Ecole Normale Supérieure de Natitingou
Physique Quantique
Examen du 1er Semestre

Année : 2016-2017
Licence 2 : PC & M
Durée : 2 H 30 min

Exercice 1 (5pts) :

On considère deux paquets d'ondes gaussiennes nettement séparés à l'instant initial et se propageant l'un vers l'autre. Les deux paquets d'ondes représentent chacun le mouvement du centre de masse d'un atome. Dans ce modèle extrêmement simplifié, on néglige les interactions entre les deux atomes. La fonction d'onde de position à l'instant initial est de la forme :

$$\Psi(x) = A\left[exp\left[-\frac{(x+b)^2}{2a^2}\right]exp(i\lambda x) + exp\left[-\frac{(x-b)^2}{2a^2}\right]exp(-i\lambda x)\right]$$

avec $-\infty < x < +\infty$, $(A, a) \in \mathbb{R}_+^*$ et $(\lambda, b) \in \mathbb{R}_+$

1°) Déterminer A en fonction des autres paramètres pour que la fonction d'onde soit normalisée.

2°) La densité de probabilité de cette fonction d'onde est-elle réelle ?

3°) Montrer que la fonction d'onde d'impulsion est égale à :

$$\tilde{\Psi}(p) = \frac{aA}{\sqrt{\hbar}}\left[exp\left[-\frac{a^2}{2}\left(\frac{p}{\hbar}+\lambda\right)^2\right]exp\left[-ib\left(\frac{p}{\hbar}+\lambda\right)\right] + exp\left[-\frac{a^2}{2}\left(\frac{p}{\hbar}-\lambda\right)^2\right]exp\left[-ib\left(\frac{p}{\hbar}-\lambda\right)\right]\right].$$

On rappelle que : $\int_{-\infty}^{+\infty} exp[-\alpha(x+\beta)^2] = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$

Exercice 2 (7pts) :

On considère des particules quantiques de masse m dans un potentiel $V(x)$ monodimensionnel défini par : $V(x) = -\frac{V_0}{sh^2(\alpha x)}$ avec $V_0 > 0$ et $\alpha > 0$

1°) Etudier puis représenter ce potentiel dans un repère orthonormé.

2°) L'énergie totale E de ces particules est inférieure à zéro et on pose : $-\varepsilon^2 = \frac{2mE}{\alpha^2\hbar^2}$ et $k^2 = \frac{2mV_0}{\alpha^2\hbar^2}$.

2.1°) Ecrire l'équation de Schrödinger stationnaire décrivant la dynamique ces particules dans ce potentiel.

2.2°) En faisant le changement de variable $u = \coth(\alpha x)$, proposer la nouvelle équation différentielle de la fonction d'état $\varphi(u)$.

2.3°) En faisant le changement de fonction $\varphi(u) = (1-u^2)^{-\frac{\lambda}{2}}f(u)$, déterminer l'équation différentielle de la fonction f.

Exercice 3 (8pts) :

1°) On se propose d'étudier le mouvement des particules quantiques de masse m et d'énergie $E > 0$ parcourant de la gauche vers la droite un potentiel $V(x)$ défini par :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ V_0 & si\ 0 < x < a \\ 0 & si\ x > a \end{cases}$$

Représenter ce potentiel dans un repère orthonormé.

2°) On étudie ces particules dans le cas où leurs énergies totales sont telles que : $0 < E < V_0$.

2.1°) En subdivisant le domaine de ce potentiel en trois régions notées (1), (2) et (3), écrire l'équation de Schrödinger dans ces régions. On posera : $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ et $-\gamma^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)$

2.2°) Donner et justifier les solutions physiques de chacune des équations.

2.3°) Ecrire l'expression du coefficient de transmission ce ces particules en fonction des coefficients d'intégration des solutions trouvées dans la question précédente.

2.4°) Ecrire les conditions de continuité la fonction d'onde et de sa dérivée première aux points de discontinuité du potentiel.

2.5°) Etablir l'expression du coefficient de transmission en fonction des constantes k et γ.

2.6°) Commenter ce résultat, comparativement à la mécanique classique.

