Institut Préparatoire aux Etudes d'Ingénieurs d'El Manar

1ére et 2éme année des classes préparatoires

Collection d'exercices de mécanique des solides rigides

par
Moez Ben Jaber

Année Universitaire 2009-2010

TD n°1

Les torseurs

Exercice 1 :

Dans un repère orthonormé direct $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, on considère les trois glisseurs {G1}, {G2} et {G3} suivants :

$$\{G1\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{F}_1 \\ \vec{M}(A)=\vec{0} \end{Bmatrix}_A,\ \{G2\}_B = \begin{Bmatrix} \vec{F}_2 \\ \vec{M}(B)=\vec{0} \end{Bmatrix}_B,\ \{G3\}_C = \begin{Bmatrix} \vec{F}_3 \\ \vec{M}(C)=\vec{0} \end{Bmatrix}_C$$

Avec A (L, 0, 0), $\vec{F}_1\begin{pmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{pmatrix}$, B(0, L, 0), $\vec{F}_2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{pmatrix}$ et C(L/2, L/2, L), $\vec{F}_3\begin{pmatrix} 0 \\ Y_3 \\ Z_3 \end{pmatrix}$

Soit {T} la somme des trois glisseurs {G1}, {G2} et {G3}.

1. Déterminer les éléments de réduction du torseur {T} au points O, A et B.
2. Trouvez Y_3 et Z_3 pour que le torseur {T} soit un couple, dans ce cas, calculer son moment.
3. Existent-t- ils des valeurs de Y_3 et Z_3 pour que le torseur {T} soit un glisseur tel que le point O appartient à l'axe central.
4. Soit $\{G4\}_C = \begin{Bmatrix} \vec{F}_4 \\ \vec{M}_4(C)=\vec{0} \end{Bmatrix}_C$ avec $\vec{F}_4\begin{pmatrix} X_4 \\ Y_4 \\ Z_4 \end{pmatrix}$

   Soit {T'} la somme des quatre glisseurs {G1}, {G2}, {G3}et {G4}.

Existent-t- ils des valeurs de X, Y, X_4, Y_4 et Z_4 pour que le torseur {T'} soit équivalent au torseur nul.

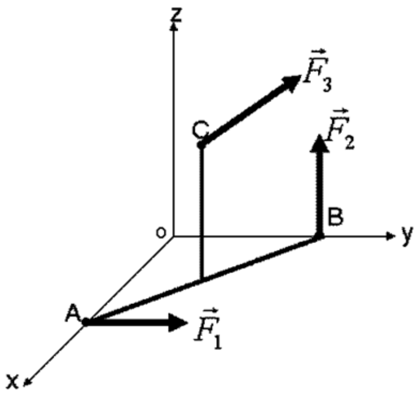


Figure 1

Exercice 3

Soit l'espace affine euclidien de repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soient quatre points A, B, C et D appartenant à l'espace affine. A tout point M, on associe le vecteur $\vec{H}(M)=\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{MD}$.

1) Montrer que le champ $\vec{H}(M)$ est antisymètrique.
2) Déterminer les éléments de réduction en A du torseur {T} associé à ce champ de vecteurs.

Exercice 4 :

Soit l'espace affine euclidien de repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soient A le point de coordonnées (1, 0, 0) et B le point de coordonnées (0, 1, 0).

Un torseur {T(λ)}, λ ∈R, est donné par ses trois moments aux points O, A, B.

$$\vec{M}(O) = -2\vec{i} + 2(1+\lambda)\vec{j}$$

$$\vec{M}(A) = -2\vec{i} + (3+2\lambda)\vec{j} - 3\vec{k}$$

$$\vec{M}(B) = -3\vec{i} + 2(1+\lambda)\vec{j} + (2+\lambda)\vec{k}$$

1) Vérifier l'équiprojectivité de ces moments.
2) Déterminer la résultante $\vec{R} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$ du torseur.
3) Soit C le point de coordonnées (0, 0, 1), déterminer le moment au point C par la condition d'équiprojectivité.
4) Pour quelle valeur de λ, le torseur {T(λ)}est-il glisseur ? Déterminer son axe central.
5) Pour quelle valeur de λ, l'axe central est-il parallèle au plan (O, y, z). Déterminer l'axe dans ce cas.

Exercice 5 :

L'espace affine euclidien réel orienté de dimension trois étant muni d'un repère direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère le champ de vecteurs $\vec{M}_t$ qui, pour t réel fixé, associe à tout point p de l'espace, le champ de vecteurs $\vec{M}_t(P)$ de composantes :

$\vec{M}_t(P)\begin{pmatrix} 1+3y-tz \\ -3x+2tz \\ 2+tx-t^2y \end{pmatrix}$ où (x,y,z) sont les coordonnées du point P.

1 °/ Pour quelles valeurs de t, le champ de vecteurs $\vec{M}_t$ soit représenté par un torseur ?

2°/ Lorsque $\vec{M}_t$ représente un torseur, calculer son vecteur et préciser si ce torseur est un glisseur, un couple. Déterminer son axe central.

Exercice 6 :

On considère deux torseurs $\{T_1\}$ et $\{T_2\}$ donnés par leurs éléments de réduction en un même point P arbitraire $(\vec{R}_1,\vec{M}_1(P))$ et $(\vec{R}_2,\vec{M}_2(P))$.

On définit un champ de vecteurs H par sa valeur au point P : $\vec{H}(P) = \vec{R}_1 \wedge \vec{M}_2(P) - \vec{R}_2 \wedge \vec{M}_1(P)$

3) Montrer que le champ H est équiprojectif.
4) Montrer que le champ H peut être représenté par un torseur dont on déterminera la résultante $\vec{R}$.

On note $\{T_3\}_P = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{H}(p) \end{Bmatrix}_P$ le torseur définit précédemment.

5) Montrer que le commenent $\{T_3\}\otimes\{T_1\}$ est nul.
6) Montrer que le commenent $\{T_3\}\otimes\{T_2\}$ est nul.

7) Dans quel cas $\{T_3\}$ est un torseur couple.

8) A quelle condition $\{T_3\}$ est-il un glisseur ?

Exercice 7

On considère l'espace affine euclidien de repère $(A,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soit une plaque rectangulaire ABCD de longueur L et de largeur H, avec A (0,0,0), B(0,L, 0), C(H,L,0) et D(H,0,0) soumise à une répartition de densité de force sur ses cotés. La répartition est uniforme sur les cotés AB et DC, elle est de norme p et q respectivement. La répartition est linéaire sur les cotés AD et BC (Figure 1).

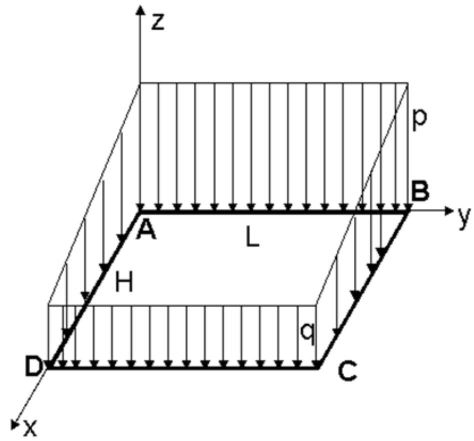


Figure 1

1) Déterminer l'expression de la fonction densité de force $\vec{f}$ pour chaque côté de cette plaque.

2) Déterminer les éléments de réduction du torseur $\{T_1\}$ aux points A et C associé à cette densité de force.

3) Discuter la nature du torseur $\{T_1\}$.

4) Supposons que p=q, donner l'expression du torseur $\{T_1\}_A$.

5) De plus, la plaque est soumise aux forces suivantes : $\vec{F}_A = F_{Ax}\vec{x}$ au point A, $\vec{F}_B = F_{By}\vec{y}$ au point B, $\vec{F}_C = F_{Cx}\vec{x}$ au point C et $\vec{F}_D = F_{Dy}\vec{y}$ au point D. Déterminer les éléments de réduction du torseur $\{T_2\}_A$ associé à cet ensemble de vecteurs liés.

6) Dans le cas ou p=q, déterminer les éléments de réduction du torseur $\{T\}_A$ associé à toutes les forces appliquées sur cette plaque.

7) Déterminer la décomposition centrale du torseur $\{T\}$.

Correction

Exercice 1

1)

- $\{T\}_O = \{G1\}_O + \{G2\}_O + \{G3\}_O$

$$\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}(O) \end{Bmatrix}_O = \begin{Bmatrix} \vec{F}_1 \\ \vec{M}_1(O) \end{Bmatrix}_O + \begin{Bmatrix} \vec{F}_2 \\ \vec{M}_2(O) \end{Bmatrix}_O + \begin{Bmatrix} \vec{F}_3 \\ \vec{M}_3(O) \end{Bmatrix}_O$$

d'où

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \begin{pmatrix} O \\ F \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O \\ 0 \\ F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O \\ F+Y \\ F+Z \end{pmatrix}$$

et

$$\vec{M}(O) = \vec{M}_1(O) + \vec{M}_2(O) + \vec{M}_3(O) = \overrightarrow{OA}\Lambda\vec{F}_1 + \overrightarrow{OB}\Lambda\vec{F}_2 + \overrightarrow{OC}\Lambda\vec{F}_3$$

$$\Rightarrow \quad \vec{M}(O) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ lF \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} lF \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{l}{2}Z - lY \\ -\frac{l}{2}Z \\ \frac{l}{2}Y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{M}(O) = \begin{pmatrix} lF + \frac{l}{2}Z - lY \\ -\frac{l}{2}Z \\ lF + \frac{l}{2}Y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \{T\}_O = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}(O) \end{Bmatrix}_O = \begin{Bmatrix} 0 & lF + \frac{l}{2}Z - lY \\ F+Y & -\frac{l}{2}Z \\ F+Z & lF + \frac{l}{2}Y \end{Bmatrix}_O$$

- $\{T\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}(A) \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}(O) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OA} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} 0 & lF + \frac{l}{2}Z - lY \\ F+Y & lF + \frac{l}{2}Z \\ F+Z & -\frac{l}{2}Y \end{Bmatrix}_A$

- $\{T\}_B = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}(B) \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}(O) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OB} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} 0 & -\frac{l}{2}Z - lY \\ F+Y & -\frac{l}{2}Z \\ F+Z & lF + \frac{l}{2}Y \end{Bmatrix}_A$

2) $\{T\}$ est un couple si $\vec{R}=\vec{0}$ et $\vec{M}(O) \neq \vec{0}$

$\vec{R}=\vec{0} \Rightarrow Y = Z = -F$ dans ce cas $\vec{M}(O) = \begin{pmatrix} -\frac{l}{2}F \\ -\frac{l}{2}F \\ \frac{l}{2}F \end{pmatrix} \neq \vec{0}$

3) $\{T\}$ est un glisseur et O∈ l'axe central $\Rightarrow \vec{R} \neq \vec{0}$ et $\vec{M}(O) = \vec{0}$

$\Rightarrow$ $Y\ et\ Z\ vérifient\ \ Z = 0\,; Y = F\ et\ Y = -2F$ **<u>c'est impossible</u>**

Il n'existe pas de valeurs de Y et Z qui vérifient ces conditions

4) $\{T'\}_O = \{G1\}_O + \{G2\}_O + \{G3\}_O + \{G4\}_O = \{T\}_O + \{G4\}_O$

avec Y=2F et Z=4F

on aura $\{T\}_{O=}\begin{Bmatrix} 0 & lF \\ 3F & -2lF \\ 5F & 2lF \end{Bmatrix}_O$

et $\{G4\}_O = \begin{Bmatrix} \vec{F}_4 \\ \vec{M}_4(O) \end{Bmatrix}_O = \begin{Bmatrix} \vec{F}_4 \\ \overrightarrow{OC}\wedge\vec{F}_4 \end{Bmatrix}_O = \begin{Bmatrix} L & \frac{l}{2}N - lM \\ M & -\frac{l}{2}N + lL \\ N & \frac{l}{2}M - \frac{l}{2}L \end{Bmatrix}_O$

D'où

$$\{T'\}_O = \begin{Bmatrix} L & lF + \dfrac{l}{2}N - lM \\ 3F + M & -2lF - \dfrac{l}{2}N + lL \\ 5F + N & 2lF + \dfrac{l}{2}M - \dfrac{l}{2}L \end{Bmatrix}_O$$

$\{T'\} = \{0\} \Rightarrow \vec{R}'=\vec{0}$ et $\vec{M}'(O) = \vec{0}$ ceci implique le système d'équations suivants :

$$\begin{cases} L = 0 \\ 3F + M = 0 \\ 5F + N = 0 \\ lF + \frac{l}{2}N - lM = 0 \\ -2lF - \frac{l}{2}N + lL = 0 \\ 2lF + \frac{l}{2}M - \frac{l}{2}L = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L = 0 \\ M = -3F \\ N = -5F \\ lF - \frac{5l}{2}F + 3lF = 0 \\ -2lF + 5\frac{l}{2}F = 0 \\ 2lF - 3\frac{l}{2}F = 0 \end{cases} \Rightarrow \textbf{\underline{impossible}}$$

D'où aucunes valeurs de L, M et N ne peuvent annuler en même temps $\vec{R}'$ et $\vec{M}'(O)$ c'est-à-dire annuler $\{T'\}$.

Exercice 2

1) Pourque $\vec{M}_a$ soit un champs de moment d'un torseur il faut qu'il soit antisymétrique. Pour vérifier l'antisymétrie de $\vec{M}_a$ on peut procéder de deux méthodes :
   - Chercher un vecteur $\vec{R}_a$ vérifiant ∀ P et Q de l'espace on a $\vec{M}_a(P) = \vec{M}_a$ (Q)+ $\vec{R}_a\wedge\overrightarrow{QP}$
     Les coordonnées de $\vec{R}_a$doivent être indépendantes de celles de P et Q.
   - Montrer que $\vec{M}_a$ et équiprojectif c'est-à-dire il vérifie ∀ P et Q de l'espace on a $\vec{M}_a(P).\overrightarrow{QP} = \vec{M}_a(Q).\overrightarrow{QP}$

   Dans les deux cas on sera amené à résoudre l'équation de second degré suivante :

   $a^2 - 3a + 2 = 0$ dont les solutions sont a=1 et a=2.

2)

a =1	a=2
$\vec{R}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\vec{R}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Im_1 = \vec{R}_1.\vec{M}_1(O) = 0$ et $\vec{R}_1 \neq \vec{0}$ Donc $\{T\}$ est un glisseur	$\Im_2 = \vec{R}_2.\vec{M}_2(O) \neq 0$ Donc $\{T_2\}$ n'est pas un torseur élémentaire
$\{T_1\}$ est un glisseur et $\vec{M}_1(O) = \vec{0}$ alors O∈ l'axe central (Δ_1) de $\{T_1\}$. De plus $(\Delta_1)//\vec{R}_1$ d'où (Δ_1)=(O, $\vec{R}_1$)	l'axe central (Δ_2) de $\{T_2\}$ est la droite // à $\vec{R}_2$ et passant par le point I_2 tel que : $\overrightarrow{OI_2} = \dfrac{\vec{R}_2 \wedge \vec{M}_2(O)}{\|\vec{R}_2\|^2}$ (Δ_2)=(I_2, $\vec{R}_2$)

Exercice 3

$\vec{H}(M) = \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MD}$.

9) Montrer que le champ $\vec{H}(M)$ est antisymètrique.

On a pour tout points M et N

$$\vec{H}(M) = \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MD}$$
$$= (\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NA}) \wedge (\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NB}) + (\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NC}) \wedge (\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{ND})$$
$$= (\overrightarrow{MN} \wedge (\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NB}) + \overrightarrow{NA} \wedge (\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NB})) + (\overrightarrow{MN} \wedge (\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{ND}) + \overrightarrow{NC} \wedge (\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{ND}))$$
$$= \overrightarrow{MN} \wedge \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NA} \wedge \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NA} \wedge \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{MN} \wedge \overrightarrow{ND} + \overrightarrow{NC} \wedge \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NC} \wedge \overrightarrow{ND}$$
$$= \vec{H}(N) + \overrightarrow{MN} \wedge (\overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{ND} - \overrightarrow{NC})$$
$$= \vec{H}(N) + \overrightarrow{MN} \wedge (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$$
$$= \vec{H}(N) + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) \wedge \overrightarrow{NM}$$

D'où $\vec{H}$ est un champ antisymetrique de résultante $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$

10) Déterminer les éléments de réduction en A du torseur {T} associé à ce champ de vecteurs.

$\{T\}_A = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} \\ \vec{H}(A) \end{Bmatrix}_A$ avec $\vec{H}(A) = \overrightarrow{AA} \wedge \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}$

11) Déterminer l'axe central du torseur {T}.

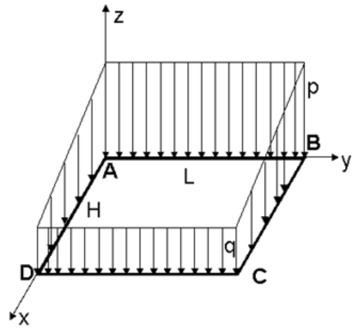
L'axe central du torseur {T} est la droite (Δ) parallèle au vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ et passant par le point I tel que :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) \wedge \vec{H}(A)}{\left\| \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} \right\|^2}$$

Exercice 4

1) Déterminer l'expression de la fonction densité de force $\vec{f}$ pour chaque côté de cette plaque.

$$\vec{f}(M) = \begin{cases} -p\vec{k} & pour\ M \in [AB] \\ -\left(\frac{q-p}{H}x + p\right)\vec{k} & pour\ M \in [AD] \\ -\left(\frac{q-p}{H}x + p\right)\vec{k} & pour\ M \in [BC] \\ -q\vec{k} & pour\ M \in [DC] \end{cases}$$



2) Déterminer les éléments de réduction du torseur $\{T_1\}$ aux points A et C associé à cette densité de force.

$$\vec{R}_1 = \int_{M \in \Omega} \vec{f}(M)\, d\Omega$$

$$= \int_{M \in [AB]} \vec{f}(M)\, d\Omega + \int_{M \in [BC]} \vec{f}(M)\, d\Omega + \int_{M \in [CD]} \vec{f}(M)\, d\Omega + \int_{M \in [DA]} \vec{f}(M)\, d\Omega$$

$$= \int_0^L -p\vec{k}\, dy + \int_0^H -\left(\frac{q-p}{H}x + p\right)\vec{k}\, dx + \int_0^L -q\vec{k}\, dy + \int_0^H -\left(\frac{q-p}{H}x + p\right)\vec{k}\ dx$$

$$= [-py\vec{k}]_0^L + [-\left(\frac{q-p}{H}\frac{x^2}{2} + px\right)\vec{k}\ ]_0^H + [-qy\vec{k}]_0^L + [-\left(\frac{q-p}{H}\frac{x^2}{2} + px\right)\vec{k}\ ]_0^H$$

$$= -pL\vec{k} - \left(\frac{q-p}{H}\frac{H^2}{2} + pH\right)\vec{k} - qL\vec{k} - \left(\frac{q-p}{H}\frac{H^2}{2} + pH\right)\vec{k}$$

$$= -(p+q)L\vec{k} - (q+p)H\vec{k}$$

$$= -(p+q)(L+H)\vec{k}$$

$$\vec{M}_1(A) = \int_{M \in \Omega} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{f}(M)\, d\Omega$$

$$= \int_{M \in [AB]} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{f}(M)\, d\Omega + \int_{M \in [BC]} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{f}(M)\, d\Omega + \int_{M \in [CD]} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{f}(M)\, d\Omega$$

$$+ \int_{M \in [DA]} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{f}(M)\, d\Omega$$

$$= \int_0^L y\vec{j}\ \wedge -p\vec{k}\, dy + \int_0^H (L\vec{j} + x\vec{i})\ \wedge -\left(\frac{q-p}{H}x + p\right)\vec{k}\ dx + \int_0^L (H\vec{i} + y\vec{j})\ \wedge -q\vec{k}\, dy$$

$$+ \int_0^H x\vec{i} \wedge -\left(\frac{q-p}{H}x + p\right)\vec{k}\ dx$$

$$= \int_0^L -yp\vec{\imath}\, dy + \int_0^H -(L\vec{\imath} - x\vec{\jmath}) \left(\frac{q-p}{H}x + p\right) dx + \int_0^L q(H\vec{\jmath} - y\vec{\imath})\, dy$$

$$+ \int_0^H \left(\frac{q-p}{H}x^2 + px\right)\vec{\jmath}\ dx$$

$$= \left[-\frac{py^2}{2}\vec{\imath}\right]_0^L + \left[-L\left(\frac{q-p}{H}\frac{x^2}{2} + px\right)\vec{\imath}\right]_0^H + \left[\left(\frac{q-p}{H}\frac{x^3}{3} + \frac{px^2}{2}\right)\vec{\jmath}\right]_0^H + [qHy\vec{\jmath}]_0^L$$

$$+[-\frac{qy^2}{2}\vec{\imath}]_0^L + [\left(\frac{q-p}{H}\frac{x^3}{3} + \frac{px^2}{2}\right)\vec{\jmath}\ ]_0^H$$

$$= -\frac{pL^2}{2}\vec{\imath} - L\left(\frac{q-p}{H}\frac{H^2}{2} + pH\right)\vec{\imath} + \left(\frac{q-p}{H}\frac{H^3}{3} + \frac{pH^2}{2}\right)\vec{\jmath} + qHL\vec{\jmath} - \frac{qL^2}{2}\vec{\imath} + \left(\frac{q-p}{H}\frac{H^3}{3} + \frac{pH^2}{2}\right)\vec{\jmath}$$

$$= -\frac{q+p}{2}(L^2 + LH)\vec{\imath} + (\frac{2q+p}{3}H^2 + qHL)\vec{\jmath}$$

D'où

$$\{T_1\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{R}_1 \\ \vec{M}_1(A) \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} -(p+q)(L+H)\vec{k} \\ -\frac{q+p}{2}(L^2 + LH)\vec{\imath} + (\frac{2q+p}{3}H^2 + qHL)\vec{\jmath} \end{Bmatrix}_A$$

$$\vec{M}_1(C) = \vec{M}_1(A) + \vec{R}_1 \wedge \overrightarrow{AC}$$

3) Discuter la nature du torseur $\{T_1\}$.

