec{x} + B\vec{y} + C\vec{z} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{4 - 2C - 2B}{-1} = \frac{2A + C}{-2} = \frac{-1 - B + 2A}{2} = \lambda$$

$$\begin{cases} 8 - 5C - 4B - 2A = 0 \\ 1 + B - 4A - C = 0 \end{cases}$$

Si l'on pose $\overrightarrow{OI}(x, y, z)\ on\ a$: $\overrightarrow{PI} = \overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OP} = (x-2)\vec{x} + (y+1)\vec{y} + (z-1)\vec{z}\ \ d'où$:

$$\begin{cases} 8 - 5(z-1) - 4(y+1) - 2(x-2) = 0 \\ 1 + (y+1) - 4(x-2) - (z-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 4y + 5z = 13 \\ 4x - y + z = 11 \end{cases}$$

Exercice 15

On donne les forces $(O,\vec{F_1})\ et\ (B,\vec{F_2})$ telles que :

$$B(4,0,0) \qquad \vec{F_1} = 3\vec{j} \qquad \vec{F_2} = -2\vec{j} + 2\sqrt{2}\,\vec{k}$$

a- Montrer que la droite OB est la perpendiculaire commune aux deux forces.

b- Montrer que l'axe central Δ du torseur associé aux deux forces est perpendiculaire en un point I de OB. Déterminer les équations de Δ

Solution

a- La droite OB est la perpendiculaire commune aux deux forces.

$$\begin{cases} \overrightarrow{OB}\cdot\vec{F_1} = 0 \\ \overrightarrow{OB}\cdot\vec{F_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \overrightarrow{OB}\cdot(\vec{F_1}+\vec{F_2}) = 0$$

Donc $\overrightarrow{OB}$ est la perpendiculaire commune à $\vec{F_1}\ et\ \vec{F_2}$.

Le torseur associé aux deux forces est donné par :

$$[T] = \left[\begin{array}{c} \vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = \vec{j} + 2\sqrt{2}\,\vec{k} \\ \vec{H}(O) = \overrightarrow{OB}\wedge\vec{F_2} = -8(\sqrt{2}\,\vec{j} + \vec{k}) \end{array}\right.$$

b- l'axe central Δ du torseur $[T]$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{OB}$

Si I est un point de l'axe central tel que $\overrightarrow{OI}\cdot\vec{R} = 0$, alors :

$$\overrightarrow{OI} = \frac{\vec{R}\wedge\vec{H}(O)}{\|\vec{R}\|^2} = \frac{24}{9}\,\vec{\imath} < 4\vec{\imath} = \overrightarrow{OB}$$

Donc I est un point de OB.

Soit P(x, y, z) un point de l'axe central $\Leftrightarrow \quad \vec{H}(P) = \vec{H}(O) + \vec{R}\wedge\overrightarrow{OP} = \alpha\vec{R} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -8\sqrt{2} \\ -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} z = 2\sqrt{2}\,y \\ -8\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\,x = \alpha \\ -8 - x = 2\sqrt{2}\,\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 2\sqrt{2}\,y \\ x = \dfrac{24}{9} \end{cases}$$

L'axe central est une droite d'équation : $z\ = 2\sqrt{2}\,y$ passant par le point de coordonnées $(\frac{24}{9}, 0, 0)$