$-\frac{\lambda}{2}$

Ecole Normale Supérieure de Natitingou
Département de Physique

Année : 2018-2019
Licence 2 : MI & PCT

Examen du premier semestre
UE : Mécanique Quantique – Durée : 2 H 30 min

Qualité de la production (2pts)

Exercice 1 : Densité de probabilité de la fonction d'onde de position (6pts)

1. On considère l'intégrale convergente $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^n dx}{(x^2+a^2)^2}$; $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $I_{2k+1} = 0$; puis montrer, par un changement de variable adéquat, que
$I_{2k} = a^{2k-3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} cos^{2-2k}(\theta) sin^{2k}(\theta)\, d\theta$; $k \in \mathbb{N}$. Calculer I_0, I_1 et I_2

2. On considère la fonction d'onde de position définit $\forall\, x \in \mathbb{R}$, tel que :

$$\Psi(x) = \frac{K e^{i\omega x}}{x^2 + a^2} \quad avec\ (K, a, \omega) \in \mathbb{R}_+^{*3}$$

2.1 Ecrire le moment d'ordre n de position, $< x^n >$, en fonction de I_n.

2.2 Calculer le moment d'ordre zéro puis déterminer K pour que la fonction d'onde soit normalisée. En déduire l'écarts-type de position Δx

Exercice 2 : Effet tunnel (12pts)

On se propose d'étudier le mouvement d'une particule quantique de masse m et d'énergie $E > 0$ parcourant de la gauche vers la droite un potentiel $V(x)$ défini par :

$$V(x) = \frac{V_0}{ch^2(\alpha x)} \quad \text{avec } V_0 > 0 \text{ et } \alpha > 0$$

1. représenter ce potentiel dans un repère orthonormé.

2.1 Ecrire l'équation de Schrödinger stationnaire décrivant la dynamique d'une particule quantique dans ce potentiel

2.2 En faisant le changement de variable $u = th(\alpha x)$, proposer la nouvelle équation différentielle de la fonction d'état $\varphi(u)$. On posera $\varepsilon^2 = \frac{2mE}{\alpha^2\hbar^2}$ et $k^2 = \frac{2mV_0}{\alpha^2\hbar^2}$

2.3 On se propose de faire le changement de fonction $\varphi(u) = (1-u^2)^{-\lambda/2} f(u)$. Quelle est équation différentielle caractéristique de la fonction $f(u)$.

3. Vu «la complexité de cette équation différentielle», on suggère une simplification l'expression du potentiel en trois régions.

3.1 Représenter cette forme simplifiée dans le même repère que précédemment.

3.2 Physiquement, la forme simplifiée du potentiel proposé produira le même résultat celui-ci :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ V_0 & si\ 0 < x < a \\ 0 & si\ x > a \end{cases}$$

Représenter ce potentiel dans un autre repère orthonormé.

4. on suppose à présent que l'énergie de la particule est comprise entre zéro et V_0

4.1 En subdivisant le domaine de ce dernier potentiel en trois régions notées (1), (2) et (3), écrire l'équation de Schrödinger dans ces régions puis donner leurs solutions.

4.2 Ecrire l'expression du coefficient de transmission ce ces particules en fonction de coefficients d'intégration des solutions trouvées dans la question précédente.

4.3 Ecrire les conditions de continuité la fonction d'onde et de sa dérivée première aux points de discontinuité du potentiel.

4.4 Déduire de ces relations l'expression du coefficient de transmission en fonction de E et de V_0.

4.5 Commenter ce résultat, comparativement à la mécanique classique.

Licence 2 : PC & MI - ENS/FAST-Natitingou
Examen du 1er Semestre : Physique Quantique

Année : 2014-2015
Durée : 2 Heures

Exercice 1: Equation de Schrödinger

L'évolution spatio-temporelle de la fonction d'onde en dimension 1 obéit à l'équation de Schrödinger .

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V(x)\right]\psi(x,t)=i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}$$

1) En utilisant la méthode par séparation des variables, on pose $\psi(x,t)=\varphi(x)\eta(t)$. Déterminer les équations différentielles de $\varphi(x)$ et $\eta(t)$ puis résoudre celle de $\eta(t)$. Comment appelle-t-on l'équation différentielle de $\varphi(x)$?

2) Montrer que si $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ sont solutions de l'équation de Schrödinger stationnaire dans une région, alors pour tout nombre complexe A et B , $A\varphi_1(x)+B\varphi_2(x)$ est solution de l'équation de Schrödinger dans la même région.

3) On se propose un changement de variable de forme $u=\alpha x+\beta$.

3.1) Déterminer l'équation différentielle de $\varphi(u)$.