L'invariant scalaire de $\{T_1\}$ est $\mathfrak{I}_1 = \vec{R}_1 . \vec{M}_1(A) = 0$

en plus :

- Si $p \neq -q$ on aura $\vec{R}_1 \neq \vec{0}$ dans ce cas $\{T_1\}$ est un glisseur
- Si $p = -q \neq 0$ on aura $\vec{R}_1 = \vec{0}$ et $\vec{M}_1(A) \neq \vec{0}$ dans ce cas $\{T_1\}$ est un couple
- Si $p = q = 0$ on aura $\vec{R}_1 = \vec{0}$ et $\vec{M}_1(A) = \vec{0}$ dans ce cas $\{T_1\}$ est un torseur nul

4) Supposons que p=q, donner l'expression du torseur $\{T_1\}_A$.

$$\{T_1\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{R}_1 \\ \vec{M}_1(A) \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} -2p(L+H)\vec{k} \\ -p(L^2 + LH)\vec{\imath} + p(H^2 + HL)\vec{\jmath} \end{Bmatrix}_A$$

5) $\{T_2\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{R}_2 \\ \vec{M}_2(A) \end{Bmatrix}_A$

$$= \begin{Bmatrix} \vec{F}_A \\ \vec{M}_{\vec{F}_A}(A) \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} \vec{F}_B \\ \vec{M}_{\vec{F}_B}(A) \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} \vec{F}_C \\ \vec{M}_{\vec{F}_C}(A) \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} \vec{F}_D \\ \vec{M}_{\vec{F}_D}(A) \end{Bmatrix}_A$$

$$= \begin{Bmatrix} \vec{F}_A \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} \vec{F}_B \\ \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}_B \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} \vec{F}_C \\ \overrightarrow{AC} \wedge \vec{F}_C \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} \vec{F}_D \\ \overrightarrow{AD} \wedge \vec{F}_D \end{Bmatrix}_A$$

$$= \begin{Bmatrix} F_{Ax}\vec{\imath} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} F_{By}\vec{\jmath} \\ L\vec{\jmath}\wedge F_{By}\vec{\jmath} \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} F_{Cx}\vec{\imath} \\ (H\vec{\imath} + L\vec{\jmath})\wedge F_{Cx}\vec{\imath} \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} F_{Dy}\vec{\jmath} \\ H\vec{\imath}\wedge F_{By}\vec{\jmath} \end{Bmatrix}_A$$

$$= \begin{Bmatrix} F_{Ax}\vec{\imath} + F_{By}\vec{\jmath} F_{Cx}\vec{\imath} + F_{Dy}\vec{\jmath} \\ \vec{0} + \vec{0} - LF_{Cx}\vec{k} + HF_{By}\vec{k} \end{Bmatrix}_A$$

$$\{T_2\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{R}_2 \\ \vec{M}_2(A) \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} (F_{Ax}+F_{Cx})\vec{\imath} + (F_{Dy} + F_{By})\vec{\jmath} \\ (-LF_{Cx} + HF_{By})\vec{k} \end{Bmatrix}_A$$

6) Dans le cas ou p=q, déterminer les éléments de réduction du torseur $\{T\}_A$ associé à toutes les forces appliquées sur cette plaque.

$$\{T\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}(A) \end{Bmatrix}_A = \{T_1\}_A + \{T_2\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{R}_1 \\ \vec{M}_1(A) \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} \vec{R}_2 \\ \vec{M}_2(A) \end{Bmatrix}_A$$

$$\Rightarrow \ \{T\}_A = \begin{Bmatrix} (F_{Ax}+F_{Cx})\vec{\imath} + (F_{Dy} + F_{By})\vec{\jmath} - 2p(L+H)\vec{k} \\ -p(L^2 + LH)\vec{\imath} + p(H^2 + HL)\vec{\jmath} + (-LF_{Cx} + HF_{By})\vec{k} \end{Bmatrix}_A$$

7) Déterminer la décomposition centrale du torseur $\{T\}$.

$$\{T\}_A = \{G\}_A + \{C\}_A$$

avec

$$\{G\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}(A) - \lambda\vec{R} \end{Bmatrix}_A$$

Et

$$\{C\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \lambda\vec{R} \end{Bmatrix}_A$$

où

$$\lambda = \frac{\Im}{\|\vec{R}\|^2} = \frac{\vec{R}.\vec{M}(A)}{\|\vec{R}\|^2}$$

EX 1

$A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $\vec{M}(O) = \begin{pmatrix}-2\\2(1+\lambda)\\0\end{pmatrix}$; $\vec{M}(A) = \begin{pmatrix}-2\\3+2\lambda\\-3\end{pmatrix}$; $\vec{M}(B) = \begin{pmatrix}-3\\2(1+\lambda)\\2+\lambda\end{pmatrix}$

1) Vérifier l'équiprojectivité de ces moments

$$\left.\begin{aligned}\vec{M}(O)\cdot\vec{OA} &= \begin{pmatrix}-2\\2(1+\lambda)\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = -2\\ \vec{M}(A)\cdot\vec{OA} &= \begin{pmatrix}-2\\3+2\lambda\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = -2\end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{M}(O)\cdot\vec{OA} = \vec{M}(A)\cdot\vec{OA}$$

$$\left.\begin{aligned}\vec{M}(O)\cdot\vec{OB} &= \begin{pmatrix}-2\\2(1+\lambda)\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 2(1+\lambda)\\ \vec{M}(B)\cdot\vec{OB} &= \begin{pmatrix}-3\\2(1+\lambda)\\2+\lambda\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 2(1+\lambda)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{M}(O)\cdot\vec{OB} = \vec{M}(B)\cdot\vec{OB}$$

$$\left.\begin{aligned}\vec{M}(A)\cdot\vec{AB} &= \begin{pmatrix}-2\\3+2\lambda\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = 2+3+2\lambda = 5+2\lambda\\ \vec{M}(B)\cdot\vec{AB} &= \begin{pmatrix}-3\\2(1+\lambda)\\2+\lambda\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = +3+2(1+\lambda) = 5+2\lambda\end{aligned}\right\} \vec{M}(A)\cdot\vec{AB} = \vec{M}(B)\cdot\vec{AB}$$

2) $\vec{M}(O) = \vec{M}(A) + \vec{R}\wedge\vec{AO} \Rightarrow \vec{M}(O) - \vec{M}(A) = \vec{R}\wedge\vec{AO}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}-2\\2(1+\lambda)\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\3+2\lambda\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-Z\\Y\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}Z = 1\\ Y = 3\end{cases}$$

d'autre part $\vec{M}(O) - \vec{M}(B) = \vec{R}\wedge\vec{BO}$

$$\begin{pmatrix}-2\\2(1+\lambda)\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-3\\2(1+\lambda)\\2+\lambda\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1\\0\\-(2+\lambda)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}Z\\0\\-X\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} Z = 1 \\ X = 2+\lambda \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} X = 2+\lambda \\ Y = 3 \\ Z = 1 \end{matrix} \Rightarrow \vec{R} = \begin{pmatrix}2+\lambda\\3\\1\end{pmatrix}$$

3) $C\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ soit $\vec{M}(C) = \begin{pmatrix}M_x\\M_y\\M_z\end{pmatrix}$

$\vec{M}(O)\cdot\vec{OC} = \vec{M}(C)\cdot\vec{OC} \Rightarrow 0 = M_z$

$\vec{M}(A)\cdot\vec{AC} = \vec{M}(C)\cdot\vec{AC} \Rightarrow 2-3 = -M_x + M_z \Rightarrow M_x = 1$

$\vec{M}(B)\cdot\vec{BC} = \vec{M}(C)\cdot\vec{BC} \Rightarrow -(2+2\lambda) + 2+\lambda = -M_y + M_z \Rightarrow M_y = \lambda$

$\Rightarrow \vec{M}(C) = \begin{pmatrix}1\\0\\\lambda\end{pmatrix}$

4) $T(\lambda)$ est un glisseur si $\vec{R} \neq \vec{0}$ et $I = 0$

$I = \vec{R}\cdot\vec{M}(O) = -4 - 2\lambda + 6 + 6\lambda = 4\lambda + 2$

$I = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = -\frac{1}{2}}$

pour $\lambda = -1/2$ on a $\vec{R} = \begin{pmatrix}3/2\\3\\1\end{pmatrix} \neq \vec{0}$

axe central.

l'axe central (Δ) de $\{T\}$ est la droite // à $\vec{R}\begin{pmatrix}3/2\\3\\1\end{pmatrix}$ et passant par I_0 / $\vec{OI_0} = \dfrac{\vec{R}\wedge\vec{M}(O)}{\|\vec{R}\|^2} = \dfrac{4}{49}\begin{pmatrix}-1\\-2\\+11/2\end{pmatrix}$

5) l'axe central est $\parallel$ à $(0,y,z)$ si la résultante $\vec{R}$ l'est aussi

$\vec{R} \parallel (0,y,z) \Rightarrow \vec{R} \perp (0,x) \Rightarrow \vec{R}\cdot\vec{i} = 0 \Rightarrow 2+\lambda = 0$

$\Rightarrow \boxed{\lambda = -2}$

l'axe central est la droite $\parallel \vec{R}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$ et passant par

le point I_0 / $\vec{OI_0} = \dfrac{\vec{R}\wedge\vec{M}(O)}{\|\vec{R}\|^2} = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix}2\\-2\\6\end{pmatrix}$

EX 2

$\vec{M}_t(P) = \begin{pmatrix}1+3y-tz\\-3x+2tz\\2+tx-t^2y\end{pmatrix}$ / $P\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

1) $\vec{M}_t$ est le moment d'un torseur si il est antisymetrique

puisque l'antisymetrie est équivalente à l'équiprojectivité

montrons que $\vec{M}_t$ est équiprojectif.

$\forall$ $P\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $Q\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ posons $\vec{PQ} = \begin{pmatrix}x'-x\\y'-y\\z'-z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\Delta x\\\Delta y\\\Delta z\end{pmatrix}$

il faut que

$\vec{M}_t(P)\cdot\vec{PQ} = \vec{M}_t(Q)\cdot\vec{PQ}$

$\Rightarrow [\vec{M}_t(P) - \vec{M}_t(Q)]\cdot\vec{PQ} = 0 \quad \forall P$ et Q

$\Rightarrow \begin{pmatrix}-3\Delta y + t\Delta z\\3\Delta x - 2t\Delta z\\-t\Delta x + t^2\Delta y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\Delta x\\\Delta y\\\Delta z\end{pmatrix} = 0 \quad \forall P, Q$ donc $\forall \Delta x, \Delta y$ et Δz

$\Rightarrow (t^2 - 2t)\Delta y\,\Delta z = 0 \quad \forall \Delta y$ et $\Delta z \Rightarrow t^2 - 2t = 0$

$\Rightarrow \boxed{t = 0 \text{ ou } t = 2}$

2) <u>pour $t=0$</u> on a $\vec{M}_0(P) = \begin{pmatrix} 1+3y \\ -3x \\ 2 \end{pmatrix}$

\+ Determiner $\vec{R}_0$

$$\vec{M}_0(P) = \vec{M}_0(O) + \vec{R}_0 \wedge \vec{OP}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{M}_0(P) - \vec{M}_0(O) = \vec{R}_0 \wedge \vec{OP}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 3y \\ -3x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (3+Z_0)y - Y_0 z = 0 \\ (3+Z_0)x - X_0 z = 0 \\ X_0 y - Y_0 x = 0 \end{cases} \quad \forall x, y, z$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3+Z_0 = 0 \text{ et } Y_0 = 0 \\ 3+Z_0 = 0 \text{ et } X_0 = 0 \\ X_0 = 0 \text{ et } Y_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_0 = 0 \\ Y_0 = 0 \\ Z_0 = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{R}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

* type du torseur.

$$I = \vec{R}_0 \cdot \vec{M}_0(O) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -6 \neq 0$$

$\Rightarrow \{T_0\}$ n'est pas un torseur élémentaire (ni un glisseur ni un couple).

<u>pour $t=2$</u>

EX3

$\{T_1\}_P = \left\{\begin{matrix}\vec{R_1}\\ \vec{M_1}(P)\end{matrix}\right\}_P$ et $\{T_2\}_P = \left\{\begin{matrix}\vec{R_2}\\ \vec{M_2}(P)\end{matrix}\right\}_P$

$\vec{H}(P) = \vec{R_1} \wedge \vec{M_2}(P) - \vec{R_2} \wedge \vec{M_1}(P)$

1) Montrer que $\vec{H}$ est équiprojectif

$\forall$ P et Q montrons que $\vec{H}(P) \cdot \vec{PQ} = \vec{H}(Q) \cdot \vec{PQ}$

$$\vec{H}(P) \cdot \vec{PQ} = \left(\vec{R_1} \wedge \vec{M_2}(P) - \vec{R_2} \wedge \vec{M_1}(P)\right) \cdot \vec{PQ}$$

$$= \left[\vec{R_1} \wedge \left(\vec{M_2}(Q) + \vec{R_2} \wedge \vec{QP}\right)\right] \cdot \vec{PQ}$$
$$- \left[\vec{R_2} \wedge \left(\vec{M_1}(Q) + \vec{R_1} \wedge \vec{QP}\right)\right] \cdot \vec{PQ}$$

$$= \vec{H}(Q) \cdot \vec{PQ} + \left[\vec{R_1} \wedge (\vec{R_2} \wedge \vec{QP})\right] \cdot \vec{PQ} - \left[\vec{R_2} \wedge (\vec{R_1} \wedge \vec{QP})\right] \cdot \vec{PQ}$$

$$= \quad // \quad + \left[(\vec{R_1} \cdot \vec{PQ})\vec{R_2} - \cancel{(\vec{R_1} \cdot \vec{R_2})}\vec{QP}\right] \cdot \vec{PQ}$$
$$- \left[(\vec{R_2} \cdot \vec{PQ})\vec{R_1} - \cancel{(\vec{R_2} \cdot \vec{R_1})}\vec{QP}\right] \cdot \vec{PQ}$$

$$= (\vec{R_1} \cdot \vec{PQ})(\vec{R_2} \cdot \vec{QP}) - (\vec{R_2} \cdot \vec{PQ})(\vec{R_1} \cdot \vec{QP}) + \vec{H}(Q) \cdot \vec{PQ}$$

$$= (\vec{R_1} \cdot \vec{PQ})(\vec{R_2} \cdot \vec{QP}) - (\vec{R_2} \cdot \vec{QP})(\vec{R_1} \cdot \vec{PQ}) + \vec{H}(Q) \cdot \vec{PQ}$$

$$= (\vec{R_1} \cdot \vec{PQ})(\vec{R_2} \cdot \vec{QP}) - (\vec{R_2} \cdot \vec{QP})(\vec{R_1} \cdot \vec{PQ})$$

$$= 0 + \vec{H}(Q) \cdot \vec{PQ}$$
$$= \vec{H}(Q) \cdot \vec{PQ}$$

2) déterminer $\vec{R}$

$$\vec{H}(P) = \vec{R_1} \wedge \vec{M_2}(P) - \vec{R_2} \wedge \vec{M_1}(P)$$
$$= \vec{R_1} \wedge \left(\vec{M_2}(Q) + \vec{R_2} \wedge \vec{QP}\right) - \vec{R_2} \wedge \left(\vec{M_1}(Q) + \vec{R_1} \wedge \vec{QP}\right)$$
$$= \vec{H}(Q) + \vec{R_1} \wedge (\vec{R_2} \wedge \vec{QP}) - \vec{R_2} \wedge (\vec{R_1} \wedge \vec{QP})$$
$$= \vec{H}(Q) + (\vec{R_1} \cdot \vec{QP})\vec{R_2} - \cancel{(\vec{R_1} \cdot \vec{R_2})\vec{QP}} - (\vec{R_2} \cdot \vec{QP})\vec{R_1} + \cancel{(\vec{R_2} \cdot \vec{R_1})\vec{QP}}$$

$$\Rightarrow \vec{H}(P) = \vec{H}(Q) + (\vec{R_1}\cdot\vec{QP})\vec{R_2} - (\vec{R_2}\cdot\vec{QP})\vec{R_1}$$
$$= \vec{H}(Q) + \vec{QP}\wedge(\vec{R_2}\wedge\vec{R_1})$$
$$= \vec{H}(Q) + (\vec{R_1}\wedge\vec{R_2})\wedge\vec{QP}$$
$$= H(Q) + \vec{R}\wedge\vec{QP} \quad / \quad \vec{R} = \vec{R_1}\wedge\vec{R_2}$$

3) $\{T_3\}\otimes\{T_1\} = \vec{R}\cdot\vec{M_1}(P) + \vec{R_1}\cdot\vec{H}(P)$

$$= (\vec{R_1}\wedge\vec{R_2})\cdot\vec{M_1}(P) + \underbrace{\vec{R_1}\cdot(\vec{R_1}\wedge\vec{M_2}(P))}_{0 \text{ car } \vec{R_1}/\!/\vec{R_1}} - \vec{R_1}\cdot(\vec{R_2}\wedge\vec{M_1}(P))$$

$$= (\vec{M_1}(P), \vec{R_1}, \vec{R_2}) - (\vec{R_1}, \vec{R_2}, \vec{M_1}(P))$$

$\downarrow$ permut. circul.

$$= (\vec{R_1}, \vec{R_2}, \vec{M_1}(P)) - (\vec{R_1}, \vec{R_2}, \vec{M_1}(P))$$
$$= 0$$

4) $\{T_3\}\otimes\{T_2\} = 0$ comme 3)

5) $\{T_3\}$ est un couple $\Leftrightarrow$ $\vec{R} = \vec{0}$ et $\vec{H}(P) \neq \vec{0}$

$\Downarrow$

$\vec{R_1}\wedge\vec{R_2} = \vec{0}$ et $\vec{R_1}\wedge\vec{M_2}(P) + \vec{R_2}\wedge\vec{M_1}(P)$

$\Downarrow$

$\vec{R_1} = \vec{0}$ ou $\vec{R_2} = \vec{0}$ ou $\vec{R_1} /\!/ \vec{R_2}$

6) $\{T_3\}$ est un glisseur $\Leftrightarrow$ $\vec{R} \neq 0$ et $\vec{R}\cdot\vec{H}(P) = 0$

$\Downarrow$

$\vec{R_1} \neq \vec{0}$ et $\vec{R_2} \neq \vec{0}$ et $\vec{R_1} \not/\!/ \vec{R_2}$ et $\vec{R} \perp \vec{H}(P)$ ou $\vec{H}(P) = \vec{0}$

TD PARAMETRAGEE

Exercice1

La figure 1 présente le schéma cinématique d'un régulateur à boules. Le corps 1 est entraîné en un mouvement de rotation uniforme. La force centrifuge exercée sur les boules attachées au point B et B' (les boules ne sont pas représentées ici) entraîne le déplacement horizontale de la pièce 4 sur l'axe (O, $\vec{x}_0$) par l'intermédiaire des leviers 3 et 3' attachés à 4 au point C et C'.

D est un point lié à 4 situé sur l'axe (O, $\vec{x}_0$).

$$\|\overrightarrow{OA}\| = \|\overrightarrow{DC}\| = r$$
$$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BC}\| = L$$

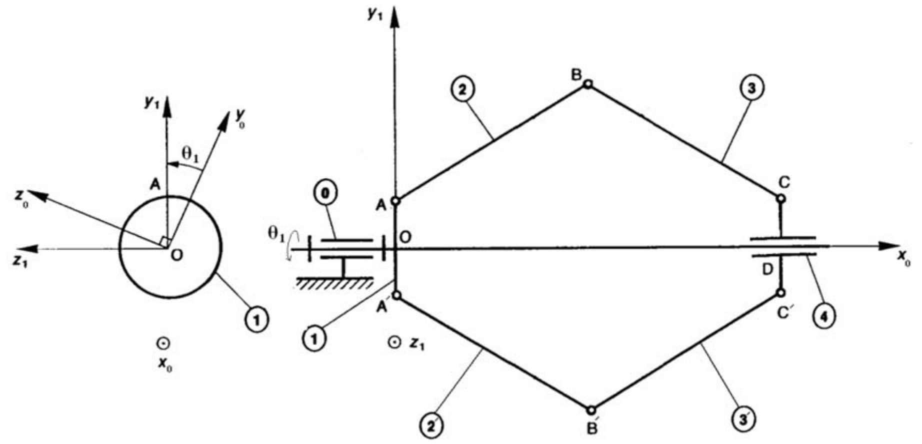


Figure 1

1) Tracer le graphe des liaisons du mécanisme en précisant le type de chaque liaison et son degré de liberté (le système est symétrique, ne considérer que la moitié en haut de (O, $\vec{x}_0$)).
2) Ecrire les différentes relations indépendantes entre les différents paramètres introduits.
3) En déduire le degré de liberté (mobilité) du système.
4) Proposer un paramétrage strict du système.

Exercice 2

Le robot de manutention représenté dans la figure 2 est utilisé pour le déplacement de pièces d'un poste de travail à un autre. Soient :

R_0 (O, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$) repère lié à S_0

R_1 (O, $\vec{x}, \vec{y}_1, \vec{z}_1$) repère lié à S_1 tel que

$(\vec{y}, \widehat{\vec{y}_1}) = \theta_1$

R_2 (A, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$) repère lié à S_2 tel que

$\overrightarrow{OA} = X\vec{x}$

R_3 (B, $\vec{x}, \vec{y}_3, \vec{z}_3$) repère lié à S_3 tel que

$(\vec{y}, \widehat{\vec{y}_3}) = \theta_3$

R_4 (C, $\vec{x}, \vec{y}_4, \vec{z}_4$) repère lié à S_4 tel que

$(\vec{y}, \widehat{\vec{y}_4}) = \theta_4$

AB=L, BC=L_3 et CD=L_4

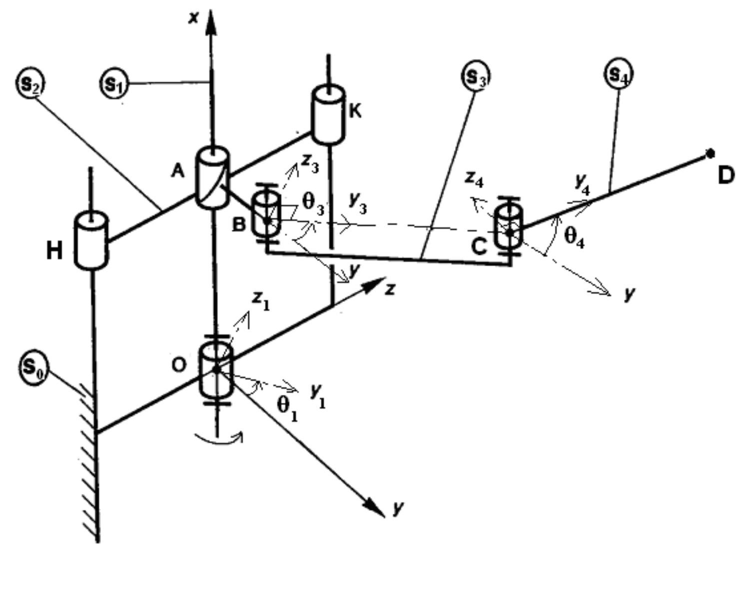


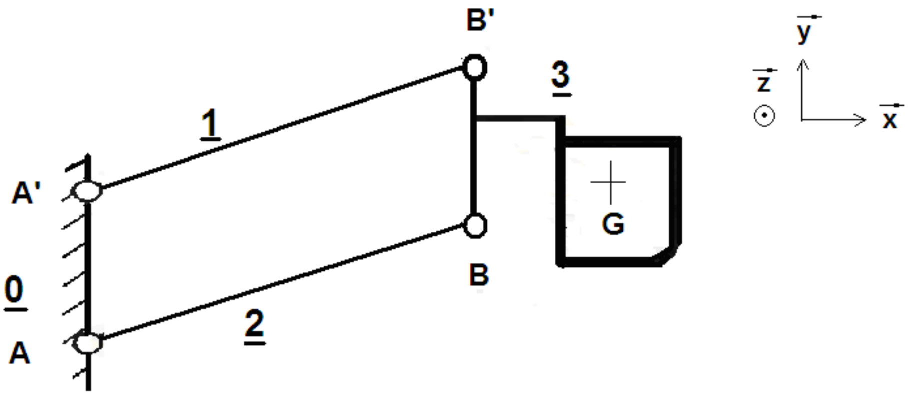
Figure 2

1) Tracer le graphe des liaisons du mécanisme en précisant le type et degré de liberté de chaque liaison.
2) Ecrire le vecteur position du point D par rapport au repère R_0 exprimé dans la base de R_0

3) Déterminer le vecteur vitesse du point D par rapport à R_0
4) Déterminer le vecteur accélération du point D par rapport à R_0

Exercice 3

On considère le mécanisme plan de la figure (1) ci-dessous.



AB=A'B'=a

AA'=BB'=b

$\overrightarrow{BG} = L\vec{x} + H\vec{y}$

avec a, b, L, H sont des constantes positives

Figure 1

1) Tracer le graphe des liaisons du mécanisme en précisant le type de chaque liaison et son degré de liberté
2) Paramétrer le système en justifiant votre choix .
3) Déterminer le degré de liberté **(m)** du système et déduire un paramétrage strict du mécanisme en justifiant votre réponse
4) Ecrire les coordonnées (X_G, Y_G, Z_G) du vecteur position du point G par rapport au repère (R_0) exprimé dans le repère (R_0)
5) En déduire la trajectoire du point G dans (R_0). Dessiner sur la figure (1) cette trajectoire
6) Déduire les mouvements possibles de (S_3) par rapport à (S_0) et déterminer le degré de liberté **($d_{3\text{-}0}$)** de la liaison équivalente entre (S_3) et (S_0)
7) Déterminer le vecteur vitesse $\vec{V}(G/R_0)$ du point G par rapport à R_0
8) Déterminer le vecteur accélération $\vec{\gamma}(G/R_0)$ du point G par rapport à R_0

Exercice 4

La figure (2) présente le schéma cinématique d'un mécanisme à disque excentrique utilisé pour commander l'ouverture et la fermeture des orifices d'admission et d'échappement d'un moteur à combustion interne. L'excentrique (1), en rotation autour de (O,z), pousse le culbuteur (2) dont la rotation autour de B pousse la tige (3) vers la gauche. La translation de la tige (3) vers la gauche fait tourner le poussoir (4) qui pousse à son tour par son extrémité au point G la soupape (5) et implique l'ouverture de l'orifice des gaz. Le ressort de rappel monté sur la soupape permet la fermeture de l'orifice.

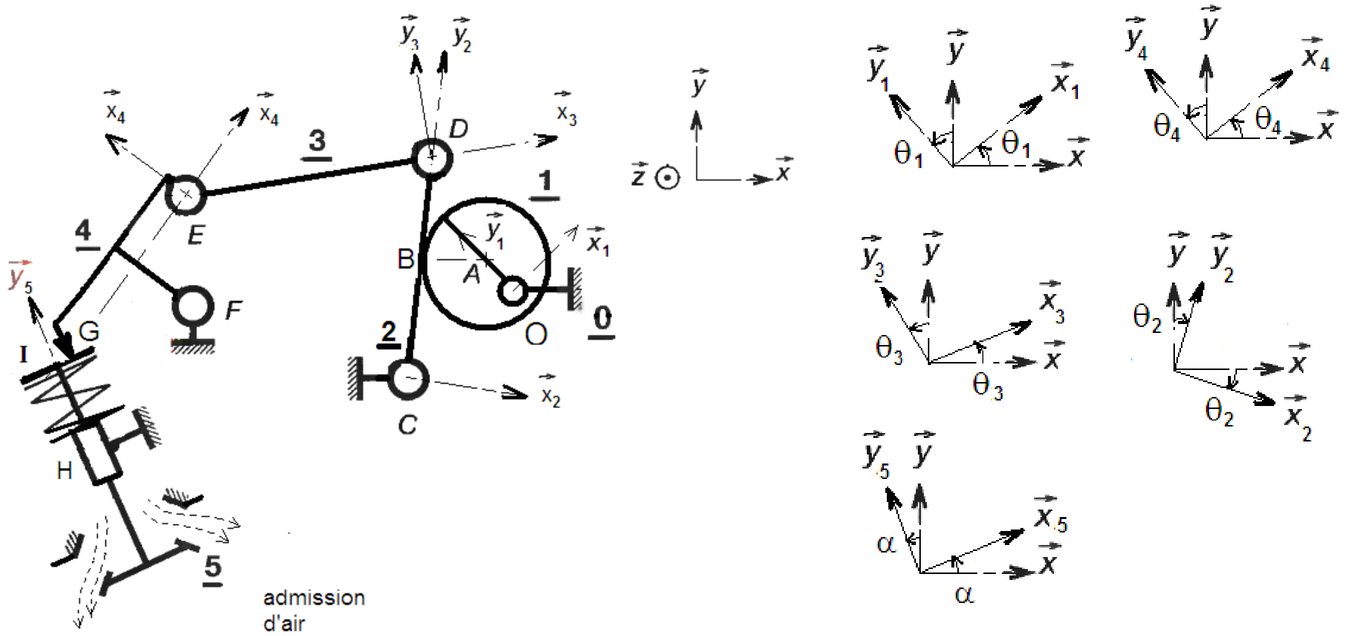


Figure 2

$R_0 (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ repère lié à S_0

$R_1 (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ repère lié à S_1 tel que $(\vec{x}, \hat{\vec{x}_1}) = (\vec{y}, \hat{\vec{y}_1}) = \theta_1$

$R_2 (C, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$ repère lié à S_2 tel que $\overrightarrow{OC} = -a\vec{x} - b\vec{y}$ et $(\vec{x}, \hat{\vec{x}_2}) = (\vec{y}, \hat{\vec{y}_2}) = \theta_2$

$R_3 (D, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z})$ repère lié à S_3 tel que $\overrightarrow{CD} = l_2 \vec{y}_2$ et $(\vec{x}, \hat{\vec{x}_3}) = (\vec{y}, \hat{\vec{y}_3}) = \theta_3$

$R_4 (F, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z})$ repère lié à S_4 tel que $\overrightarrow{CF} = -c\vec{x} + d\vec{y}$ et $(\vec{x}, \hat{\vec{x}_4}) = (\vec{y}, \hat{\vec{y}_4}) = \theta_4$

$R_5 (I, \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z})$ repère lié à S_5 tel que $\overrightarrow{HI} = Y\vec{y}_5$ *et* $\overrightarrow{IG} = X\vec{x}_5$ et $(\vec{x}, \hat{\vec{x}_5}) = (\vec{y}, \hat{\vec{y}_5}) = \alpha = 30°$

On pose : $OA=e$, $AB=r$, $\overrightarrow{CB} = y_B \vec{y}_2$, $DE=l_3$, $\overrightarrow{HF} = a'\vec{x} + b'\vec{y}$, $\overrightarrow{FE} = l\vec{x}_4 + h\vec{y}_4$ et $\overrightarrow{FG} = -l\vec{x}_4 + h\vec{y}_4$

avec *a, b, l_2, c, d, e, r, l_3, l, h, a' et b'* sont des constantes positives

QUESTIONS

1) Tracer le graphe des liaisons du mécanisme en précisant le type de chaque liaison et son degré de liberté
2) Déterminer les relations indépendantes entre les différents paramètres de ce mécanisme
3) En déduire le nombre de degrés de liberté (m) de ce mécanisme
4) Proposer un paramétrage strict pour ce mécanisme
5) Déterminer la loi Entrée sortie du sous-système $\{S_0, S_4, S_5\}$ reliant la translation Y de (S_5) à la rotation θ_4 de S_4

Exercice N°5

On considère le schéma cinématique plan d'une pompe à piston de la figure ci-dessous.

La rotation de la manivelle (S_2) entraîne, par l'intermédiaire de la pièce (S_3), la tige (S_1) en rotation alternative de part et d'autre de l'axe (o). Le mouvement de (S_1) est transformé en un mouvement de translation alternative (mouvement de pompage) de (S_5) par l'intermédiaire des pièces (S_4).

On donne OA=L, AB=r et OE=h

1) Tracer le graphe des liaisons
2) Paramétrer ce mécanisme
3) Déterminer les relations indépendantes entre les paramètres
4) Déterminer le nombre de degrés de liberté du mécanisme
5) En déduire un paramétrage strict de ce mécanisme
6) Déterminer la loi Entrée-sortie de ce mécanisme

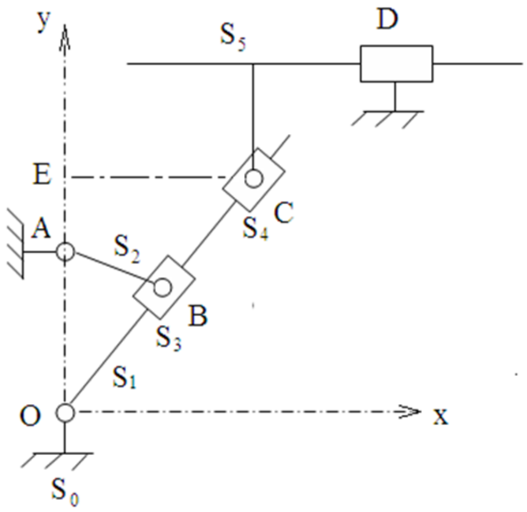


Figure 5

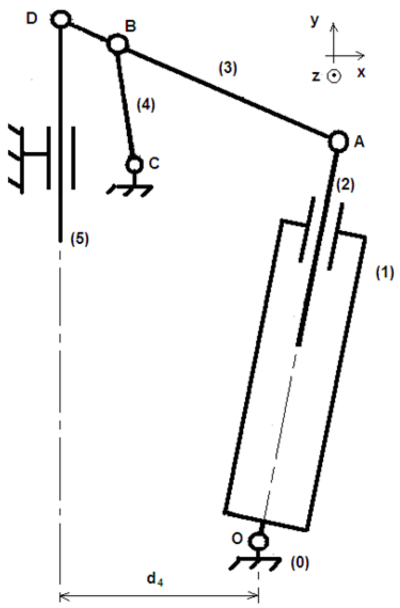
Exercice 1

La figure 1.a présente le schéma cinématique d'une presse mécanique représentée dans la figure 1.b.
L'entrée de l'huile sous pression dans le cylindre (1) du vérin déplace son piston (2). Le piston pousse la biellette (3) qui bascule autour du point B pour pousser à son tour le poinçon (5) de la presse.

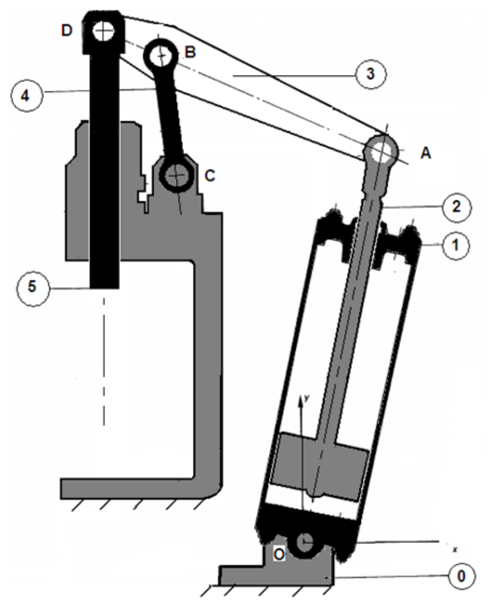
On donne:

$\overrightarrow{OC} = -a\vec{x} + b\vec{y}$, AB=$d_1$, AD=$d_2$, BC=$d_3$, $\overrightarrow{OD}.\vec{x} = -d_4$

où a, b, d_1, d_2, d_3 et d_4 sont des constantes positives



a.



b.

Figure n°1

1. Tracer le graphe des liaisons du mécanisme en précisant le type de chaque liaison et son degré de liberté.
2. Paramétrer le système en justifiant votre choix (utiliser la figure n°1.a).
3. Déterminer les relations indépendantes entre les différents paramètres de ce mécanisme.
4. En déduire le nombre de degrés de liberté (m) de ce mécanisme.
5. Proposer un paramétrage strict pour ce mécanisme.

Exercice 2

1. Tracer le graphe des liaisons du mécanisme de la figure n°2 en précisant le type de chaque liaison et son degré de liberté.

   On donne *AB*= *l*.

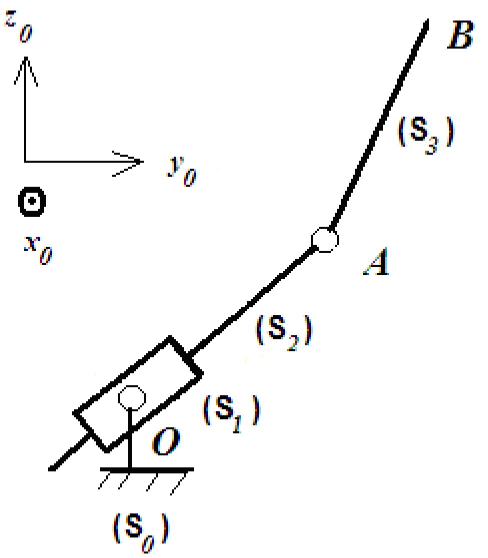


Figure n°2

2. Paramétrer le système en justifiant votre choix (utiliser la figure n°2).
3. Déterminer le degré de liberté **(m)** du système.
4. Ecrire les coordonnées (X_B, Y_B, Z_B) du vecteur position du point B par rapport au repère (R_0).
5. Déterminer le vecteur vitesse $\vec{V}(B/R_0)$ du point B par rapport au repère (R_0).
6. Déterminer le vecteur accélération $\vec{\gamma}(B/R_0)$ du point B par rapport au repère (R_0).

Correction
TDs Paramétrage

Exercice n°1

1) Tracer le graphe des liaisons du mécanisme en précisant le type de chaque liaison et son degré de liberté (le système est symétrique, ne considérer que la moitié en haut de (O, $\vec{x}_0$)).

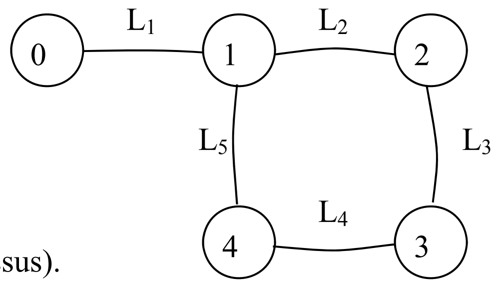
L_1 : liaison pivot d'axe (O, $\vec{x}_0$)

L_2 : liaison pivot d'axe (A, $\vec{z}_1$)

L_3 : liaison pivot d'axe (B, $\vec{z}_1$)

L_4 : liaison pivot d'axe (C, $\vec{z}_1$)

L_5 : liaison pivot glissant d'axe (D, $\vec{x}_0$)



2) Paramétrer le système (utiliser la figure 1 ci-dessus).

R_0 (O, $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$) repère lié à S_0

R_1 (O, $\vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1$) repère lié à S_1 tel que $(\widehat{\vec{y}_0, \vec{y}_1}) = \theta_1$

R_2 (A, $\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_1$) repère lié à S_2 tel que $(\widehat{\vec{x}_0, \vec{x}_2}) = \theta_2$

R_3 (B, $\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_1$) repère lié à S_3 tel que $(\widehat{\vec{x}_0, \vec{x}_3}) = \theta_3$

R_4 (D, $\vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1$) repère lié à S_4 tel que $\overrightarrow{OD} = x\vec{x}_0$

3) Ecrire les différentes relations indépendantes entre les différents paramètres introduits.

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DO} = \vec{0}$$

$$r\vec{y}_1 + L\vec{x}_2 + L\vec{x}_3 - r\vec{y}_1 - x\vec{x}_0 = \vec{0}$$

$$\begin{cases} L\cos\theta_2 + L\cos\theta_3 - x = 0 \\ L\sin\theta_2 + L\sin\theta_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = L\cos\theta_2 + L\cos\theta_3 \\ \theta_3 = -\theta_2 \end{cases}$$

4) En déduire le degré de liberté du système.

On a introduits 4 paramètres liés par 2 relations d'où 4-2=2 degrés des liberté

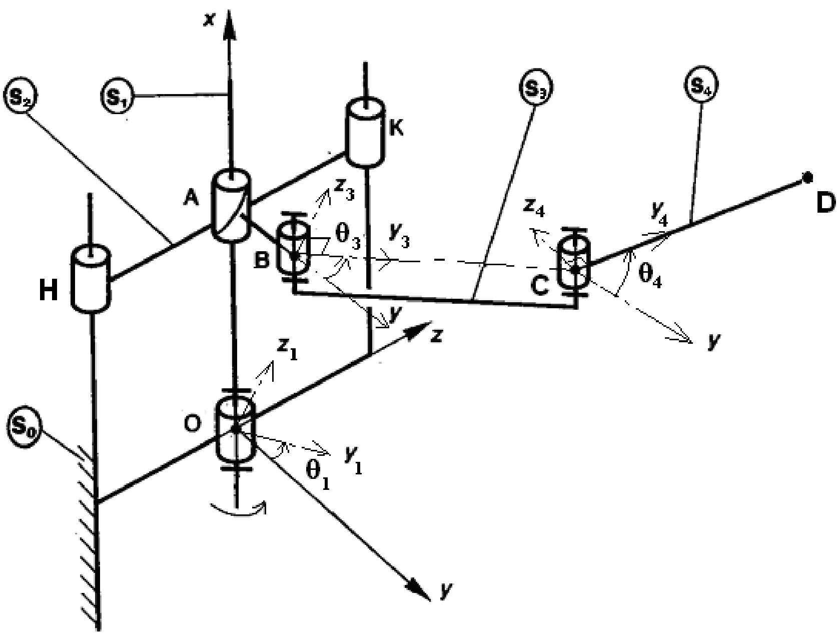
5) Proposer un paramétrage strict du système.

D'après la question précédente 2 paramètres suffisent pour ce système (θ_1, θ_2) ou (θ_1, θ_3) ou (θ_1, x) θ_1 doit figurer obligatoirement dans le paramétrage strict car aucune relation ne permettra de le déduire

Exercice 2

1) Tracer le graphe des liaisons du mécanisme en précisant le type de chaque liaison et son degré de liberté.

L_1 : liaison pivot d'axe (O, $\vec{x}$)
L_2 : liaison hélicoïdale d'axe (O, $\vec{x}$)
L_3 : liaison pivot glissant d'axe (H, $\vec{x}$)
L_4 : liaison pivot glissant d'axe (K, $\vec{x}$)
L_5 : liaison pivot d'axe (B, $\vec{x}$)
L_5 : liaison pivot d'axe (C, $\vec{x}$)



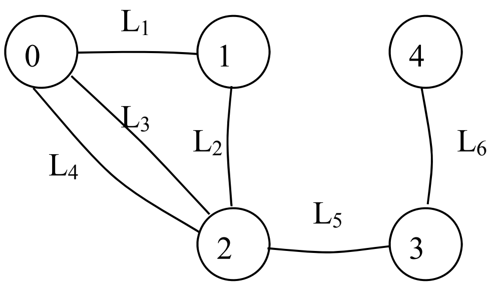


Figure 2

2) Ecrire le vecteur position du point D par rapport au repère R_0 exprimé dans la base de R_0

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$$

$$\overrightarrow{OD} = X\vec{x} + L\vec{y} + L_3\vec{y}_3 + L_4\vec{y}_4$$

$$\overrightarrow{OD} = X\vec{x} + L\vec{y} + L_3(\cos\theta_3\vec{y} + \sin\theta_3\vec{z}) + L_4(\cos\theta_4\vec{y} + \sin\theta_4\vec{z})$$

$$\overrightarrow{OD} = X\vec{x} + (L + L_3\cos\theta_3 + L_4\cos\theta_4)\vec{y} + (L_3\sin\theta_3 + L_4\sin\theta_4)\vec{z}$$

3) Déterminer le vecteur vitesse du point D par rapport à R_0

$$\vec{V}(D/R_0) = \left(\frac{d\overrightarrow{OD}}{dt}\right)_{/R_0}$$

$$\vec{V}(D/R_0) = \dot{X}\vec{x} - (L_3\dot{\theta}_3\sin\theta_3 + L_4\dot{\theta}_4\sin\theta_4)\vec{y} + (L_3\dot{\theta}_3\cos\theta_3 + L_4\dot{\theta}_4\cos\theta_4)\vec{z}$$

4) Déterminer le vecteur accélération du point D par rapport à R_0

$$\vec{\gamma}(D/R_0) = \left(\frac{d\vec{V}(D/R_0)}{dt}\right)_{/R_0}$$

$$\vec{\gamma}(D/R_0) = \ddot{X}\vec{x} - (L_3\ddot{\theta}_3\sin\theta_3 + L_4\ddot{\theta}_4\sin\theta_4)\vec{y} + (L_3\ddot{\theta}_3\cos\theta_3 + L_4\ddot{\theta}_4\cos\theta_4)\vec{z}$$
$$- (L_3\dot{\theta}_3^2\cos\theta_3 + L_4\dot{\theta}_4^2\cos\theta_4)\vec{y} - (L_3\dot{\theta}_3^2\sin\theta_3 + L_4\dot{\theta}_4^2\sin\theta_4)\vec{z}$$

Exercice 3

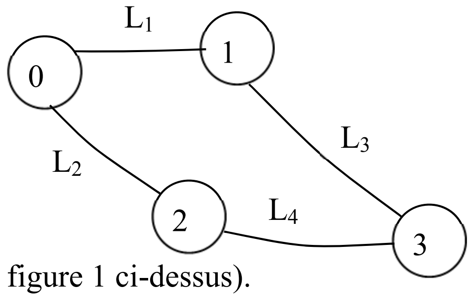
1) Tracer le graphe des liaisons du mécanisme en précisant le type de chaque liaison et son degré de liberté

L_1 : liaison pivot d'axe (A', $\vec{z}$)

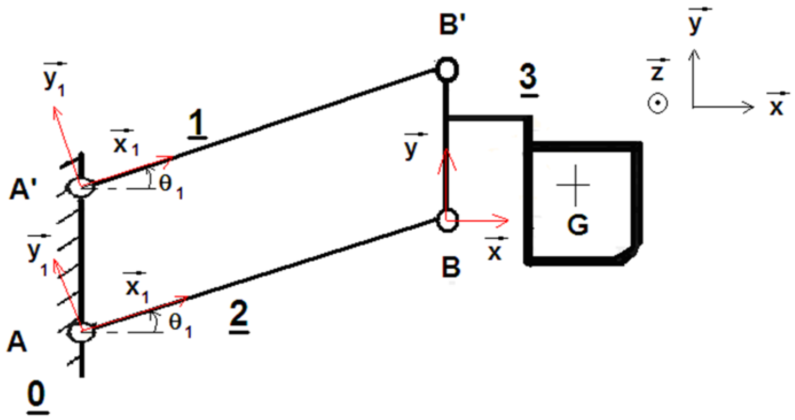
L_2 : liaison pivot d'axe (A, $\vec{z}$)

L_3 : liaison pivot d'axe (B', $\vec{z}$)

L_4: liaison pivot d'axe (B, $\vec{z}$)



2) Paramétrer le système en justifiant votre choix (utiliser la figure 1 ci-dessus).