3.2) En déduire que dans toute région où le potentiel est paire, si $\varphi(x)$ solution de l'équation de Schrödinger alors $\varphi(-x)$ est aussi solution de la même équation.

3.3) En conclure que, lorsque $\varphi(x)$ n'est ni paire ni impaire, on peut choisir des solutions paires ou impaires dans la région où le potentiel est paire.

Exercice 2 : Interaction neutron-proton

Le but de ce problème est de modéliser l'interaction proton-neutron permettant la formation de l'état lié appelé "deutéron". Ce système est équivalent à une particule de masse m dans le puits de potentiel $V(x)$ monodimensionnel défini par : $V(x)=V_0\left(\exp(-2\alpha x)-2\exp(-\alpha x)\right)$,avec $V_0>0$ et $\alpha>0$. De plus, l'énergie E de cet état doit vérifier : $-V_0<E<0$.

1) Etudier puis représenter les variations de $V(x)$

2.1 Ecrire l'équation de Schrödinger stationnaire décrivant la dynamique d'une particule quantique dans ce potentiel. On posera $\varepsilon^2=-\frac{2mE}{\alpha^2\hbar^2}$ et $k^2=\frac{2mV_0}{\alpha^2\hbar^2}$, avec $\varepsilon>0$ et $k>0$

2.2 En faisant le changement de variable $u=2k\exp(-\alpha x)$, proposer la nouvelle équation différentielle de la fonction d'état $\varphi(u)$.

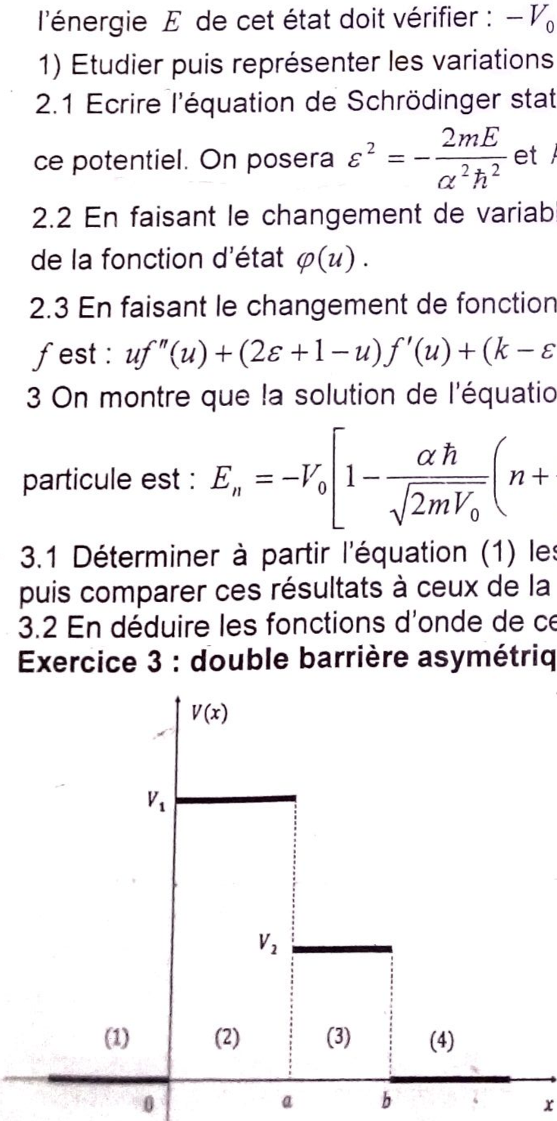
2.3 En faisant le changement de fonction $\varphi(u)=u^{\varepsilon}f(u)\exp(-u/2)$,monter que équation différentielle de f est : $uf''(u)+(2\varepsilon+1-u)f'(u)+(k-\varepsilon-\frac{1}{2})f(u)=0$ (1)

3 On montre que la solution de l'équation (1) est un polynôme de degré n de sorte que l'énergie de la particule est : $E_n=-V_0\left[1-\frac{\alpha\hbar}{\sqrt{2mV_0}}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]^2$ avec $n\in\aleph$ (2).

3.1 Déterminer à partir l'équation (1) les énergies du niveau fondamental et de la première excitation puis comparer ces résultats à ceux de la relation (2).

3.2 En déduire les fonctions d'onde de ces deux états.

Exercice 3 : double barrière asymétrique



On considère une particule quantique masse m et d'énergie E $(V_2<E<V_1)$ soumise au potentiel d'un monodimensionnel représenté sur la figure ci-contre. On pose : $\gamma^2=\frac{2m}{\hbar^2}E$, $-k^2=\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_1)$ et $\beta^2=\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_2)$ (avec $\gamma>0$, $k>0$ et $\beta>0$).

Ecrire, dans les quatre régions, l'équation de Schrödinger avec les constantes γ, k et β puis déterminer les solutions physiques de ces équations.

Ecole Normale Supérieure de Natitingou
Physique Quantique
Examen du 1er Semestre

Année : 2016-2017
Licence 2 : PC & MI
Durée : 2 H 30 min

Exercice 1 (5pts) :
On considère deux paquets d'ondes gaussiennes nettement séparés à l'instant initial et se propageant l'un vers l'autre. Les deux paquets d'ondes représentent chacun le mouvement du centre de masse d'un atome. Dans ce modèle extrêmement simplifié, on néglige les interactions entre les deux atomes. La fonction d'onde de position à l'instant initial est de la forme :

$$\Psi(x) = A\left[exp\left[-\frac{(x+b)^2}{2a^2}\right]exp(i\lambda x) + exp\left[-\frac{(x-b)^2}{2a^2}\right]exp(-i\lambda x)\right]$$

avec $-\infty < x < +\infty$, $(A, a) \in \mathbb{R}_+^*$ et $(\lambda, b) \in \mathbb{R}_+$

1°) Déterminer A en fonction des autres paramètres pour que la fonction d'onde soit normalisée.
2°) La densité de probabilité de cette fonction d'onde est-elle réelle ?
3°) Montrer que la fonction d'onde d'impulsion est égale à :

$$\tilde{\Psi}(p) = \frac{aA}{\sqrt{\hbar}}\left[exp\left[-\frac{a^2}{2}\left(\frac{p}{\hbar}+\lambda\right)^2\right]exp\left[-ib\left(\frac{p}{\hbar}+\lambda\right)\right] + exp\left[-\frac{a^2}{2}\left(\frac{p}{\hbar}-\lambda\right)^2\right]exp\left[-ib\left(\frac{p}{\hbar}-\lambda\right)\right]\right]$$

On rappelle que : $\int_{-\infty}^{+\infty} exp[-\alpha(x+\beta)^2] = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$

Exercice 2 (7pts) : *
On considère des particules quantiques de masse m dans un potentiel $V(x)$ monodimensionnel défini par : $V(x) = -\frac{V_0}{sh^2(\alpha x)}$ avec $V_0 > 0$ et $\alpha > 0$

1°) Etudier puis représenter ce potentiel dans un repère orthonormé.
2°) L'énergie totale E de ces particules est inférieure à zéro et on pose : $-\varepsilon^2 = \frac{2mE}{\alpha^2\hbar^2}$ et $k^2 = \frac{2mV_0}{\alpha^2\hbar^2}$
2.1°) Ecrire l'équation de Schrödinger stationnaire décrivant la dynamique ces particules dans ce potentiel.
2.2°) En faisant le changement de variable $u = \coth(\alpha x)$, proposer la nouvelle équation différentielle de la fonction d'état $\varphi(u)$.
2.3°) En faisant le changement de fonction $\varphi(u) = (1-u^2)^{-\frac{\lambda}{2}}f(u)$, déterminer l'équation différentielle de la fonction f.

Exercice 3 (8pts) :
1°) On se propose d'étudier le mouvement des particules quantiques de masse m et d'énergie $E > 0$ parcourant de la gauche vers la droite un potentiel $V(x)$ défini par :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ V_0 & si\ 0 < x < a \\ 0 & si\ x > a \end{cases}$$

Représenter ce potentiel dans un repère orthonorm
2°) On étudie ces particules dans le cas où leurs énergies totales sont telles que : $0 < E < V_0$.
2.1°) En subdivisant le domaine de ce potentiel en trois régions notées (1), (2) et (3), écrire l'équation de Schrödinger dans ces régions. On posera : $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ et $-\gamma^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)$
2.2°) Donner et justifier les solutions physiques de chacune des équations.
2.3°) Ecrire l'expression du coefficient de transmission ce ces particules en fonction des coefficients d'intégration des solutions trouvées dans la question précédente.
2.4°) Ecrire les conditions de continuité la fonction d'onde et de sa dérivée première aux points de discontinuité du potentiel.
2.5°) Etablir l'expression du coefficient de transmission en fonction des constantes k et γ.
2.6°) Commenter ce résultat, comparativement à la mécanique classique.