R_0 (A, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$) repère lié à S_0

R_1 (A', $\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}$) repère lié à S_1 tel que $\overrightarrow{AA'} = b\vec{y}$ $(\widehat{\vec{x}, \vec{x}_1}) = (\widehat{\vec{y}, \vec{y}_1}) = \theta_1$

R_2 (A, $\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}$) repère lié à S_2 car (AB)reste toujours //(A'B') $\Rightarrow S_2$ ne tourne pas % $S_1 \Rightarrow$ la base ($\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}$) est lié aussi à S_3

R_3 (B, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$) repère lié à S_3 tel que $\overrightarrow{AB} = a\vec{x}_1$

car (BB')reste toujours //(AA') $\Rightarrow S_3$ ne tourne pas % $S_0 \Rightarrow$ la base ($\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$) est lié aussi à S_3

3) Déterminer le degré de mobilité m du système et déduire un paramétrage strict du mécanisme en justifiant votre réponse

Le paramètre θ_1 constitue un paramètre indépendant et il est suffisant pour positionner les différents solides (repères) de ce système c'est-à-dire positionner les différents vecteurs et origines des repères liés aux solides. D'où m=1 et $\{\theta_1\}$ est un paramétrage strict de ce mécanisme.

4) Ecrire les coordonnées (X_G, Y_G, Z_G) du vecteur position du point G par rapport au repère (R_0) exprimé dans le repère (**R_0**)

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}$$

$$\overrightarrow{AG} = a\vec{x}_1 + L\vec{x} + H\vec{y}$$

$$\overrightarrow{AG} = a(\cos\theta_1 \vec{x} + \sin\theta_1 \vec{y}) + L\vec{x} + H\vec{y}$$

$$\overrightarrow{AG} = (L + a\cos\theta_1)\vec{x} + (H + a\sin\theta_1)\vec{y}$$

5) En déduire la trajectoire du point G dans (R_0). Dessiner sur la figure (1) ci-dessus cette trajectoire

On a : $(X_G - L)^2 + (Y_G - H)^2 = (a\cos\theta_1)^2 + (a\sin\theta_1)^2 = a^2$

D'où on peut conclure que la trajectoire du point G dans le repère (R_0) est un cercle de centre le point $C\begin{pmatrix} L \\ H \\ 0 \end{pmatrix}$ **et de rayon a**

6) Déduire les mouvements possibles de (S_3) par rapport à (S_0) et déterminer le degré de liberté **(d_{3-0})** de la liaison équivalente entre (S_3) et (S_0)

Le solide (S_3) peut faire de translation par rapport à (S_0) et aucune rotation n'est possible. En plus, d'après l'expression du vecteur position du point G ces deux translations sont conjuguées. D'où on conclut que d_{3-0}=1.

7) Déterminer le vecteur vitesse $\vec{V}(G/R_0)$ du point G par rapport à R_0

$$\vec{V}(G/R_0) = \left.\frac{d\,\overrightarrow{AG}}{dt}\right|_{/R_0} = a\dot{\theta}_1(-\sin\theta_1\vec{x} + \cos\theta_1\vec{y})$$

8) Déterminer le vecteur accélération $\vec{\gamma}(G/R_0)$ du point G par rapport à R_0

$$\vec{\gamma}(G/R_0) = \left.\frac{d\vec{V}(G/R_0)}{dt}\right|_{/R_0} = a\ddot{\theta}_1(-\sin\theta_1\vec{x} + \cos\theta_1\vec{y}) - a\dot{\theta}_1^{\,2}(\cos\theta_1\vec{x} + \sin\theta_1\vec{y})$$

Exercice 4

1) Tracer le graphe des liaisons du mécanisme en précisant le type de chaque liaison et son degré de liberté

L_1 : liaison pivot d'axe (O, $\vec{z}$)

L_2 : liaison ponctuelle de normale (B, $\vec{x}_2$)

L_3 : liaison pivot d'axe (C, $\vec{z}$)

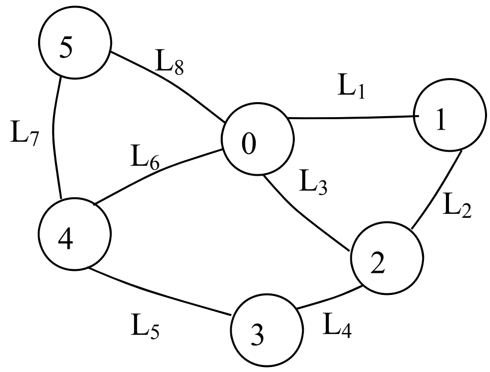
L_4: liaison pivot d'axe (D, $\vec{z}$)

L_5: liaison pivot d'axe (E, $\vec{z}$)

L_6: liaison pivot d'axe (F, $\vec{z}$)

L_7: liaison ponctuelle de normale (G, $\vec{y}_5$)

L_8: liaison glissière d'axe (I, $\vec{y}_5$)



2) Déterminer les relations indépendantes entre les différents paramètres de ce mécanisme

On distingue 3 chaînes continues fermées indépendantes sui sont {0, 1, 2} , {0, 2, 3, 4} et {0, 4,5}

Appliquons la condition de fermeture géométrique :

- **pour la chaîne {0, 1, 2} :**

$$\overrightarrow{OO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CO} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{0} + e\vec{y}_1 + R\vec{x}_2 - y_B\vec{y}_2 + a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0}$$

En projetant dans la base ($\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$) on obtient :

$$e\begin{pmatrix} -\sin\theta_1 \\ \cos\theta_1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} \cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 \\ 0 \end{pmatrix} - y_B\begin{pmatrix} -\sin\theta_2 \\ \cos\theta_2 \\ 0 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\begin{cases} -e\sin\theta_1 + r\cos\theta_2 + y_B\sin\theta_2 + a = 0 \quad (eq.1) \\ e\cos\theta_1 + r\sin\theta_2 - y_B\cos\theta_2 + b = 0 \quad (eq.2) \end{cases}$$

- **pour la chaîne {0, 2, 3, 4} :**

$$\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FC} = \vec{0} \Rightarrow l_2\vec{y}_2 - l_3\vec{x}_3 - l_4\vec{x}_4 - l_5\vec{y}_4 + c\vec{x} + d\vec{y} = \vec{0}$$

En projetant dans la base ($\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$) on obtient :

$$l_2\begin{pmatrix} -\sin\theta_2 \\ \cos\theta_2 \\ 0 \end{pmatrix} - l_3\begin{pmatrix} \cos\theta_3 \\ \sin\theta_3 \\ 0 \end{pmatrix} - l\begin{pmatrix} \cos\theta_4 \\ \sin\theta_4 \\ 0 \end{pmatrix} - h\begin{pmatrix} -\sin\theta_4 \\ \cos\theta_4 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -l_2\sin\theta_2 - l_3\cos\theta_3 - l\cos\theta_4 + h\sin\theta_4 + c = 0 \quad (eq3) \\ l_2\cos\theta_2 - l_3\sin\theta_3 - l\sin\theta_4 - h\cos\theta_4 + d = 0 \quad (eq.4) \end{cases}$$

- **pour la chaîne {0, 4, 5} :**

$$\overrightarrow{FI} + \overrightarrow{IH} + \overrightarrow{HF} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IH} + \overrightarrow{HF} = \vec{0} \Rightarrow -l\vec{x}_4 + h\vec{y}_4 - X\vec{x}_5 - Y\vec{y}_5 + a'\vec{x} + b'\vec{y} = \vec{0}$$

En projetant dans la base ($\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$) on obtient :

$$l\begin{pmatrix} \cos\theta_4 \\ \sin\theta_4 \\ 0 \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} -\sin\theta_4 \\ \cos\theta_4 \\ 0 \end{pmatrix} - X\begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} + a'\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b'\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} l\cos\theta_4 - h\sin\theta_4 - X\cos\alpha + Y\sin\alpha + a' = 0 \quad (eq.5) \\ l\sin\theta_4 + h\cos\theta_4 - X\sin\alpha - Y\cos\alpha + b' = 0 \quad (eq.6) \end{cases}$$

En conclusion, on a obtenu 6 équations indépendantes qui relient les 7 paramètres { $\theta_1, x_B, \theta_2, \theta_3, \theta_4, X, Y$ **}**

3) En déduire le nombre de degrés de liberté (m) de ce mécanisme

m=7-6=1

4) Proposer un paramétrage strict pour ce mécanisme

{ θ_1 } **constitue un paramétrage strict de ce mécanisme**

5) Déterminer la loi Entrée sortie du sous-système {S_0, S_4, S_5} reliant la translation Y de (S_5) à la rotation θ_4 de S_4

Le mouvement d'entrée est la rotation de (S_4) $\Rightarrow$ le paramètre d'entrée est donc θ_4
Le mouvement de sortie est la translation de (S_5) $\Rightarrow$ le paramètre de sortie est donc Y
La loi entrée-sortie est donc la relation qui relie Y à θ_4
En faisant $\sin\alpha.(eq.5) - \cos\alpha.(eq.6)$ **on obtient :**

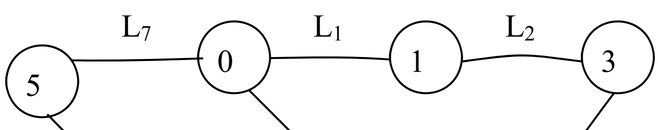
$$(l\sin\alpha - h\cos\alpha)\cos\theta_4 - (l\cos\alpha + h\sin\alpha)\cos\theta_4 + Y + a' - b' = 0$$

D'où la loi entrée sortie de ce sous système est

$$\boxed{Y = (l\cos\alpha + h\sin\alpha)\cos\theta_4 - (l\sin\alpha - h\cos\alpha)\cos\theta_4 - a' + b'}$$

Exercice N°5

1. Déterminer le graphe des liaisons de ce mécanisme



L_1 : liaison pivot d'axe $(A, \vec{z})$ (1ddl)

L_2 : liaison pivot d'axe $(B, \vec{z})$ (1ddl)

L_3 : liaison glissière d'axe $(B, \vec{x}_2)$ (1ddl)

L_4 : liaison pivot d'axe $(O, \vec{z})$ (1ddl)

L_5: liaison glissière d'axe $(C, \vec{x}_2)$ (1ddl)

L_6 : liaison pivot d'axe $(C, \vec{z})$ (1ddl)

L_7 : liaison glissière d'axe $(C, \vec{x})$ (1ddl)

2.

Soient :

R_0 $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ repère lié à (S_0)

R_1 $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ repère lié à (S_1) tel que

$\overrightarrow{OA} = L\vec{y}$ et $(\vec{x}, \widehat{\vec{x}_1}) = \theta_1$

R_2 $(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$ repère lié à (S_2) tel que

$(\vec{x}, \widehat{\vec{x}_2}) = \theta_2$

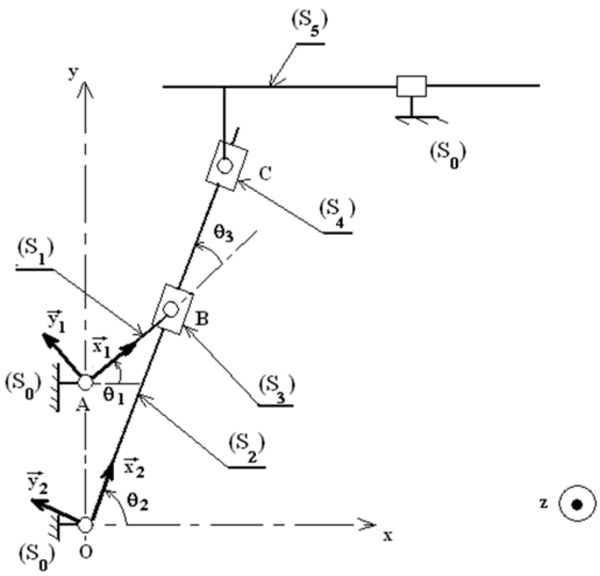
R_3 $(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$ repère lié à S_3 tel que

$\overrightarrow{OB} = x_{2B}\vec{x}_2$

R_4 $(C, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$ repère lié à S_4 tel que

$\overrightarrow{OC} = x_{2C}\vec{x}_2 = h\vec{y} + x_C\vec{x}$

R_5 $(C, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ repère lié à S_5



3. Ecrire les différentes relations indépendantes entre les différents paramètres introduits et déduire l'équation de x_C en fonction de θ_1.

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \vec{0}$$

$$L\vec{y} + r\vec{x}_1 - x_{2B}\vec{x}_2 = \vec{0}$$

$$\begin{cases} r\cos\theta_1 - x_{2B}\cos\theta_2 = 0 \\ L + r\sin\theta_1 - x_{2B}\sin\theta_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} tg\theta_2 = \dfrac{L + r\sin\theta_1}{r\cos\theta_1} \\ x_{2B} = \pm\sqrt{r^2\cos^2\theta_1 + (L + r\sin\theta_1)^2} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CO} = \vec{0}$$

$$x_{2C}\vec{x}_2 - x_C\vec{x} - h\vec{y} = \vec{0}$$

$$\begin{cases} x_{2C}\cos\theta_2 = x_C \\ x_{2C}\sin\theta_2 = h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} tg\theta_2 = \dfrac{h}{x_C} = \dfrac{L + r\sin\theta_1}{r\cos\theta_1} \\ x_{2C} = \pm\sqrt{h^2 + x_C{}^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = \dfrac{hr\cos\theta_1}{L + r\sin\theta_1} \\ x_{2C} = \pm\sqrt{h^2 + x_C{}^2} \end{cases}$$

4. Déterminer le nombre de degrés de liberté du mécanisme

On a introduits 5 paramètres liés par 4 relations d'où 5-4=1 degré des liberté

5. En déduire un paramétrage strict de ce mécanisme

D'après la question précédente 1 paramètre suffit pour ce système. En effet tout les paramètres peuvent être écrit en fonction de θ_1

6. Déterminer la loi Entrée-sortie de ce mécanisme

   Le mouvement d'entrée est la rotation de (S_1) $\Rightarrow$ le paramètre d'entrée est donc θ_1

   Le mouvement de sortie est la translation de (S_5) $\Rightarrow$ le paramètre de sortie est donc x_C

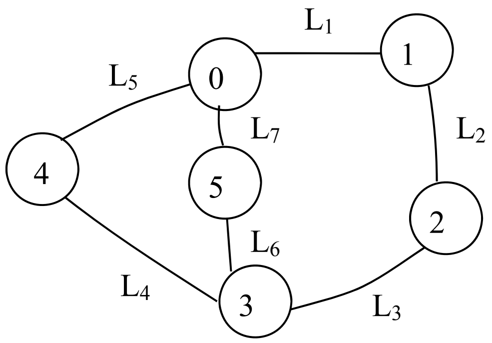
7. **La loi entrée-sortie est donc la relation qui relie x_C à θ_1**

   D'où la loi entrée sortie de ce sous système est

Exercice 6

1. **Tracer le graphe des liaisons du mécanisme en précisant le type de chaque liaison et son degré de liberté .**

Liaisons	d.
L_1 : liaison pivot d'axe $(O, \vec{z})$	**1**
L_2 : liaison pivot glissant d'axe (OA)	**2**
L_3: liaison pivot d'axe $(A, \vec{z})$	**1**
L_4: liaison pivot d'axe $(B, \vec{z})$	**1**
L_5: liaison pivot d'axe $(C, \vec{z})$	**1**
L_6: liaison pivot d'axe $(D, \vec{z})$	**1**
L_7: liaison pivot glissant d'axe $(D, \vec{y})$	**2**



Paramétrer le système en justifiant votre choix (utiliser la figure n°1).

Soient :

R_0 $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ repère lié à (0)

R_1 $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ repère lié à (1) tel que $(\widehat{\vec{x}, \vec{x}_1}) = \theta_1$

R_2 $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ repère lié à (2) tel que $\overrightarrow{OA} = x_A \vec{x}_1$

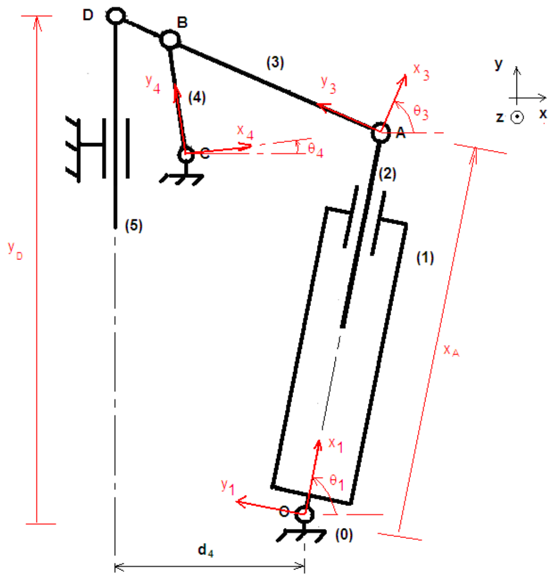
R_3 $(A, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z})$ repère lié à (3) tel que $(\widehat{\vec{x}, \vec{x}_3}) = \theta_3$

R_4 $(C, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z})$ repère lié à (4) tel que $(\widehat{\vec{x}, \vec{x}_4}) = \theta_4$

et $\overrightarrow{OC} = -a\vec{x} + b\vec{y}$

R_5 $(D, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ repère lié à (5) tel que

$\overrightarrow{OD} = -d_4 \vec{x} + y_D \vec{y}$



2. **Déterminer les relations indépendantes entre les différents paramètres de ce mécanisme.**

On distingue 2 chaînes continues fermées indépendantes qui sont {0, 1, 2, 3, 5} et {0, 4, 3, 5}
Appliquons la condition de fermeture géométrique :

- pour la chaîne {0, 1, 2, 3, 4} :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow x_A \vec{x}_1 + d_1 \vec{y}_3 - d_3 \vec{y}_4 + a\vec{x} - b\vec{y} = \vec{0}$$

En projetant dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ on obtient :

$$x_A\begin{pmatrix}\cos\theta_1\\ \sin\theta_1\\ 0\end{pmatrix}+d_1\begin{pmatrix}-\sin\theta_3\\ \cos\theta_3\\ 0\end{pmatrix}-d_3\begin{pmatrix}-\sin\theta_4\\ \cos\theta_4\\ 0\end{pmatrix}+a\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-b\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

D'où :

$$\begin{cases} x_A\cos\theta_1-d_1\sin\theta_3+d_3\sin\theta_4+a=0 & (eq.1)\\ x_A\sin\theta_1+d_1\cos\theta_3-d_3\cos\theta_4-b=0 & (eq.2)\end{cases}$$

- pour la chaîne {0, 4, 3, 5} :

$$\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DO}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow -a\vec{x}+b\vec{y}+d_3\vec{y}_4+(d_2-d_1)\vec{y}_3+d_4\vec{x}-y_D\vec{y}=\vec{0}$$

En projetant dans la base ($\vec{x},\vec{y},\vec{z}$) on obtient :

$$-a\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+d_3\begin{pmatrix}-\sin\theta_4\\ \cos\theta_4\\ 0\end{pmatrix}+(d_2-d_1)\begin{pmatrix}-\sin\theta_3\\ \cos\theta_3\\ 0\end{pmatrix}+d_4\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-y_D\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} -a-d_3\sin\theta_4-(d_2-d_1)\sin\theta_3+d_4=0 & (eq3)\\ b+d_3\cos\theta_4+(d_2-d_1)\cos\theta_3-y_D=0 & (eq.4)\end{cases}$$

3. **En déduire le nombre de degrés de liberté (m) de ce mécanisme.**

On a 4 équations indépendantes qui relient les 5 paramètres $\{\theta_1, x_A, \theta_3, \theta_4, y_D\}$
d'où m=5-4

m=1

4. **Proposer un paramétrage strict pour ce mécanisme.**

m=1 d'où un seul paramètre suffit pour construire un paramétrage strict.
Puisque le mouvement d'entrée au mécanisme est la translation du piston (2) paramétré par la variable x_A on choisira $\{x_A\}$

Exercice 7

1. **Tracer le graphe des liaisons du mécanisme de la figure n°1 en précisant le type de chaque liaison et son degré de liberté.**

Liaisons	d.
L_1 : liaison pivot d'axe (O, $\vec{x}_0$) L_2 : liaison glissière d'axe (OA) L_3: liaison pivot d'axe (A, $\vec{x}_0$)	**1** **1** **1**

2. **Paramétrer le système en justifiant votre choix (utiliser la figure n°1).**

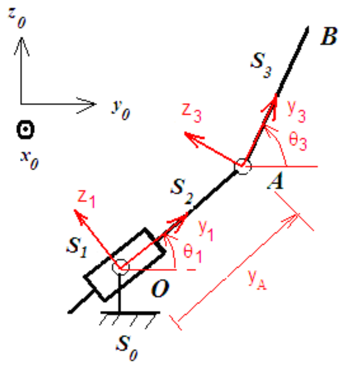
Soient :

$R_0\ (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ repère lié à (S_0)

$R_1\ (O, \vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ repère lié à (S_1) tel que $(\widehat{\vec{y}_0, \vec{y}_1}) = \theta_1$

$R_2\ (A, \vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ repère lié à (S_2) tel que $\overrightarrow{OA} = y_A \vec{y}_1$

$R_3\ (A, \vec{x}_0, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ repère lié à (S_3) tel que $(\widehat{\vec{y}_0, \vec{y}_3}) = \theta_3$



3. **Déterminer le degré de liberté (m) du système.**

On a une chaine continue ouverte ceci implique que les mouvements des différents solides de la chaine sont forcement indépendants $\Rightarrow$ aucune relation n'existe entre les paramètres installés.

d'où

m=nombre de paramètres=3

4. **Ecrire les coordonnées (X_B, Y_B, Z_B) du vecteur position du point B par rapport au repère (R_0).)**

Le vecteur position du point B dans le repère **(R_0) est :**

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{OB} = y_A \vec{y}_1 + l\vec{y}_3$$

$$\overrightarrow{AG} = y_A(\cos\theta_1 \vec{y}_0 + \sin\theta_1 \vec{z}_0) + l(\cos\theta_3 \vec{y}_0 + \sin\theta_3 \vec{z}_0)$$

D'où $\begin{cases} X_B = 0 \\ Y_B = y_A \cos\theta_1 + l\cos\theta_3 \\ Z_B = y_A \sin\theta_1 + l\sin\theta_3 \end{cases}$

5. **Déterminer le vecteur vitesse $\vec{V}(B/R_0)$ du point B par rapport à R_0.**

$$\vec{V}(B/R_0) = \left.\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right|_{/R_0} = \left.\frac{d(y_A\vec{y}_1 + l\vec{y}_2)}{dt}\right|_{/R_0} = \dot{y}_A \vec{y}_1 + y_A\dot{\theta}_1 \vec{z}_1 + l\dot{\theta}_3 \vec{z}_3$$

6. **Déterminer le vecteur accélération $\vec{\gamma}(B/R_0)$ du point B par rapport à R_0 .**

$$\vec{\gamma}(B/R_0) = \left.\frac{d\vec{V}(B/R_0)}{dt}\right|_{/R_0} = \left.\frac{d(\dot{y}_A \vec{y}_1 + y_A\dot{\theta}_1 \vec{z}_1 + l\dot{\theta}_3 \vec{z}_3)}{dt}\right|_{/R_0}$$

$$= \ddot{y}_A \vec{y}_1 + \dot{y}_A \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 + \dot{y}_A \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 + y_A \ddot{\theta}_1 \vec{z}_1 - y_A \dot{\theta}_1^2 \vec{y}_1 + l\ddot{\theta}_3 \vec{z}_3 - l\dot{\theta}_1^2 \vec{y}_3$$

$$= (\ddot{y}_A - y_A\dot{\theta}_1^2)\vec{y}_1 + (2\dot{y}_A\dot{\theta}_1 + y_A\ddot{\theta}_1)\vec{z}_1 + l\ddot{\theta}_3 \vec{z}_3 - l\dot{\theta}_1^2 \vec{y}_3$$

TD CINEMATIQUE
(1ére partie)

Exercice n°1 :

La figure 1 présente le schéma cinématique d'un mécanisme de transformation de mouvement de rotation continue en un mouvement de translation alternative.
Un moteur électrique entraîne en rotation la manivelle (S_1). Par l'intermédiaire de la bielle (S_2) le coulisseau (S_5) est animé d'un mouvement de translation alternatif.

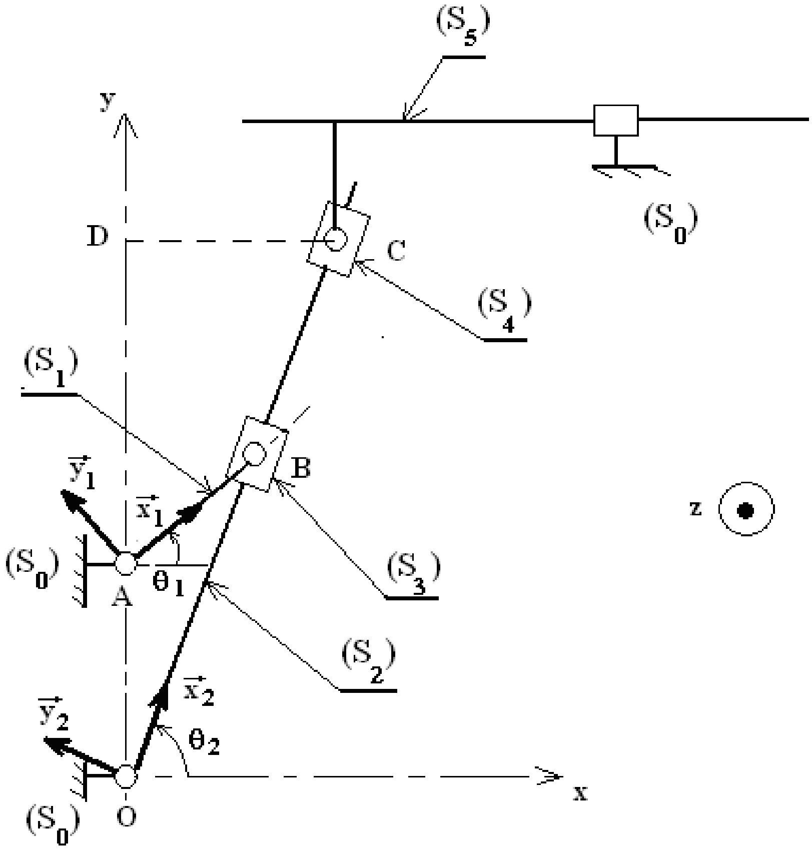


Figure 1

Soient :

- R_0 (O, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$) repère lié à ($S_0$)
- R_1 (A, $\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}$) repère lié à ($S_1$) tel que $\overrightarrow{OA} = L\vec{y}$ et $(\widehat{\vec{x}, \vec{x}_1}) = \theta_1$
- R_2 (O, $\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}$) repère lié à ($S_2$) tel que $(\widehat{\vec{x}, \vec{x}_2}) = \theta_2$
- R_3 (B, $\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}$) repère lié à ($S_3$)tel que $\overrightarrow{OB} = x_{2B}\vec{x}_2$
- R_4 (C, $\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}$) repère lié à ($S_4$) tel que $\overrightarrow{OC} = x_{2C}\vec{x}_2$
- R_5 (C, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$) repère lié à ($S_5$)

On donne : AB= r et OD=h
(r, L et h sont des constantes positives)

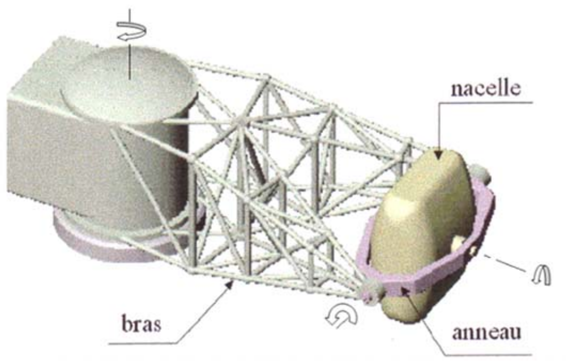
8. Déterminer le graphe des liaisons de ce mécanisme.
9. Calculer les torseurs cinématiques suivants :
   a. $\{\vartheta(S_1 / S_0)\}_B$
   b. $\{\vartheta(S_2 / S_0)\}_B$
   c. $\{\vartheta(S_3 / S_0)\}_B$
   d. $\{\vartheta(S_4 / S_2)\}_C$ et en déduire $\{\vartheta(S_4 / S_0)\}_C$
   e. $\{\vartheta(S_5 / S_4)\}_C$ et en déduire $\{\vartheta(S_5 / S_0)\}_C$

Exercice n°2

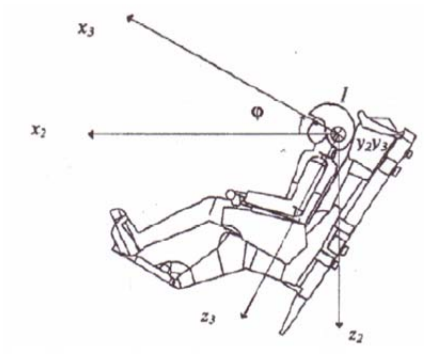
Les performances des avions de combat modernes permettent d'atteindre des niveaux d'accélération très élevés, qui peuvent conduire à la perte de conscience du pilote.

Pour améliorer la résistance humaine aux fortes accélérations, la centrifugeuse constitue un moyen d'essai indispensable pour la recherche médicale afin d'étudier l'effet des fortes accélérations (10 g) sur le corps humain et de développer de nouveaux systèmes (combinaison anti-g, commande vocale, son 3D...). Elles sont utilisées d'autre part pour l'entraînement des pilotes afin d'augmenter par des exercices de contraction musculaire et de respiration leur tolérance aux fortes accélérations.

L'exercice proposé ici s'articule autour d'une présentation du moyen d'essai le plus récent, la centrifugeuse 101.3 du Centre d'Essais en Vol de Brétigny/Orge, une étude cinématique permet de valider l'utilisation de cette centrifugeuse pour simuler les accélérations effectivement subies par le pilote dans son avion.



Centrifugeuse



Détail de la position du pilote dans la nacelle

C'est l'accélération ressentie au niveau de la tête du pilote qui est le paramètre important pour l'étude des phénomènes physiologiques. Pour simplifier les lois de commande de la centrifugeuse, on installe donc le siège pilote dans la nacelle de telle façon que le point I , centre de la tête du pilote se trouve aligné sur les axes de rotation des deux liaisons pivot bras / anneau et anneau / nacelle.

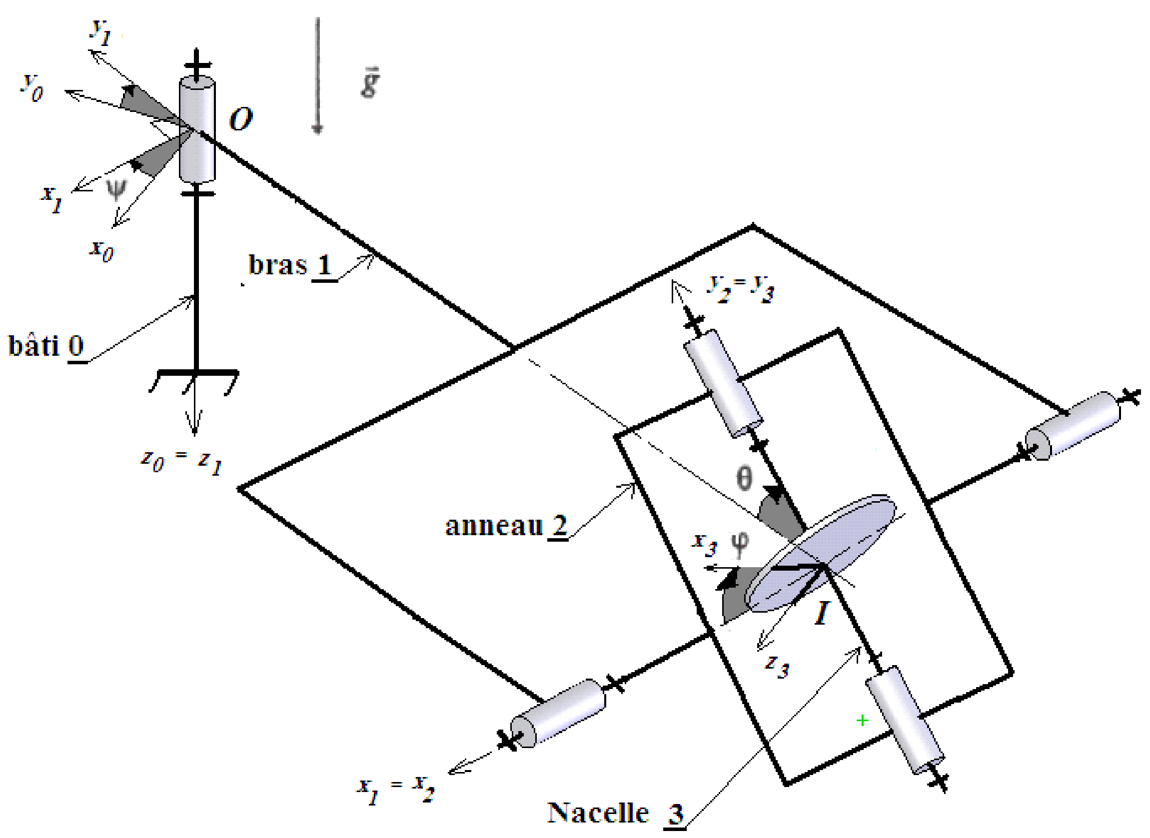
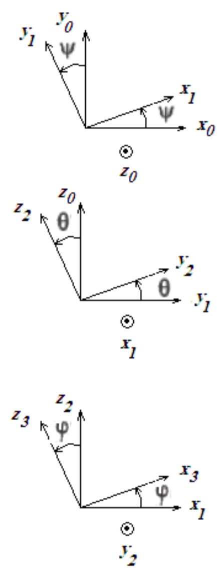


Schéma cinématique de la centrifugeuse



Soient :

R_0 (O, $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$) repère lié au bâti ($S_0$)

R_1 (O, $\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0$) repère lié au bras ($S_1$) tel que $(\widehat{\vec{x}_0, \vec{x}_1}) = (\widehat{\vec{y}_0, \vec{y}_1}) = \psi$

R_2 (I, $\vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2$) repère lié à ($S_2$) tel que $(\widehat{\vec{y}_1, \vec{y}_2}) = (\widehat{\vec{z}_0, \vec{z}_2}) = \theta$ et $\overrightarrow{OI} = -R\vec{y}_1$

R_3 (I, $\vec{x}_3, \vec{y}_2, \vec{z}_3$) repère lié à ($S_3$) tel que $(\vec{x}_1, \hat{\vec{x}_3}) = (\vec{z}_2, \hat{\vec{z}_3}) = \varphi$

Travail demandé

1) Déterminer :

a. $\{\vartheta(S_1/S_0)\}_O = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_1/S_0) \\ \vec{V}(O \in S_1/S_0) \end{Bmatrix}_O$

b. $\{\vartheta(S_2/S_1)\}_I = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_2/S_1) \\ \vec{V}(I \in S_2/S_1) \end{Bmatrix}_I$

c. $\{\vartheta(S_3/S_2)\}_I = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_3/S_2) \\ \vec{V}(I \in S_3/S_2) \end{Bmatrix}_I$

2) En déduire $\{\vartheta(S_3/S_0)\}_I = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_3/S_0) \\ \vec{V}(I \in S_3/S_0) \end{Bmatrix}_I$

3) Calculer le vecteur accélération $\vec{\gamma}(I \in S_3/S_0)$.

4) Soit $\vec{G} = \vec{g} - \vec{\gamma}(I \in S_3/S_0)$ le vecteur qui représente le nombre de «g » qui s'applique sur le pilote en I au cours de l'exercice. L'accélération de la pesanteur est telle que: $\vec{g} = g\vec{z}_0$.

Déterminer les trois composantes G_{x3} , G_{y3}, G_{z3} de $\vec{G}$ dans la base du repère (R_3) lié à la nacelle.

5) Calculer en fonction de R, g et $\dot{\psi}$ l'inclinaison θ de l'anneau pour que l'accélération latérale G_{y3} «ressentie» par le pilote reste nulle.

Exercice 3:

La figure 1 représente le schéma cinématique d'une presse mécanique. L'entrée de l'huile sous pression dans le cylindre S_1 du vérin déplace son piston S_2. Le piston pousse la biellette S_3 qui bascule autour du point B pour pousser à son tour le piston S_5 de la presse.

Soient :

R_0 (O, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$) repère lié à (0)

R_1 (O, $\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}$) repère lié à (1) tel que $(\vec{x}, \hat{\vec{x}_1}) = \theta_1$

R_2 (A, $\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}$) repère lié à (2) tel que $\overrightarrow{OA} = x_A \vec{x}_1$

R_3 (A, $\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}$) repère lié à (3) tel que $(\vec{x}, \hat{\vec{x}_3}) = \theta_3$

R_4 (C, $\vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}$) repère lié à (4) tel que $(\vec{x}, \hat{\vec{x}_4}) = \theta_4$ et $\overrightarrow{OC} = -a\vec{x} + b\vec{y}$

R_5 (D, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$) repère lié à (5) tel que $\overrightarrow{OD} = -d_5\vec{x} + y_D\vec{y}$

On note : $\|\overrightarrow{AB}\| = d_3, \|\overrightarrow{AD}\| = d_3', \|\overrightarrow{BC}\| = d_4$.

Où a, b, d_3, d_3', d_4 *et* d_5 sont des constantes positives.

1- Déterminer les vecteurs vitesses de rotation suivants : $\vec{\Omega}(S_1/S_0), \vec{\Omega}(S_2/S_1), \vec{\Omega}(S_2/S_0), \vec{\Omega}(S_3/S_0), \vec{\Omega}(S_4/S_0), \vec{\Omega}(S_5/S_0)$.

2- Déterminer le vecteur vitesse et le vecteur accélération du point A appartenant au solide S_2 par rapport à S_0. $\vec{V}(A \in S_2/S_0)$ et $\vec{\gamma}(A \in S_2/S_0)$.

3- Déterminer le vecteur vitesse et le vecteur accélération du point B appartenant au solide S_3 par rapport à S_0. $\vec{V}(B \in S_3/S_0)$ et $\vec{\gamma}(B \in S_3/S_0)$.

4- Déterminer, par deux méthodes le vecteur vitesse du point D appartenant au solide S_3 par rapport à S_0. $\vec{V}(D \in S_3 / S_0)$ (méthode 1 : en passant par le point B ; méthode 2 : par dérivation directe du vecteur $\overrightarrow{OD}$). En déduire la relation entre θ_1, θ_3, x_A et y_D.

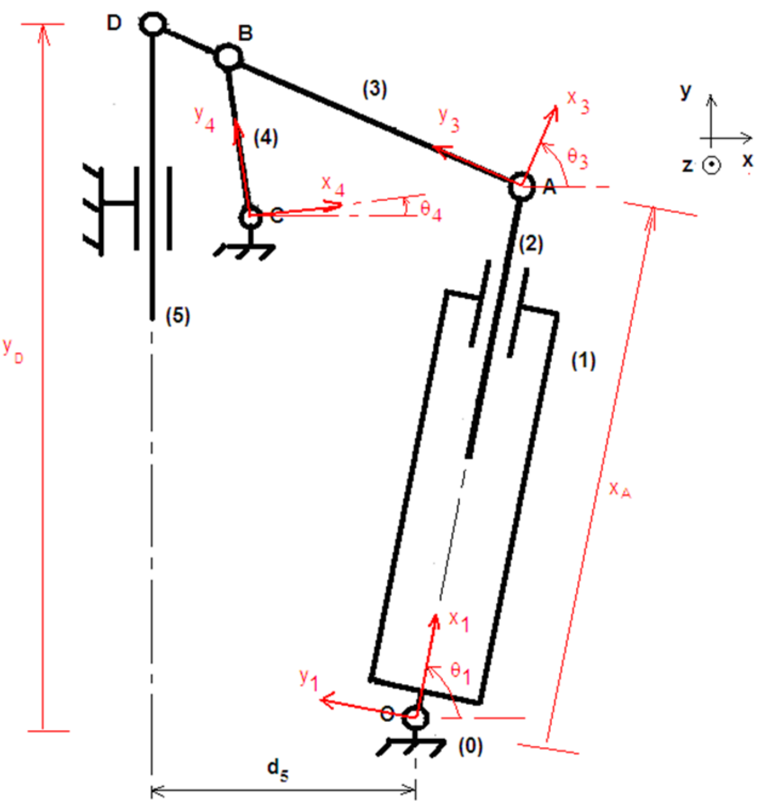


Figure1

Exercice 4

On se propose d'étudier le mouvement d'un système mécanique schématisé par la figure 2.

Le repère $R_0(o_0, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ est lié au bâti (S_0).

Le système étudié est constitué :

- d'un solide (S_1) (manivelle) articulé avec (S_0) et (S_2) par l'intermédiaire de deux liaisons pivots en O et en A. Le repère lié à (S_1) est $R_1(o_1, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ tels que : $(\widehat{\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}}) = (\widehat{\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_1}}) = \theta$ et $\overrightarrow{z_1} = \overrightarrow{z_0}$
- un solide (S_2) (coulisseau) en liaison glissière en A avec le solide (S_3). Le repère lié à (S_2) est R_2 (A, $\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}$) avec $\overrightarrow{OA} = a\vec{x}_1$ où a est une constante positive donnée.
- un solide (S_3) en mouvement de translation par rapport au bâti (S_0) grâce à la liaison glissière en C.

Le repère lié à (S_3) est R_3 (B, $\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}$) avec $\overrightarrow{OB} = x_B(t)\vec{x}_0$ et $\overrightarrow{BA} = y_A(t)\vec{y}_0$.

1.1. Donner les relations scalaires entre les paramètres x_B, y_A et θ.
1.2. Donner le torseur cinématique du solide (S_1) par rapport au solide (S_0) au point O puis au point B : $\{V(S_1/S_0\}_O$ et $\{V(S_1/S_0\}_B$
1.3. Donner l'axe instantané de rotation du mouvement du solide (S_1) par rapport au solide (S_0).
1.4. Donner le torseur cinématique du solide (S_2) par rapport au solide (S_0) au point A: $\{V(S_2/S_0\}_A$.
1.5. Donner l'axe instantané de rotation du mouvement du solide (S_2) par rapport au solide (S_0).
1.6. Donner le torseur cinématique du mouvement du solide (S_3) par rapport au solide (S_0) au point B: $\{V(S_3/S_0\}_B$.
1.7. Donner le torseur cinématique de mouvement du solide (S_2) par rapport au solide (S_1) au point A: $\{V(S_2/S_1\}_A$.
1.8. Calculer l'accélération du point B de (S_3) au cours de son mouvement par rapport à (S_0).