Exercice 1 : Densite de courant

La densite de courant de la fonction d'onde étant définie par :

$$\vec{J}(\vec{r},t) = -\frac{i\hbar}{2m}\left[\psi^*(\vec{r},t)\overrightarrow{gard}\psi(\vec{r},t) - \psi(\vec{r},t)\overrightarrow{grad}\psi^*(\vec{r},t)\right]$$

1-a) Déterminer la densité de courant d'une fonction d'onde de la forme : $\psi(\vec{r},t) = A\exp[\alpha f(\vec{r},t)]$ où α est un nombre complexe et $f(\vec{r},t)$ une fonction à valeur réelle.

Analyser : **b)** Le cas où α est un réel pur. En déduire que la densité de probabilité est stationnaire.

c) Le cas où α est un imaginaire pur

2) Expliciter $\vec{J}$ dans le cas d'une onde plane : $\psi(\vec{r},t) = A\exp[i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)]$ ($\vec{k}$ et ω sont constants).

Exercice 2 : Effet tunnel

On se propose d'étudier le mouvement d'une particule quantique de masse m et d'énergie $E > 0$ parcourant de la gauche vers la droite un potentiel $V(x)$ défini par :

$$V(x) = \frac{V_0}{ch^2(\alpha x)} \text{ avec } V_0 > 0 \text{ et } \alpha > 0$$

1. représenter ce potentiel dans un repère orthonormé.

2.1 Ecrire l'équation de Schrödinger stationnaire décrivant la dynamique d'une particule quantique dans ce potentiel.

2.2 En faisant le changement de variable $u = th(\alpha x)$, proposer la nouvelle équation différentielle de la fonction d'état $\varphi(u)$. On posera $\varepsilon^2 = \frac{2mE}{\alpha^2\hbar^2}$ et $k^2 = \frac{2mV_0}{\alpha^2\hbar^2}$

2.3 On se propose de faire le changement de fonction $\varphi(u) = (1-u^2)^{-\lambda/2} f(u)$. Quelle est équation différentielle caractéristique de la fonction $f(u)$.

3. Vu «la complexité de cette équation différentielle», on suggère une simplification l'expression du potentiel en trois régions.

3.1 Représenter cette forme simplifiée dans le même repère que précédemment.

3.2 Physiquement, la forme simplifiée du potentiel proposé produira le même résultat celui-ci :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ V_0 & si\ 0 < x < a \\ 0 & si\ x > a \end{cases}$$

Représenter ce potentiel dans un autre repère orthonormé.

4. on suppose à présent que l'énergie de la particule comprise entre zéro et V_0

4.1 En subdivisant le domaine de ce dernier potentiel en trois régions notées (1), (2) et (3), écrire l'équation de Schrödinger dans ces régions puis donner leurs solutions.

4.2 Ecrire l'expression du coefficient de transmission ce ces particules en fonction de coefficients d'intégration des solutions trouvées dans la question précédente.

4.3 Ecrire les conditions de continuité la fonction d'onde et de sa dérivée première aux points de discontinuité du potentiel.

4.4 Déduire de ces relations l'expression du coefficient de transmission en fonction de E et de V_0.

4.5 Commenter ce résultat, comparativement à la mécanique classique.

Exercice 3 : La fonction d'onde associée aux états stationnaires une particule quantique de masse m et d'impulsion p se trouvant dans un puits infini (de dimension 1 et dont les bords sont situés en 0 et a), est de la forme : $\varphi(x) = A\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$ (n étant un entier naturel non nul) ; Montrer que la fonction d'onde dans l'espace des impulsions s'écrit :

$$\tilde{\varphi}(p) = \frac{1}{2i}\sqrt{\frac{a}{\pi\hbar}}\left[\text{sinc}\left(\frac{ap}{2\hbar} - \frac{n\pi}{2}\right) + (-1)^{n+1}\,\text{sinc}\left(\frac{ap}{2\hbar} + \frac{n\pi}{2}\right)\right]\exp\left[i\left(\frac{n\pi}{2} - \frac{ap}{2\hbar}\right)\right]$$

Avec $\text{sinc}(u) = \frac{\sin u}{u}$

N. Yazidath

Ecole Normale Supérieure de Natitingou

Physique Quantique : Examen du 1^er Semestre — **Durée : 2 Heures** — **Année : 2015-2016**

Licence 2 : PC & MI

Exercice 1 : Densité de courant

1) La densité de courant de la fonction d'onde étant définie par :

$$\vec{J}(\vec{r},t) = -\frac{i\hbar}{2m}\left[\psi^*(\vec{r},t)\overrightarrow{gard}\,\psi(\vec{r},t) - \psi(\vec{r},t)\overrightarrow{grad}\,\psi^*(\vec{r},t)\right]$$

a) Déterminer la densité de courant d'une fonction d'onde de la forme $\psi(\vec{r},t) = A\exp[\alpha f(\vec{r},t)]$ où α est un nombre complexe non nul et $f(\vec{r},t)$ une fonction à valeur réelle. Analyser :

b) Le cas où α est un réel pur. En déduire que la densité de probabilité est stationnaire.

c) Le cas où α est un imaginaire pur

2) Expliciter $\vec{J}$ dans le cas d'une onde plane : $\psi(\vec{r},t) = A\exp\left[i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)\right]$ ($\vec{k}$ et ω sont constants).

3) On rappelle que l'évolution spatio-temporelle d'une fonction d'onde en dimension 3 obéit à l'équation de Schrödinger ci-dessous :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r})\right]\psi(\vec{r},t) = i\hbar\frac{\partial\psi(\vec{r},t)}{\partial t}$$

Lorsque la fonction d'onde de la forme $\psi(\vec{r},t) = A\exp[\alpha f(\vec{r},t)]$ où α est un nombre complexe non nul et $f(\vec{r},t)$ une fonction à valeur réelle, déterminer l'équation différentielle vérifiée par la fonction $f(\vec{r},t)$.

Exercice 2 : Oscillateur harmonique

1) On considère une particule quantique soumise au potentiel d'un oscillateur harmonique monodimensionnel $V(x)$:

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \quad (m>0 \text{ et } \omega>0)$$

A l'état fondamental, cette particule est décrite par la fonction d'onde de position $\psi(x)$:

$$\psi(x) = A\exp\left[-\frac{x^2}{2a^2}\right] \quad (a>0 \text{ et } A>0)$$

$A e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$

1.1 À partir de l'équation de Schrödinger stationnaire, déterminer la constante a et l'énergie E de la particule dans cet état.

1.2 Normaliser cette fonction d'onde puis la réécrire en fonction des paramètres m et ω de l'oscillateur harmonique.

1.3 Déterminer ensuite sa fonction d'onde d'impulsion $\tilde{\psi}(p)$ en fonction des paramètres m et ω de l'oscillateur harmonique.

1.4 Calculer $\Delta x\,\Delta p$ puis conclure.

2) En réalité, le spectre des énergies de l'oscillateur harmonique est défini par :

$$E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right),\ n\in N$$

2.1 On se propose de rechercher la fonction d'onde décrivant ces états sous la forme :

$$\psi(x) = Af(x)\exp\left[-\frac{x^2}{2a^2}\right] \quad (a>0 \text{ et } A>0)$$

Déterminer en fonction de la constante a l'équation différentielle (E1) caractérisant la fonction $f(x)$.

2.2 En posant $x = au$, montrer que l'équation (E1) devient : $f''(u) - 2uf'(u) + 2nf(u) = 0$ (E2).

2.3 On montre que les solutions de l'équation (E2) sont de la forme : $f_n(u) = (-1)^n\exp(u^2)\dfrac{d^n[\exp(-u^2)]}{du^n}$. En déduire les fonctions d'onde des états de la première et de la deuxième excitation de l'oscillateur harmonique.

3) On considère à présent une particule quantique soumise au potentiel d'un oscillateur harmonique bidimensionnel $V(x,y)$:

$$V(x,y) = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2) \quad (m>0 \text{ et } \omega>0)$$

Déterminer les états stationnaires de la fonction d'onde de position sous la forme $\psi(x,y) = X(x)Y(y)$. A partir de quel niveau d'énergie ces états sont dégénérés ?