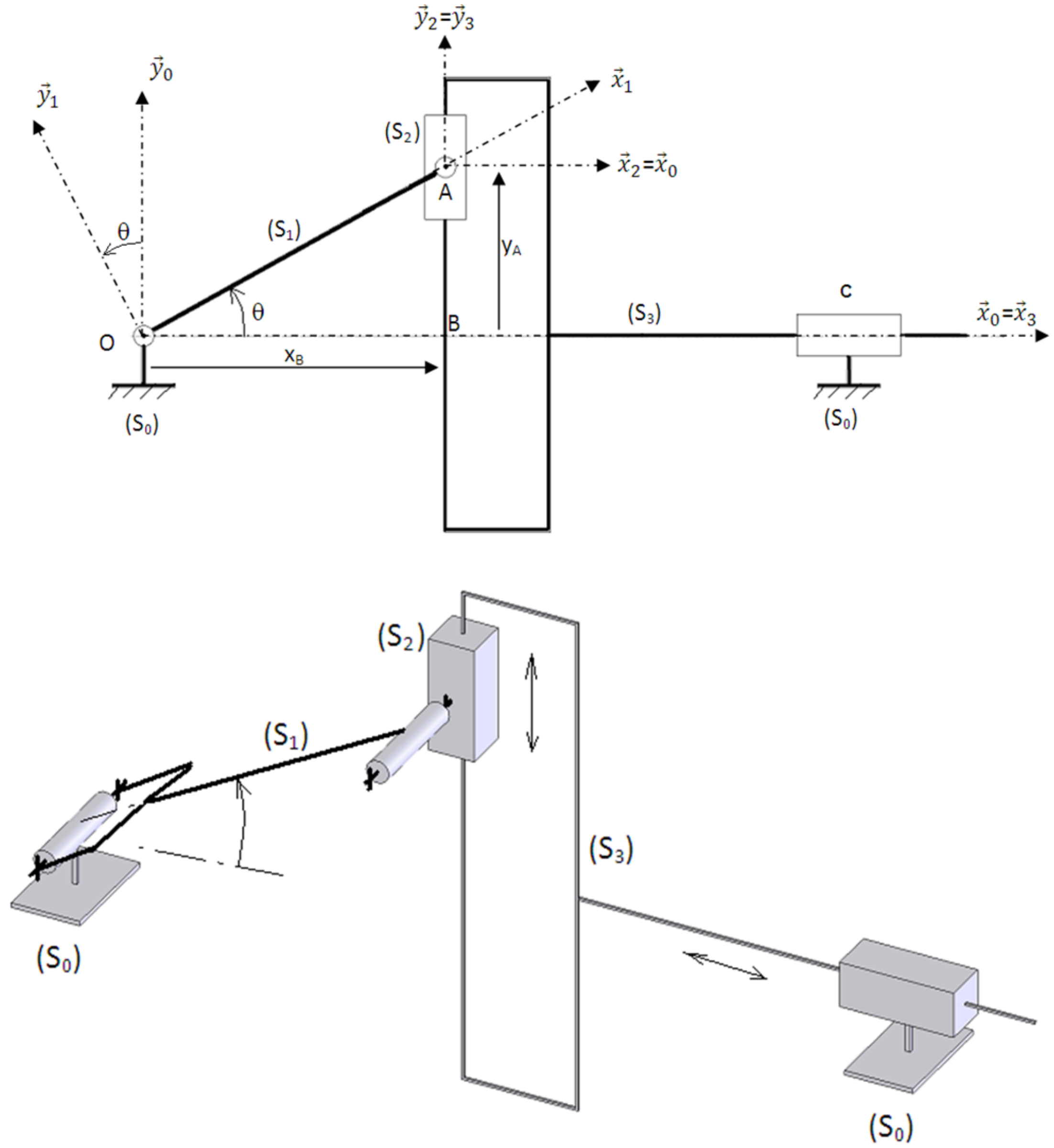

$\vec{y}_2=\vec{y}_3$
$\vec{y}_0$
$\vec{y}_1$
$\vec{x}_1$
(S_2)
$\vec{x}_2=\vec{x}_0$
A
(S_1)
y_A
θ
θ
c
O
B
(S_3)
$\vec{x}_0=\vec{x}_3$
x_B
(S_0)
(S_0)
(S_2)
(S_1)
(S_3)
(S_0)
(S_0)

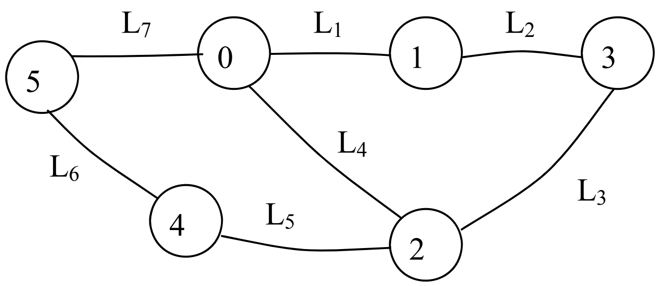
Figure 2

Correction

TD Cinématique (1ére partie)

Exercice n°1 :

10. Déterminer le graphe des liaisons de ce mécanisme



L_1 : liaison pivot d'axe $(A, \vec{z})$

L_2 : liaison pivot d'axe $(B, \vec{z})$

L_3 : liaison glissière d'axe $(B, \vec{x}_2)$

L_4 : liaison pivot d'axe $(O, \vec{z})$

L_5: liaison glissière d'axe $(C, \vec{x}_2)$

L_6 : liaison pivot d'axe $(C, \vec{z})$

L_7 : liaison glissière d'axe $(C, \vec{x})$

11. Calculer les torseurs cinématiques suivants :

a. $\{\vartheta(S_1/S_0)\}_B$

$$\{\vartheta(S_1/S_0)\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_1/S_0) \\ \vec{V}(A \in S_1/S_0) \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$$

$$\{\vartheta(S_1/S_0)\}_B = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_1/S_0) \\ \vec{V}(B \in S_1/S_0) \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_1/S_0) \\ \vec{V}(A \in S_1/S_0) + \vec{\Omega}(S_1/S_0) \wedge \overrightarrow{AB} \end{Bmatrix}_B$$

$$\Rightarrow \qquad \{\vartheta(S_1/S_0)\}_B = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \vec{z} \\ \vec{0} + \dot{\theta}_1 \vec{z} \wedge r\vec{x}_1 \end{Bmatrix}_B$$

$$\Rightarrow \qquad \{\vartheta(S_1/S_0)\}_B = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \vec{z} \\ r\dot{\theta}_1 \vec{y}_1 \end{Bmatrix}_B$$

b. $\{\vartheta(S_2/S_0)\}_B$

$$\{\vartheta(S_2/S_0)\}_O = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_2/S_0) \\ \vec{V}(O \in S_2/S_0) \end{Bmatrix}_O = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_2 \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O$$

$$\{\vartheta(S_2/S_0)\}_B = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_2/S_0) \\ \vec{V}(B \in S_2/S_0) \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_2/S_0) \\ \vec{V}(O \in S_2/S_0) + \vec{\Omega}(S_2/S_0) \wedge \overrightarrow{OB} \end{Bmatrix}_B$$

$$\Rightarrow \qquad \{\vartheta(S_2/S_0)\}_B = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_2 \vec{z} \\ \vec{0} + \dot{\theta}_2 \vec{z} \wedge x_{2B}\vec{x}_2 \end{Bmatrix}_B$$

$$\Rightarrow \qquad \{\vartheta(S_2/S_0)\}_B = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_2 \vec{z} \\ x_{2B}\dot{\theta}_2 \vec{y}_2 \end{Bmatrix}_B$$

c. $\{\vartheta(S_3/S_0)\}_B$

$1^{ére}$ solution

$$\{\vartheta(S_3/S_0)\}_B = \{\vartheta(S_3/S_2)\}_B + \{\vartheta(S_2/S_0)\}_B$$

$$\{\vartheta(S_3/S_2)\}_B = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_3/S_2) \\ \vec{V}(B \in S_3/S_2) \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \dot{x}_{2B}\ \vec{x}_2 \end{Bmatrix}_B$$

$$\{\vartheta(S_3/S_0)\}_B = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \dot{x}_{2B}\ \vec{x}_2 \end{Bmatrix}_B + \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_2\ \vec{z} \\ x_{2B}\ \dot{\theta}_2\ \vec{y}_2 \end{Bmatrix}_B$$

$$\Rightarrow \quad \{\vartheta(S_3/S_0)\}_B = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_2\ \vec{z} \\ \dot{x}_{2B}\ \vec{x}_2 + x_{2B}\ \dot{\theta}_2\ \vec{y}_2 \end{Bmatrix}_B$$

OU : 2éme solution

$$\{\vartheta(S_3/S_0)\}_B = \{\vartheta(S_3/S_1)\}_B + \{\vartheta(S_1/S_0)\}_B$$

$$\{\vartheta(S_3/S_1)\}_B = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_3/S_1) \\ \vec{V}(B \in S_3/S_1) \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_3/S_2) + \vec{\Omega}(S_2/S_0) - \vec{\Omega}(S_1/S_0) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$$

$$\Rightarrow \quad \{\vartheta(S_3/S_1)\}_B = \begin{Bmatrix} \vec{0} + \dot{\theta}_2\ \vec{z} - \dot{\theta}_1\ \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} \left(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1\right)\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$$

et $\quad \{\vartheta(S_1/S_0)\}_B = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1\ \vec{z} \\ r\,\dot{\theta}_1\ \vec{y}_1 \end{Bmatrix}_B$

d'où $\quad \{\vartheta(S_3/S_0)\}_B = \begin{Bmatrix} \left(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1\right)\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B + \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1\ \vec{z} \\ r\,\dot{\theta}_1\ \vec{y}_1 \end{Bmatrix}_B$

$$\Rightarrow \quad \{\vartheta(S_3/S_0)\}_B = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_2\ \vec{z} \\ r\,\dot{\theta}_1\ \vec{y}_1 \end{Bmatrix}_B$$

d. $\{\vartheta(S_4/S_2)\}_C$ et en déduire $\{\vartheta(S_4/S_0)\}_C$

$$\{\vartheta(S_4/S_2)\}_C = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_4/S_2) \\ \vec{V}(C \in S_4/S_2) \end{Bmatrix}_C = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \dot{x}_{2C}\ \vec{x}_2 \end{Bmatrix}_C$$

$$\{\vartheta(S_4/S_0)\}_C = \{\vartheta(S_4/S_2)\}_C + \{\vartheta(S_2/S_0)\}_C$$

$$\{\vartheta(S_2/S_0)\}_C = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_2/S_0) \\ \vec{V}(C \in S_2/S_0) \end{Bmatrix}_C = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_2/S_0) \\ \vec{V}(O \in S_2/S_0) + \vec{\Omega}(S_2/S_0) \wedge \overrightarrow{OC} \end{Bmatrix}_C$$

$$\Rightarrow \quad \{\vartheta(S_2/S_0)\}_C = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_2\ \vec{z} \\ \vec{0} + \dot{\theta}_2\ \vec{z} \wedge x_{2C}\ \vec{x}_2 \end{Bmatrix}_C$$

$$\Rightarrow \quad \{\vartheta(S_2/S_0)\}_C = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_2\ \vec{z} \\ x_{2C}\ \dot{\theta}_2\ \vec{y}_2 \end{Bmatrix}_C$$

d'où $\quad \{\vartheta(S_4/S_0)\}_C = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \dot{x}_{2C}\ \vec{x}_2 \end{Bmatrix}_C + \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_2\ \vec{z} \\ x_{2C}\ \dot{\theta}_2\ \vec{y}_2 \end{Bmatrix}_C$

$$\Rightarrow \quad \{\vartheta(S_4/S_0)\}_C = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_2\ \vec{z} \\ \dot{x}_{2C}\ \vec{x}_2 + x_{2C}\ \dot{\theta}_2\ \vec{y}_2 \end{Bmatrix}_C$$

e. $\{\vartheta(S_5/S_4)\}_C$ et en déduire $\{\vartheta(S_5/S_0)\}_C$

$$\{\mathcal{V}(S_5/S_4)\}_C = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_5/S_4) \\ \vec{V}(C \in S_5/S_4) \end{Bmatrix}_C = \begin{Bmatrix} -\dot{\theta}_2\,\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_C$$

$$\{\mathcal{V}(S_5/S_0)\}_C = \{\mathcal{V}(S_5/S_4)\}_C + \{\mathcal{V}(S_4/S_0)\}_C$$

$$\{\mathcal{V}(S_5/S_0)\}_C = \begin{Bmatrix} -\dot{\theta}_2\,\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_C + \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_2\,\vec{z} \\ \dot{x}_{2C}\,\vec{x}_2 + x_{2C}\,\dot{\theta}_2\,\vec{y}_2 \end{Bmatrix}_C$$

$$\Rightarrow \qquad \{\mathcal{V}(S_5/S_0)\}_C = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \dot{x}_{2C}\,\vec{x}_2 + x_{2C}\,\dot{\theta}_2\,\vec{y}_2 \end{Bmatrix}_C$$

Exercice n°2

6) Déterminer :

d. $$\{\mathcal{V}(S_1/S_0)\}_O = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_1/S_0) \\ \vec{V}(O \in S_1/S_0) \end{Bmatrix}_O = \begin{Bmatrix} \dot{\psi}\,\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O$$

e. $$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\}_I = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_2/S_1) \\ \vec{V}(I \in S_2/S_1) \end{Bmatrix}_I = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}\,\vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_I$$

f. $$\{\mathcal{V}(S_3/S_2)\}_I = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_3/S_2) \\ \vec{V}(I \in S_3/S_2) \end{Bmatrix}_I = \begin{Bmatrix} \dot{\varphi}\,\vec{y}_2 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_I$$

7) En déduire $\{\mathcal{V}(S_3/S_0)\}_I = \{\mathcal{V}(S_3/S_2)\}_I + \{\mathcal{V}(S_2/S_1)\}_I + \{\mathcal{V}(S_1/S_0)\}_I$

$$\{\mathcal{V}(S_1/S_0)\}_I = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_1/S_0) \\ \vec{V}(I \in S_1/S_0) \end{Bmatrix}_I = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_1/S_0) \\ \vec{V}(O \in S_1/S_0) + \vec{\Omega}(S_1/S_0) \wedge \vec{OI} \end{Bmatrix}_I = \begin{Bmatrix} \dot{\psi}\,\vec{z}_0 \\ \vec{0} + \dot{\psi}\,\vec{z}_0 \wedge -R\vec{y}_1 \end{Bmatrix}_I$$

$$\Rightarrow \{\mathcal{V}(S_1/S_0)\}_I = \begin{Bmatrix} \dot{\psi}\,\vec{z}_0 \\ R\dot{\psi}\,\vec{x}_1 \end{Bmatrix}_I$$

$$\Rightarrow \qquad \{\mathcal{V}(S_3/S_0)\}_I = \begin{Bmatrix} \dot{\varphi}\,\vec{y}_2 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_I + \begin{Bmatrix} \dot{\theta}\,\vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_I + \begin{Bmatrix} \dot{\psi}\,\vec{z}_0 \\ R\dot{\psi}\,\vec{x}_1 \end{Bmatrix}_I$$

$$\Rightarrow \qquad \{\mathcal{V}(S_3/S_0)\}_I = \begin{Bmatrix} \dot{\varphi}\,\vec{y}_2 + \dot{\theta}\,\vec{x}_1 + \dot{\psi}\,\vec{z}_0 \\ R\dot{\psi}\,\vec{x}_1 \end{Bmatrix}_I$$

8) Calculer le vecteur accélération $\vec{\gamma}(I \in S_3/S_0)$.

$$\vec{\gamma}(I \in S_3/S_0) = \left(\frac{d\vec{V}(I \in S_3/S_0)}{dt}\right)_{R_0} = \left(\frac{d(R\dot{\psi}\,\vec{x}_1)}{dt}\right)_{R_0}$$

$$= R\ddot{\psi}\,\vec{x}_1 + R\dot{\psi}\left(\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right)_{R_0} = R\ddot{\psi}\,\vec{x}_1 + R\dot{\psi}\left(\dot{\psi}\,\vec{z}_0 \wedge \vec{x}_1\right)$$

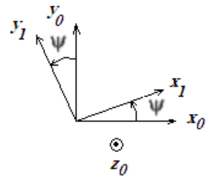
$$\Rightarrow \quad \vec{\gamma}(I \in S_3 / S_0) = R\ddot{\psi}\,\vec{x}_1 + R\dot{\psi}^2\,\vec{y}_1$$

9) Soit $\vec{G} = \vec{g} - \vec{\gamma}(I \in S_3 / S_0)$ le vecteur qui représente le nombre de «g » qui s'applique sur le pilote en I au cours de l'exercice. L'accélération de la pesanteur est telle que: $\vec{g} = g\vec{z}_0$.

Déterminer les trois composantes G_{x3} , G_{y3}, G_{z3} de $\vec{G}$ dans la base du repère (R_3) lié à la nacelle.

$$\vec{G} = \vec{g} - \vec{\gamma}(I \in S_3 / S_0) = g\vec{z}_0 - R\ddot{\psi}\,\vec{x}_1 - R\dot{\psi}^2\,\vec{y}_1$$

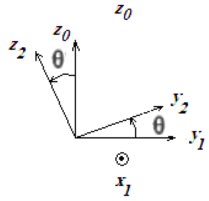
Avec :



- $\vec{x}_1 = \cos\varphi\,\vec{x}_3 - \sin\varphi\,\vec{z}_3$
- $\vec{y}_1 = \cos\theta\,\vec{y}_2 - \sin\theta\,\vec{z}_2$ et $\vec{z}_2 = \cos\varphi\,\vec{z}_3 + \sin\varphi\,\vec{x}_3$

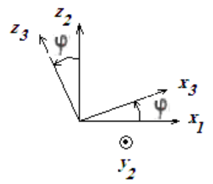
  d'où

  $\vec{y}_1 = -\sin\theta\sin\varphi\,\vec{x}_3 + \cos\theta\,\vec{y}_2 - \sin\theta\cos\varphi\,\vec{z}_3$



- $\vec{z}_0 = \cos\theta\,\vec{z}_2 + \sin\theta\,\vec{y}_2$

  d'où $\vec{z}_0 = \cos\theta\sin\varphi\,\vec{x}_3 + \sin\theta\,\vec{y}_2 + \cos\theta\cos\varphi\,\vec{z}_3$



$$\Rightarrow \vec{G} = \begin{pmatrix} G_{x3} \\ G_{y3} \\ G_{z3} \end{pmatrix}_{R_3} = \begin{pmatrix} g\cos\theta\sin\varphi - R\ddot{\psi}\cos\varphi + R\dot{\psi}^2\sin\theta\sin\varphi \\ g\sin\theta - R\dot{\psi}^2\cos\theta \\ g\cos\theta\cos\varphi + R\ddot{\psi}\sin\varphi + R\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\varphi \end{pmatrix}_{R_3}$$

10) Calculer en fonction de R, g et $\dot{\psi}$ l'inclinaison θ de l'anneau pour que l'accélération latérale G_{y3} «ressentie» par le pilote reste nulle.

$$G_{y3} = g\sin\theta - R\dot{\psi}^2\cos\theta = 0 \Rightarrow tg\theta = \frac{R\dot{\psi}^2}{g} \Rightarrow \theta = arctg\left(\frac{R\dot{\psi}^2}{g}\right)$$

Exercice 3:

1- Déterminer les vecteurs vitesses de rotation suivants :

$\vec{\Omega}(S_1/S_0), \vec{\Omega}(S_2/S_1), \vec{\Omega}(S_2/S_0), \vec{\Omega}(S_3/S_0), \vec{\Omega}(S_4/S_0), \vec{\Omega}(S_5/S_0)$.