Licence 2 : PC & MI - ENS/FAST-Natitingou
Examen du 1er Semestre : Physique Quantique

Année : 2014-2015
Durée : 2 Heures

Exercice 1: Equation de Schrödinger
L'évolution spatio-temporelle de la fonction d'onde en dimension 1 obéit à l'équation de Schrödinger :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V(x)\right]\psi(x,t)=i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}$$

1) En utilisant la méthode par séparation des variables, on pose $\psi(x,t)=\varphi(x)\eta(t)$. Déterminer les équations différentielles de $\varphi(x)$ et $\eta(t)$ puis résoudre celle de $\eta(t)$. Comment appelle-t-on l'équation différentielle de $\varphi(x)$?

2) Montrer que si $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ sont solutions de l'équation de Schrödinger stationnaire dans une région, alors pour tout nombre complexe A et B, $A\varphi_1(x)+B\varphi_2(x)$ est solution de l'équation de Schrödinger dans la même région.

3) On se propose un changement de variable de forme $u=\alpha x+\beta$.

3.1) Déterminer l'équation différentielle de $\varphi(u)$.

3.2) En déduire que dans toute région où le potentiel est paire, si $\varphi(x)$ solution de l'équation de Schrödinger alors $\varphi(-x)$ est aussi solution de la même équation.

3.3) En conclure que, lorsque $\varphi(x)$ n'est ni paire ni impaire, on peut choisir des solutions paires ou impaires dans la région où le potentiel est paire.

Exercice 2 : Interaction neutron-proton
Le but de ce problème est de modéliser l'interaction proton-neutron permettant la formation de l'état lié appelé "deutéron". Ce système est équivalent à une particule de masse m dans le puits de potentiel $V(x)$ monodimensionnel défini par : $V(x)=V_0\left(\exp(-2\alpha x)-2\exp(-\alpha x)\right)$, avec $V_0>0$ et $\alpha>0$. De plus, l'énergie E de cet état doit vérifier : $-V_0<E<0$.

1) Etudier puis représenter les variations de $V(x)$

2.1 Ecrire l'équation de Schrödinger stationnaire décrivant la dynamique d'une particule quantique dans ce potentiel. On posera $\varepsilon^2=-\frac{2mE}{\alpha^2\hbar^2}$ et $k^2=\frac{2mV_0}{\alpha^2\hbar^2}$, avec $\varepsilon>0$ et $k>0$

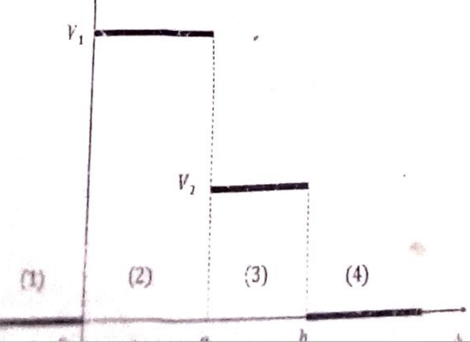
2.2 En faisant le changement de variable $u=2k\exp(-\alpha x)$, proposer la nouvelle équation différentielle de la fonction d'état $\varphi(u)$.

2.3 En faisant le changement de fonction $\varphi(u)=u^{\varepsilon}f(u)\exp(-u/2)$, monter que équation différentielle de f est : $uf''(u)+(2\varepsilon+1-u)f'(u)+(k-\varepsilon-\frac{1}{2})f(u)=0$ (1)

3 On montre que la solution de l'équation (1) est un polynôme de degré n de sorte que l'énergie de la particule est : $E_n=-V_0\left[1-\frac{\alpha\hbar}{\sqrt{2mV_0}}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]^2$ avec $n\in\mathbb{N}$ (2).

3.1 Déterminer à partir l'équation (1) les énergies du niveau fondamental et de la première excitation puis comparer ces résultats à ceux de la relation (2).
3.2 En déduire les fonctions d'onde de ces deux états.

Exercice 3 : double barrière asymétrique



On considère une particule quantique masse m et d'énergie E $(V_2<E<V_1)$ soumise au potentiel d'un monodimensionnel représenté sur la figure ci-contre. On pose : $\gamma^2=\frac{2m}{\hbar^2}E$, $-k^2=\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_1)$ et $\beta^2=\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_2)$ (avec $\gamma>0$, $k>0$ et $\beta>0$).
Ecrire, dans les quatre régions, l'équation de Schrödinger avec les constantes γ, k et β puis déterminer les solutions physiques de ces équations.