$\vec{\Omega}(S_1/S_0) = \dot{\theta}_1\,\vec{z}$;

$\vec{\Omega}(S_2/S_1) = \vec{0}$;

$\vec{\Omega}(S_2/S_0) = \vec{\Omega}(S_2/S_1) + \vec{\Omega}(S_1/S_0) = \vec{0} + \dot{\theta}_1\,\vec{z} = \dot{\theta}_1\,\vec{z}$

$\vec{\Omega}(S_3/S_0) = \dot{\theta}_3\,\vec{z}$;

$\vec{\Omega}(S_4/S_0) = \dot{\theta}_4\,\vec{z}$;

$\vec{\Omega}(S_5/S_0) = \vec{0}$;

2- Déterminer le vecteur vitesse et le vecteur accélération du point A appartenant au solide S_2 par rapport à S_0.

$$\vec{V}(A\in S_2/S_0)=\left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right|_{R_0}=\left.\frac{d(x_A\vec{x}_1)}{dt}\right|_{R_0}$$

$$=\dot{x}_A\vec{x}_1+x_A\left.\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right|_{R_0}$$

$$=\dot{x}_A\vec{x}_1+x_A\left[\left.\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right|_{R_1}+\vec{\Omega}(S_1/S_0)\wedge\vec{x}_1\right]$$

$$=\dot{x}_A\vec{x}_1+x_A\left[\vec{0}+\dot{\theta}_1\vec{z}\wedge\vec{x}_1\right]$$

$$\Rightarrow \vec{V}(A\in S_2/S_0)=\dot{x}_A\vec{x}_1+x_A\dot{\theta}_1\vec{y}_1$$

$$\vec{\gamma}(A\in S_2/S_0)=\left.\frac{d\left(\vec{V}(A\in S_2/S_0)\right)}{dt}\right|_{R_0}$$

$$=\left.\frac{d\left(\dot{x}_A\vec{x}_1+x_A\dot{\theta}_1\vec{y}_1\right)}{dt}\right|_{R_0}$$

$$=\ddot{x}_A\vec{x}_1+\dot{x}_A\left.\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right|_{R_0}+\dot{x}_A\dot{\theta}_1\vec{y}_1+x_A\ddot{\theta}_1\vec{y}_1+x_A\dot{\theta}_1\left.\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right|_{R_0}$$

$$=\ddot{x}_A\vec{x}_1+\dot{x}_A\dot{\theta}_1\vec{y}_1+\dot{x}_A\dot{\theta}_1\vec{y}_1+x_A\ddot{\theta}_1\vec{y}_1-x_A\dot{\theta}_1\dot{\theta}_1\vec{x}_1$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}(A\in S_2/S_0)=\ddot{x}_A\vec{x}_1+2\dot{x}_A\dot{\theta}_1\vec{y}_1+x_A\ddot{\theta}_1\vec{y}_1-x_A\dot{\theta}_1^{2}\vec{x}_1$$

3- Déterminer le vecteur vitesse et le vecteur accélération du point B appartenant au solide S_3 par rapport à S_0. $\vec{V}(B\in S_3/S_0)$ et $\vec{\gamma}(B\in S_3/S_0)$.

$$\vec{V}(B\in S_3/S_0)=\vec{V}(A\in S_3/S_0)+\vec{\Omega}(S_3/S_0)\wedge\overrightarrow{AB}$$

or $\vec{V}(A\in S_3/S_0)=\vec{V}(A\in S_2/S_0)$

d'où $\vec{V}(B\in S_3/S_0)=\vec{V}(A\in S_2/S_0)+\vec{\Omega}(S_3/S_0)\wedge\overrightarrow{AB}$

$$=\dot{x}_A\vec{x}_1+x_A\dot{\theta}_1\vec{y}_1+\dot{\theta}_3\vec{z}\wedge d_3\vec{y}_3$$

$$\Rightarrow \vec{V}(B\in S_3/S_0)=\dot{x}_A\vec{x}_1+x_A\dot{\theta}_1\vec{y}_1-d_3\dot{\theta}_3\vec{x}_3$$

$$\vec{\gamma}(B\in S_3/S_0)=\vec{\gamma}(A\in S_3/S_0)+\left(\frac{d\vec{\Omega}(S_3/S_0)}{dt}\right)_{R_0}\wedge\overrightarrow{AB}+\vec{\Omega}(S_3/S_0)\wedge\left(\vec{\Omega}(S_3/S_0)\wedge\overrightarrow{AB}\right)$$

avec $\vec{\gamma}(A\in S_3/S_0)=\vec{\gamma}(A\in S_2/S_0)$

d'où

$$\vec{\gamma}(B\in S_3/S_0)=\vec{\gamma}(A\in S_3/S_0)+\left(\frac{d\vec{\Omega}(S_3/S_0)}{dt}\right)_{R_0}\wedge\overrightarrow{AB}+\vec{\Omega}(S_3/S_0)\wedge\left(\vec{\Omega}(S_3/S_0)\wedge\overrightarrow{AB}\right)$$

$$=\ddot{x}_A\vec{x}_1+2\dot{x}_A\dot{\theta}_1\vec{y}_1+x_A\ddot{\theta}_1\vec{y}_1-x_A\dot{\theta}_1^2\vec{x}_1+\ddot{\theta}_3\vec{z}\wedge d_3\vec{y}_3+\dot{\theta}_3\vec{z}\wedge\left(\dot{\theta}_3\vec{z}\wedge d_3\vec{y}_3\right)\quad\Rightarrow$$

$$\vec{\gamma}(B\in S_3/S_0)=\ddot{x}_A\vec{x}_1+2\dot{x}_A\dot{\theta}_1\vec{y}_1+x_A\ddot{\theta}_1\vec{y}_1-x_A\dot{\theta}_1^2\vec{x}_1-d_3\ddot{\theta}_3\vec{x}_3-d_3\dot{\theta}_3^2\vec{y}_3$$

4. Déterminer, par deux méthodes le vecteur vitesse du point D appartenant au solide S_3 par rapport à S_0. $\vec{V}(D\in S_3/S_0)$ (méthode 1 : on passant par le point B ; méthode 2 : par dérivation directe du vecteur $\overrightarrow{OD}$). En déduire la relation entre θ_1, θ_3, x_A et y_D.

méthode 1 :

$$\vec{V}(D\in S_3/S_0)=\vec{V}(B\in S_3/S_0)+\vec{\Omega}(S_3/S_0)\wedge\overrightarrow{BD}$$

$$=\dot{x}_A\vec{x}_1+x_A\dot{\theta}_1\vec{y}_1-d_3\dot{\theta}_3\vec{x}_3+\dot{\theta}_3\vec{z}\wedge\left(d_3'-d_3\right)\vec{y}_3$$

$$=\dot{x}_A\vec{x}_1+x_A\dot{\theta}_1\vec{y}_1-d_3\dot{\theta}_3\vec{x}_3-\left(d_3'-d_3\right)\dot{\theta}_3\vec{x}_3$$

$$\Rightarrow\quad\vec{V}(D\in S_3/S_0)=\dot{x}_A\vec{x}_1+x_A\dot{\theta}_1\vec{y}_1-d_3'\dot{\theta}_3\vec{x}_3$$

méthode 2 :

$$\vec{V}(D\in S_3/S_0)=\frac{d\overrightarrow{OD}}{dt}_{/R_0}$$

$$=\frac{d\left(-d_5\vec{x}+y_D\vec{y}\right)}{dt}_{/R_0}$$

$$\Rightarrow\quad\vec{V}(D\in S_3/S_0)=\dot{y}_D\vec{y}$$

On en déduit :

$$\dot{x}_A\vec{x}_1+x_A\dot{\theta}_1\vec{y}_1-d_3'\dot{\theta}_3\vec{x}_3=\dot{y}_D\vec{y}$$

En projetons cette équation dans la base de (R_0) on obtient :

$$\begin{cases}\dot{x}_A\cos\theta_1-x_A\dot{\theta}_1\sin\theta_1-d_3'\dot{\theta}_3\cos\theta_3=0 & suivant\ \vec{x}\\ \dot{x}_A\sin\theta_1+x_A\dot{\theta}_1\cos\theta_1-d_3'\dot{\theta}_3\sin\theta_3=\dot{y}_D & suivant\ \vec{y}\end{cases}$$

Les primitives de ses deux équations s'écrivent

$$\begin{cases}x_A\cos\theta_1-d_3'\sin\theta_3=c_1 & suivant\ \vec{x}\\ x_A\sin\theta_1+d_3'\cos\theta_3=y_D+c_2 & suivant\ \vec{y}\end{cases}$$

où c_1 et c_2 sont 2 constantes.

Ce qui est équivalent à écrire :

$$\vec{x_A x_1}+d_3'\vec{y_3}=y_D\vec{y}+\vec{C} \Rightarrow \vec{OA}+\vec{AD}=y_D\vec{y}+\vec{C}$$

d'où

$$\vec{OD}=y_D\vec{y}+\vec{C}=-d_5\vec{x}+y_D\vec{y} \;\Rightarrow\; \vec{C}=-d_5\vec{x} \;\Rightarrow\; c_1=-d_5 \text{ et } c_2=0$$

d'où

$$\begin{cases} x_A\cos\theta_1-d_3'\sin\theta_3=-d_5 & \text{suivant } \vec{x} \\ x_A\sin\theta_1+d_3'\cos\theta_3=y_D & \text{suivant } \vec{y} \end{cases}$$

Exercice 4

1.9. Donner les relations scalaires entre les paramètres x_B, y_A et θ.

On a :

$$\vec{OA}+\vec{AB}+\vec{BO}=\vec{0} \quad a\vec{x_1}-y_A\vec{y_0}-x_B\vec{x_0}=\vec{0}$$

En projetant cette équation dans la base de (R_0) on obtient :

$$\begin{cases} a\cos\theta=x_B' & \text{suivant } \vec{x_0} \\ a\sin\theta=y_A & \text{suivant } \vec{y}_0 \end{cases}$$

1.10. Donner le torseur cinématique du solide (S_1) par rapport au solide (S_0) au point O puis au point B : $\{V(S_1/S_0\}_O$ et $\{V(S_1/S_0\}_B$

$$\{\mathcal{V}(S_1/S_0)\}_O=\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_1/S_0) \\ \vec{V}(O\in S_1/S_0) \end{Bmatrix}_O=\begin{Bmatrix} \dot{\theta}\vec{z_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O$$

$$\{\mathcal{V}(S_1/S_0)\}_B=\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_1/S_0) \\ \vec{V}(B\in S_1/S_0) \end{Bmatrix}_B=\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_1/S_0) \\ \vec{V}(O\in S_1/S_0)+\vec{\Omega}(S_1/S_0)\wedge\vec{OB} \end{Bmatrix}_A$$

$$\Rightarrow\{\mathcal{V}(S_1/S_0)\}_B=\begin{Bmatrix} \dot{\theta}\vec{z_0} \\ \vec{0}+\dot{\theta}\vec{z_0}\wedge x_B\vec{x_0} \end{Bmatrix}_B=\begin{Bmatrix} \dot{\theta}\vec{z_0} \\ x_B\dot{\theta}\vec{y_0} \end{Bmatrix}_B$$

1.11. Donner l'axe instantané de rotation du mouvement du solide (S_1) par rapport au solide (S_0).

La liaison entre (S_1) et (S_0) est pivot d'axe $(O, \vec{z_0})$. L'axe $(O, \vec{z_0})$ est donc l'axe instantané de rotation de (S_1) par rapport (S_0).

1.12. Donner le torseur cinématique du solide (S_2) par rapport au solide (S_0) au point A:

$\{V(S_2/S_0\}_A$.

<u>1ère méthode</u>

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_0)\}_A=\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_2/S_0) \\ \vec{V}(B\in S_2/S_0) \end{Bmatrix}_A=\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \left.\dfrac{d\vec{OA}}{dt}\right|_{R_0}=\left.\dfrac{d\left(x_B\vec{x_0}+y_A\vec{y_0}\right)}{dt}\right|_{R_0} \end{Bmatrix}_A$$

$$\left\{\mathcal{V}(S_2/S_0)\right\}_A=\left\{\begin{matrix}\vec{0}\\ \dot{x}_B\,\vec{x}_0+\dot{y}_A\,\vec{y}_0\end{matrix}\right\}_A$$

2éme méthode

$$\left\{\mathcal{V}(S_2/S_0)\right\}_A=\left\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\right\}_A+\left\{\mathcal{V}(S_1/S_0)\right\}_A$$

- $\left\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\right\}_A=\left\{\begin{matrix}\vec{\Omega}(S_2/S_1)\\ \vec{V}(A\in S_2/S_1)\end{matrix}\right\}_A$

  avec $\vec{\Omega}(S_2/S_1)=\vec{\Omega}(S_2/S_0)-\vec{\Omega}(S_1/S_0)=\vec{0}-\dot{\theta}\,\vec{z}_0=-\dot{\theta}\,\vec{z}_0$

  et $\vec{V}(A\in S_2/S_1)=\vec{0}$

  $$\Rightarrow\left\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\right\}_A=\left\{\begin{matrix}-\dot{\theta}\,\vec{z}_0\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_A$$

- $\left\{\mathcal{V}(S_1/S_0)\right\}_A=\left\{\begin{matrix}\vec{\Omega}(S_1/S_0)\\ \vec{V}(A\in S_1/S_0)\end{matrix}\right\}_A=\left\{\begin{matrix}\vec{\Omega}(S_1/S_0)\\ \vec{V}(O\in S_1/S_0)+\vec{\Omega}(S_1/S_0)\wedge\overrightarrow{OA}\end{matrix}\right\}_A$

  $$\Rightarrow\left\{\mathcal{V}(S_1/S_0)\right\}_A=\left\{\begin{matrix}\dot{\theta}\,\vec{z}_0\\ \vec{0}+\dot{\theta}\,\vec{z}_0\wedge a\vec{x}_1\end{matrix}\right\}_A=\left\{\begin{matrix}\dot{\theta}\,\vec{z}_0\\ a\,\dot{\theta}\,\vec{y}_1\end{matrix}\right\}_A$$

d'où $\left\{\mathcal{V}(S_2/S_0)\right\}_A=\left\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\right\}_A+\left\{\mathcal{V}(S_1/S_0)\right\}_A$

$$\Rightarrow\left\{\mathcal{V}(S_2/S_0)\right\}_A=\left\{\begin{matrix}\vec{0}\\ a\,\dot{\theta}\,\vec{y}_1\end{matrix}\right\}_A$$

1.13. Donner l'axe instantané de rotation du mouvement du solide (S_2) par rapport au solide (S_0).

$\vec{\Omega}(S_2/S_0)=\vec{0}$ aucune rotation n'existe entre (S_2) et (S_0). Il n'existe pas d'axe instantané de rotation pour le mouvement du solide (S_2) par rapport au solide (S_0).

1.14. Donner le torseur cinématique du mouvement du solide (S_3) par rapport au solide (S_0) au point B: $\left\{V(S_3/S_0\right\}_B$.

$$\left\{\mathcal{V}(S_3/S_0)\right\}_B=\left\{\begin{matrix}\vec{\Omega}(S_3/S_0)\\ \vec{V}(B\in S_3/S_0)\end{matrix}\right\}_B=\left\{\begin{matrix}\vec{0}\\ \left.\dfrac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right|_{/R_0}=\left.\dfrac{d\left(x_B\,\vec{x}_0\right)}{dt}\right|_{/R_0}=\dot{x}_B\,\vec{x}_0\end{matrix}\right\}_B$$

$$\Rightarrow\left\{\mathcal{V}(S_3/S_0)\right\}_B=\left\{\begin{matrix}\vec{0}\\ \dot{x}_B\,\vec{x}_0\end{matrix}\right\}_B$$

1.15. Donner le torseur cinématique de mouvement du solide (S_2) par rapport au solide (S_1) au point A: $\left\{V(S_2/S_1\right\}_A$.

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_2/S_1) \\ \vec{V}(A \in S_2/S_1) \end{Bmatrix}_A$$

avec $\vec{\Omega}(S_2/S_1) = \vec{\Omega}(S_2/S_0) - \vec{\Omega}(S_1/S_0) = \vec{0} - \dot{\theta}\vec{z}_0 = -\dot{\theta}\vec{z}_0$ et $\vec{V}(A \in S_2/S_1) = \vec{0}$

$$\Rightarrow \{\mathcal{V}(S_2/S_1)\}_A = \begin{Bmatrix} -\dot{\theta}\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$$

1.16. Calculer l'accélération du point B de (S_3) au cours de son mouvement par rapport à (S_0).

$$\vec{\gamma}(B \in S_3/S_0) = \frac{d\left(\vec{V}(B \in S_3/S_0)\right)}{dt}_{/R_0}$$

$$= \frac{d\left(\dot{x}_B\,\vec{x}_0\right)}{dt}_{/R_0}$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}(B \in S_3/S_0) = \ddot{x}_B\,\vec{x}_0$$

TD Cinématique
(2éme partie)

Exercice 1 :

Un disque (S_1) de centre A et de rayon r roule sans glisser par l'intermédiaire d'une tige (S_2) de longueur l et d'une masse coulissante (S_3) sur une surface (S_0) fixe dans le repère $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$. Soient $R_1(A,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ et $R_2(A,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$ deux repères liés, respectivement, au disque et à la tige. On considère des liaisons pivots aux points A et B (figure 1).

1) Déterminer les vecteurs rotation $\vec{\Omega}_{S1/S0}$, $\vec{\Omega}_{S2/S0}$.
2) Démontrez que : $\dfrac{\dot{x}_A}{\dot{\beta}} = l \sin\beta$.
3) Ecrire la condition de roulement sans glissement au point de contact I.
4) Trouver les éléments de réduction du torseur cinématique du mouvement de la tige au point G (milieu de la tige AB) par rapport à (S_0).
5) Quelle est la nature du torseur cinématique ? Déterminer son axe central.
6) Calculer la vitesse du point B par rapport à (S_0).
7) Calculer, en utilisant la composition des mouvements, l'accélération du point B par rapport à (S_0).
8) Trouver la base et la roulante du mouvement de (S_1) par rapport à (S_0).

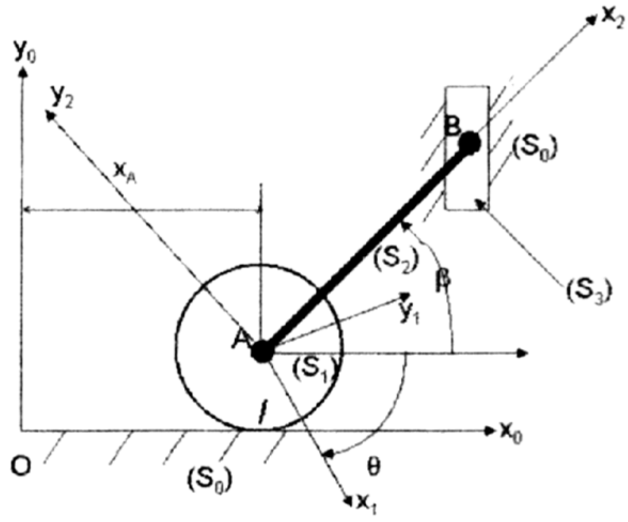


Figure 1

Exercice 2

Considérons un variateur à plateau, réglé dans une position donnée, dont le schéma cinématique est représenté dans la figure ci dessous.

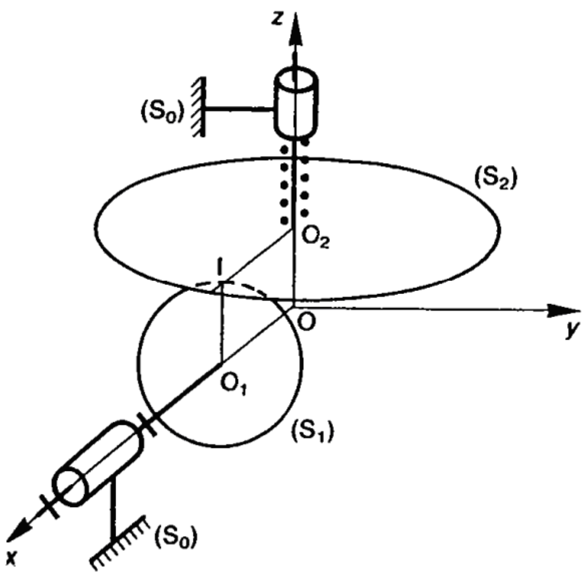
Soit R(O, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$) un repère lié à un bâti (S_0).

Un disque (S_1) de centre O_1 et de rayon r_1 a une liaison pivot d'axe (O, $\vec{x}$) avec (S_0).

Le centre O_1 est sur (O, $\vec{x}$) et le plan de (S_1) est perpendiculaire à (O, $\vec{x}$).

Un plateau circulaire (S_2) de centre O_2 a une liaison pivot glissant d'axe (O, $\vec{z}$) avec (S_0).

Le centre O_2 est sur (O, $\vec{z}$) et le plan de (S_2) est perpendiculaire à(O, $\vec{z}$).



Le plateau circulaire (S_2) roule sans glisser sur le disque (S_1) en un point I tel que : $\overrightarrow{O_2I} = r_2 \vec{x}$ ($r_2 > 0$).

On pose : $\vec{\Omega}(S_1/R) = \dot{\theta}_1 \vec{x}$ et $\vec{\Omega}(S_2/R) = \dot{\theta}_2 \vec{z}$

Questions

1) Déterminer la relation entre la vitesse angulaire $\dot{\theta}_2$ du plateau (S_2) et la vitesse angulaire $\dot{\theta}_1$ du disque (S_1).
2) Déterminer le vecteur rotation de roulement et le vecteur rotation de pivotement du mouvement de (S_2) par rapport à (S_1) en fonction de $\dot{\theta}_1$, r_1 et r_2.

Exercice n°3

On considère le système mécanique plan de la figure ci-dessous.

Le manchon (S_1) est en rotation par rapport au bâti (S_0) grâce à la liaison pivot en O d'axe (O, $\vec{x}_0$)

Le bras (S_2) est en translation par rapport à (S_1) grâce à la liaison glissière de direction $\vec{x}_1$.

Le bras (S_3) est en rotation par rapport à (S_2) grâce à la liaison pivot en A d'axe (A, $\vec{x}_0$).

Soient :

R_0 (O, $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$) repère lié à ($S_0$)

R_1 (O, $\vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1$) repère lié à ($S_1$) tel que

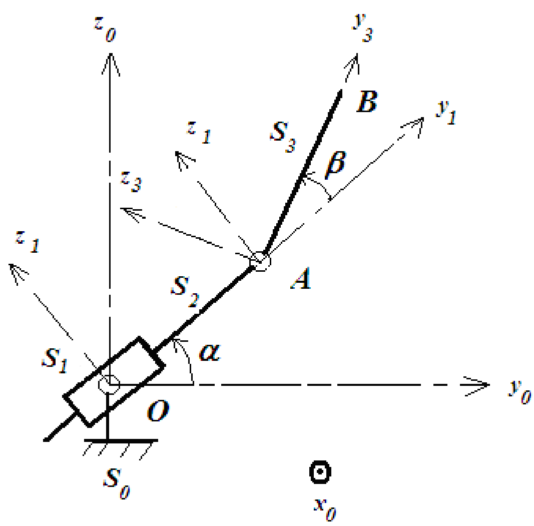
$(\widehat{\vec{y}_0, \vec{y}_1}) = (\widehat{\vec{z}_0, \vec{z}_1}) = \alpha$

R_2 (A, $\vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1$) repère lié à ($S_2$) tel que $\overrightarrow{OA} = Y\vec{y}_1$

R_3 (A, $\vec{x}_0, \vec{y}_3, \vec{z}_3$) repère lié à ($S_2$) tel que

$(\widehat{\vec{y}_1, \vec{y}_3}) = (\widehat{\vec{z}_1, \vec{z}_3}) = \beta$ et

On donne AB=L.



1) Déterminer

a. $\{\vartheta(S_1/S_0)\}_O = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_1/S_0) \\ \vec{V}(O\in S_1/S_0) \end{Bmatrix}_O$

b. $\{\vartheta(S_2/S_1)\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_2/S_1) \\ \vec{V}(A\in S_2/S_1) \end{Bmatrix}_A$ et en déduire $\{\vartheta(S_2/S_0)\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_2/S_0) \\ \vec{V}(A\in S_2/S_0) \end{Bmatrix}_A$

c. $\{\vartheta(S_3/S_0)\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_3/S_0) \\ \vec{V}(A\in S_3/S_0) \end{Bmatrix}_A$ et en déduire $\{\vartheta(S_3/S_0)\}_B = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_3/S_0) \\ \vec{V}(A\in S_3/S_0) \end{Bmatrix}_B$

2) Déterminer l'axe instantané de rotation du mouvement de (S_3) par rapport à (S_0).