Ecole Normale Supérieure de Natitingou
Physique Quantique :
Examen de rattrapage

Année : 2015-2016
Licence 2 : PC & MI
Durée : 2 Heures

Exercice 1 (8pts) :

1) La densité de courant de la fonction d'onde étant définie par :

$$\vec{J}(\vec{r},t) = -\frac{i\hbar}{2m}\left[\psi^*(\vec{r},t)\overrightarrow{gard}\psi(\vec{r},t) - \psi(\vec{r},t)\overrightarrow{grad}\psi^*(\vec{r},t)\right]$$

a) Déterminer la densité de courant d'une fonction d'onde de la forme $\psi(\vec{r},t) = A\exp[\alpha f(\vec{r},t)]$ où α est un nombre complexe non nul et $f(\vec{r},t)$ une fonction à valeur réelle. Analyser :

b) Le cas où α est un réel pur. En déduire que la densité de probabilité est stationnaire.

c) Le cas où α est un imaginaire pur

2) Expliciter $\vec{J}$ dans le cas d'une onde plane : $\psi(\vec{r},t) = A\exp\left[i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)\right]$ ($\vec{k}$ et ω sont constants).

3) On rappelle que l'évolution spatio-temporelle d'une fonction d'onde en dimension 3 obéit à l'équation de Schrödinger ci-dessous :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r})\right]\psi(\vec{r},t) = i\hbar\frac{\partial\psi(\vec{r},t)}{\partial t}$$

Lorsque la fonction d'onde de la forme $\psi(\vec{r},t) = A\exp[\alpha f(\vec{r},t)]$ où α est un nombre complexe non nul et $f(\vec{r},t)$ une fonction à valeur réelle, déterminer l'équation différentielle vérifiée par la fonction $f(\vec{r},t)$.

Exercice 2 (8pts) :

Le but de ce problème est de modéliser l'interaction proton-neutron permettant la formation de l'état lié appelé "deutéron". Ce système est équivalent à une particule de masse m dans le puits de potentiel $V(x)$ monodimensionnel défini par : $V(x) = V_0(\exp(-2\alpha x) - 2\exp(-\alpha x))$, avec $V_0 > 0$ et $\alpha > 0$. De plus, l'énergie E de cet état doit vérifier : $-V_0 < E < 0$.

1) Etudier puis représenter les variations de $V(x)$

2.1 Ecrire l'équation de Schrödinger stationnaire décrivant la dynamique d'une particule quantique dans ce potentiel. On posera $\varepsilon^2 = -\frac{2mE}{\alpha^2\hbar^2}$ et $k^2 = \frac{2mV_0}{\alpha^2\hbar^2}$, avec $\varepsilon > 0$ et $k > 0$

2.2 En faisant le changement de variable $u = 2k\exp(-\alpha x)$, proposer la nouvelle équation différentielle de la fonction d'état $\varphi(u)$.

2.3 En faisant le changement de fonction $\varphi(u) = u^\varepsilon f(u)\exp(-u/2)$, monter que équation différentielle de f est : $uf''(u) + (2\varepsilon + 1 - u)f'(u) + (k - \varepsilon - \frac{1}{2})f(u) = 0$ (1)

3 On montre que la solution de l'équation (1) est un polynôme de degré n de sorte que l'énergie de la particule est : $E_n = -V_0\left[1 - \frac{\alpha\hbar}{\sqrt{2mV_0}}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right]^2$ avec $n \in \aleph$ (2).

3.1 Déterminer à partir l'équation (1) les énergies du niveau fondamental et de la première excitation puis comparer ces résultats à ceux de la relation (2).

3.2 En déduire les fonctions d'onde de ces deux états.

Exercice 3 (4pts) : La fonction d'onde associée aux états stationnaires une particule quantique de masse m et d'impulsion p se trouvant dans un puits infini (de dimension 1 et dont les bords sont situés en 0 et a), est de la forme : $\varphi(x) = A\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$ (n étant un entier naturel non nul) ; Montrer que la fonction d'onde dans l'espace des impulsions s'écrit :

$$\tilde{\varphi}(p) = \frac{1}{2i}\sqrt{\frac{a}{\pi\hbar}}\left[\mathrm{sinc}\left(\frac{ap}{2\hbar} - \frac{n\pi}{2}\right) + (-1)^{n+1}\mathrm{sinc}\left(\frac{ap}{2\hbar} + \frac{n\pi}{2}\right)\right]\exp\left[i\left(\frac{n\pi}{2} - \frac{ap}{2\hbar}\right)\right]$$

Avec $\mathrm{sinc}(u) = \frac{\sin u}{u}$