3) Déterminer

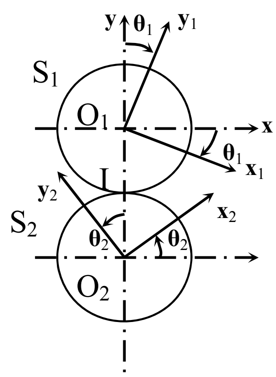
a. le vecteur accélération $\vec{\gamma}(A\in S_2/S_0)$ par dérivation.

b. le vecteur accélération $\vec{\gamma}(A\in S_2/S_0)$ par composition des vecteurs accélération en utilisant (R_1) comme repère relatif.

4) Déterminer $\vec{\gamma}(B\in S_3/S_0)$

Exercice 4

On considère les deux roues (S_1) et (S_2), supposées planes, de centres fixes respectivement O_1 et O_2. Les deux roues sont en contact au point I et en rotations autour de leurs centres respectifs O_1 et O_2.



On donne $O_1I=r_1$ et $O_2I=r_2$

1) Déterminer la vitesse de glissement en I de la roue (S_2) par rapport à la roue (S_1).

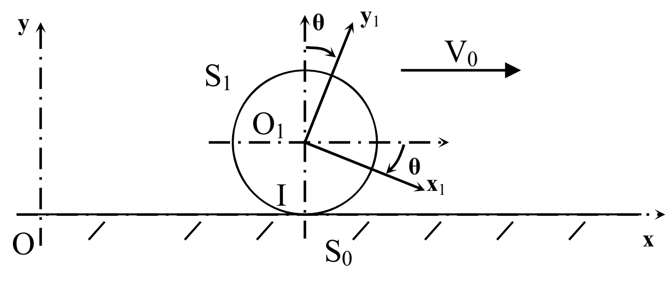
2) Ecrire la condition de roulement sans glissement en I et en déduire la relation entre les vitesses de rotation des deux roues par rapport au bâti fixe

3) Déterminer le centre instantané de rotation du mouvement plan sur plan du plan $\Pi_2(O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2)$ de S_2 par rapport au plan $\Pi_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$ de S_1

4) Déterminer la base et la roulante de ce mouvement

Exercice 5

On considère la roue (S_1) d'une voiture en contact en un point I avec la chaussée (S_0). On suppose que la voiture est en translation rectiligne avec une vitesse $\vec{V} = V_0\vec{x}$ par rapport à la chaussée (S_0).



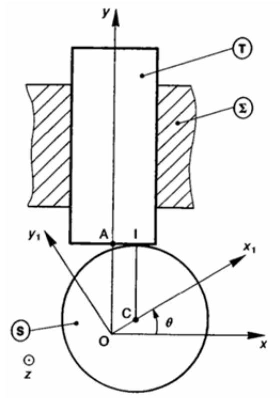
On donne $O_1I=r$

1) Déterminer la vitesse de glissement en I de la roue (S_1) par rapport à la chaussée (S_0)

2) Ecrire la condition de roulement sans glissement en I et en déduire la relation entre la vitesse de rotation de la roue et la vitesse de translation de la voiture.
3) Déterminer le centre instantané de rotation du mouvement plan sur plan du plan $\Pi_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$ de S_1 par rapport au plan $\Pi_0(O_0, \vec{x}, \vec{y})$ de S_0
    b. sans calcul
    c. avec calcul
4) Déterminer la base et la roulante de ce mouvement
    a. sans calcul
    b. avec calcul

Exercice 6

Considérons le mécanisme plan de commande d'une tige par un excentrique.



Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié au bâti (Σ). L'excentrique (S) est assimilé à un disque de centre C et de rayon r. (S) a une liaison pivot d'axe $(O, \vec{z})$ avec (Σ). Soit $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère lié à (S) tel que $(\vec{x}, \hat{\vec{x}_1}) = \theta$.

La tige (T) a une liaison glissière d'axe $(O, \vec{y})$ avec (Σ). (S) et (T) sont en contact ponctuel en un point I de la section droite extrême de la tige.

On donne OC=e et CI = r

1) Déterminer le vecteur vitesse de glissement au point I du mouvement de (S) par rapport à (T): $\vec{V}(I \in S/T)$
2) Déterminer le centre instantané de rotation H du mouvement plan sur plan du plan $\Pi_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$ de S par rapport au plan $\Pi(A, \vec{x}, \vec{y})$ de T
    a. graphiquement
    b. analytiquement
3) Déterminer la base et la roulante de ce mouvement

Exercice 7

La figure 1 représente le schéma cinématique d'un système mécanique expérimental du dispositif anti-rebond d'une suspension d'automobile à roue tirée.

Ce système est composé des éléments suivants :

- Un bâti-support (S_0) fixe dans le laboratoire d'essai. Soit $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère lié au sol S_0.

- Un bras de suspension S_1, de centre d'inertie G_1, articulé sur (S_0) par une liaison pivot d'axe $(O,\vec{y}_0)$. Soit R_1 (O, $\vec{x}_1,\vec{y}_0,\vec{z}_1$) un repère lié à S_1 tel que $(\vec{z}_0,\vec{z}_1)=(\vec{x}_0,\vec{x}_1)=\theta_1$ et $\overrightarrow{OG_1}=l\vec{x}_1$.
- Une roue indéformable S_2, de rayon R et de centre d'inertie G_2, articulé sur (S_1) par une liaison pivot d'axe (G_2, $\vec{y}_0$). Soit R_2 (G_2, $\vec{x}_2,\vec{y}_0,\vec{z}_2$) un repère lié à S_2 tel que $(\vec{z}_0,\vec{z}_2)=(\vec{x}_0,\vec{x}_2)=\theta_2$ et $\overrightarrow{OG_2}=h\vec{x}_1$.
- Un plateau vibrant S_3, lié à (S_0) par une liaison glissière de génératrices parallèles à $(\vec{z}_0)$ et en contact ponctuel en P avec (S_2). Le mouvement de S_3 est commandé par une manivelle S_4 articulé sur S_0 par une liaison pivot d'axe $(C,\vec{y}_0)$. On considère le repère $R_3(H,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ lié à S_3 et le repère $R_4(C,\ \vec{x}_4,\vec{y}_0,\vec{z}_4)$ lié à S_4 tel que $(\vec{z}_0,\vec{z}_4)=(\vec{x}_0,\vec{x}_4)=\theta_4$. La liaison S_3-S_4 est réalisée par un tourillon de (S_4), d'axe $(A,\vec{y}_0)$, qui reste dans une rainure horizontale, d'axe $(H,\vec{x}_0)$ creusée dans S_3. On pose $\overrightarrow{CA}=b\vec{x}_4$. (b est une constante positive).

Questions :

4- Déterminer le torseur cinématique du mouvement du solide S_1 par rapport au solide S_0 au point O $\{V(S_1/S_0)\}_O$. En déduire $\vec{V}(G_1\in S_1/S_0)$ et $\vec{V}(G_2\in S_1/S_0)$.

5- Déterminer le torseur cinématique du mouvement du solide S_2 par rapport au solide S_0 au point G_2 : $\{V(S_2/S_0)\}_{G_2}$. En déduire $\vec{V}(P\in S_2/S_0)$.

6- Déterminer le torseur cinématique du mouvement du solide S_4 par rapport au solide S_0 au point C $\{V(S_4/S_0)\}_C$. En déduire le vecteur vitesse au point A $\vec{V}(A\in S_4/S_0)$.

7- Déterminer la trajectoire du point A du solide S_4 dans son mouvement par rapport à S_3 et la trajectoire du point A du solide S_3 dans son mouvement par rapport à S_0 .

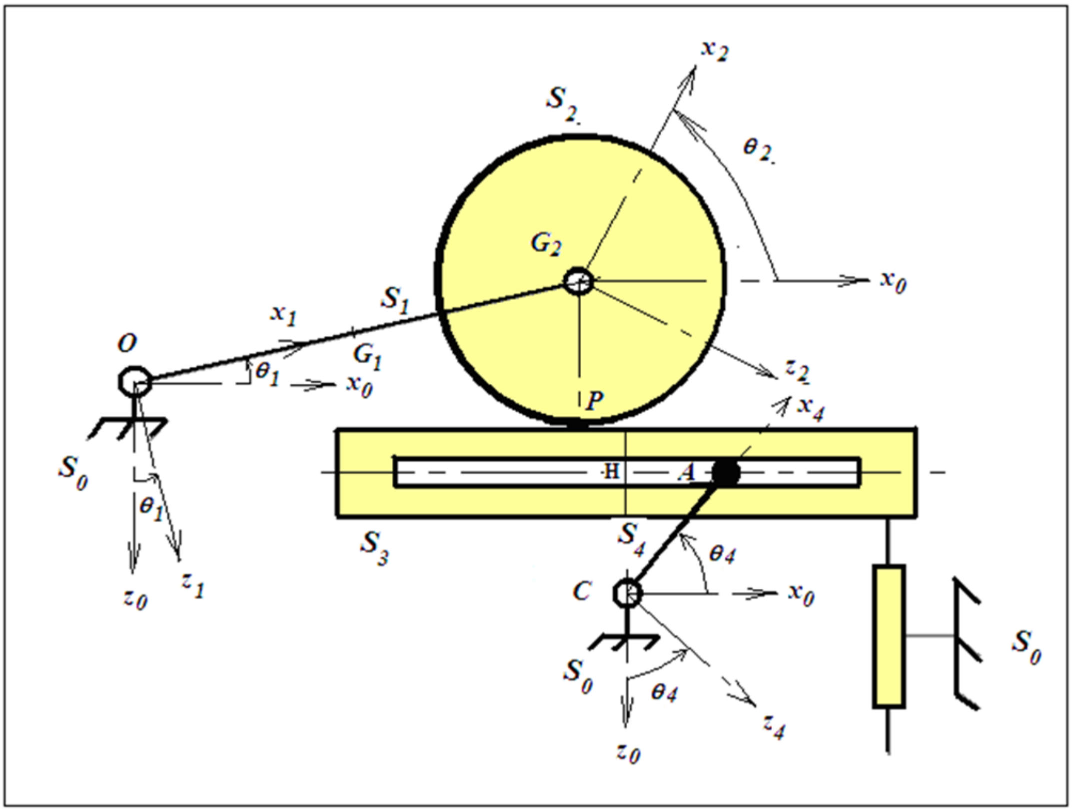
8- Exprimer le vecteur vitesse du point A $\vec{V}(A\in S_4/S_0)$ dans la base du repère R_0(O, $\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0$) et d'après la loi de décomposition du mouvement, donner les vecteurs vitesses $\vec{V}(A\in S_4/S_3)$ et $\vec{V}(A\in S_3/S_0)$.

9- Déterminer le torseur cinématique du mouvement du solide S_4 par rapport au solide S_0 au point P $\{V(S_3/S_0)\}_P$.

10- Calculer et exprimer la vitesse de glissement $\vec{V}(P\in S_2/S_3)$ dans la base du repère R_0(O, $\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0$). En déduire deux relations scalaires traduisons la condition de roulement sans glissement au point P entre S_2 et S_3

11- Dans le cas de roulement sans glissement au point P entre S_2 et S_3, identifier en le justifiant le centre instantané de rotation (CIR) du mouvement plan sur plan de S_3 par rapport à S_4 .

12-



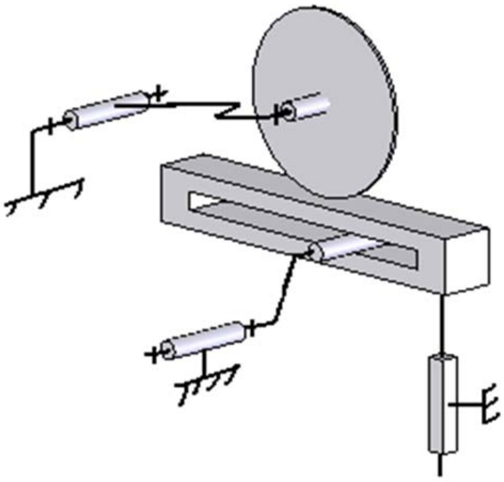


Figure1

Exercice 8

Un roulement à billes est un ensemble de pièces insérés entre deux organes mécaniques en rotation l'un par rapport à l'autre et destiné à diminuer le frottement entre ces deux organes. Il est composé (en général) de quatre éléments : une bague extérieure, une bague intérieure, des éléments roulants (billes, rouleaux ou aiguilles) et une cage qui maintient les éléments roulants à égale distance.

Soit $R_0(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ un repère lié au bâti S_0.(non représenté sur la figure 1). Les deux bagues S_1 et S_2 et la cage S_3 sont en rotation autour de l'axe $(O,\vec{z})$ par rapport à S_0.

$$\begin{cases} \vec{\Omega}(S_1 / S_0) = \omega_1 \vec{z} \\ \vec{\Omega}(S_2 / S_0) = \omega_2 \vec{z} \\ \vec{\Omega}(S_3 / S_0) = \omega_3 \vec{z} \\ \vec{\Omega}(S / S_0) = \omega \ \vec{z} \end{cases}$$

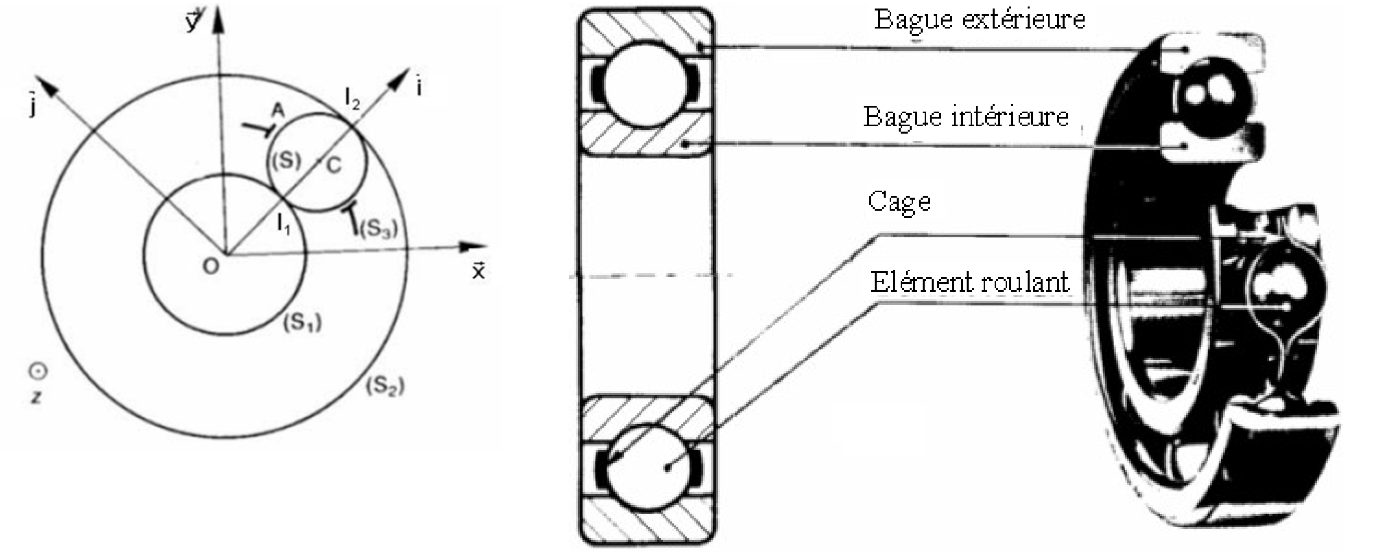


Figure 1 Représentation schématique du roulement à billes

La bille S, de centre C, animé d'un mouvement plan, roule sans glisser en I_1 sur S_1 et en I_2 sur S_2.
Soit $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{z})$ un repère tel que $\vec{i}$ ait la même direction et même sens que $\overrightarrow{OC}$.

Données : $\begin{cases} \overrightarrow{OI_1} = r_1 \vec{i} \\ \overrightarrow{OI_2} = r_2 \vec{i} \end{cases}$

1- Déterminer le torseur cinématique du mouvement de la bague intérieure S_1 par rapport au solide S_0 au point O $\{V(S_1 / S_0)\}_O$

2- Déterminer le torseur cinématique du mouvement de la bague intérieure S_2 par rapport au solide S_0 au point O $\{V(S_2 / S_0)\}_O$

3- Déterminer le torseur cinématique du mouvement de la bille S par rapport au solide S_0 au point C $\{V(S \ / S_0)\}_C$ en fonction de ω_1, ω_2, $r_1$et r_2. Déterminer le vecteur accélération du point C par rapport à S_0

4- En exprimant $\vec{V}(C \in S_3 / S_0)$ de deux manières, déterminer $\vec{\Omega}(S_3 / S_0)$ en fonction de ω_1, ω_2, $r_1$et r_2.

5- Soit le point A tel que $\overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}(r_2 - r_1)\vec{j}$. Déterminer $\vec{V}(A \in S \ / S_3)$, la vitesse de glissement de la bille S par rapport à la cage S_3 en A, en fonction de ω_1, ω_2, $r_1$et r_2.

6- On s'intéresse au mouvement plan sur plan de la bille S par rapport a S_2. Déterminer sans calcul :

   a) le C. I. R du mouvement plan sur plan de S par rapport à S_2.

b) la Base et la Roulante du mouvement plan sur plan de S par rapport à S_2.

Exercice 9

Le variateur de vitesse à galet (figure 1) est constitué de deux plateaux en forme de cône (1) et (2) entre lesquels est enfermée une bille (3), de centre C et de rayon R, maintenue par un galet (4) pouvant se déplacer suivant la direction $\vec{y}$ afin de modifier le rapport de variation du mécanisme. Un ressort (5) exerce un effort permanent sur le plateau moteur afin d'éviter le glissement entre la bille et les deux plateaux. Le porte galet (5) est supposé fixe par rapport au bâti (0) pendant le fonctionnement.

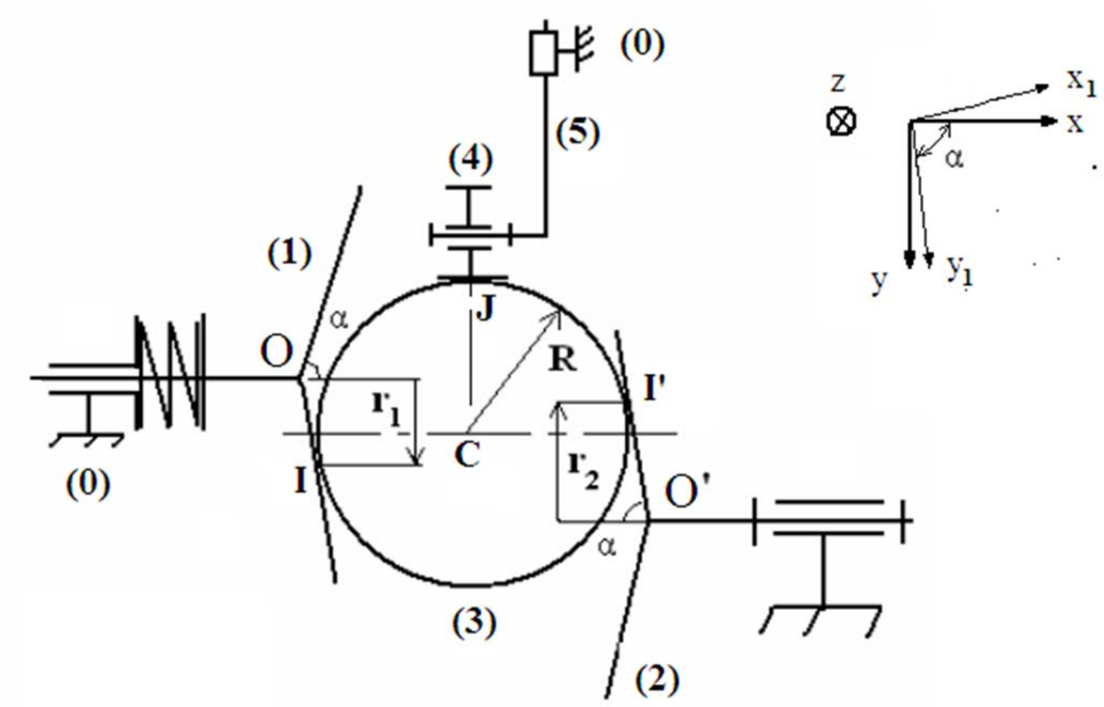


Figure n°1

Soient O et O' les sommets respectifs des formes coniques du plateau moteur (1) et du plateau récepteur (2) et 2α l'angle d'ouverture des deux cônes.

Soit R(O, $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$) un repère lié au bâti (0).

Le plateau moteur (1) a une liaison pivot glissant d'axe (O, $\vec{x}$) avec le bâti (0).

Le plateau récepteur (2) a une liaison pivot d'axe (O', $\vec{x}$) avec le bâti (0).

On pose $\overrightarrow{OO'} = a\vec{x} + b\vec{y}$ *(a et b sont des constantes positives)*

On pose: $\vec{\Omega}(1/0) = \omega_1\vec{x}$, $\vec{\Omega}(2/0) = \omega_2\vec{x}$ et $\vec{\Omega}(3/0) = \omega_3\vec{x}$

La vitesse angulaire du plateau moteur est considérée positive : $\omega_1 > 0$.

Une bille (3), de rayon R, roule sans glisser en I sur (1) et en I' sur (2).

Soient r_1 et r_2 les distances séparant, respectivement, I à l'axe (O, $\vec{x}$) et I' à l'axe (O', $\vec{x}$)

1/ Déterminer

a. $\{\mathcal{V}(1/0)\}_O$ et en déduire $\{\mathcal{V}(1/0)\}_I$.

b. $\{\mathcal{V}(2/0)\}_{O'}$ et en déduire $\{\mathcal{V}(2/0)\}_{I'}$.

2/ Déterminer le vecteur vitesse du point C de la bille (3) par rapport au bâti (0) : $\vec{V}(C \in 3/0)$.

3/ Déterminer le vecteur vitesse de glissement en I du plateau (1) par rapport à la bille (3).

4/ Déterminer le vecteur vitesse de glissement en I' du plateau (2) par rapport à la bille (3).

5/ En appliquant la condition de roulement sans glissement en I et en I' déduire le rapport des vitesses de rotation $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ en fonction de r_1 et r_2.

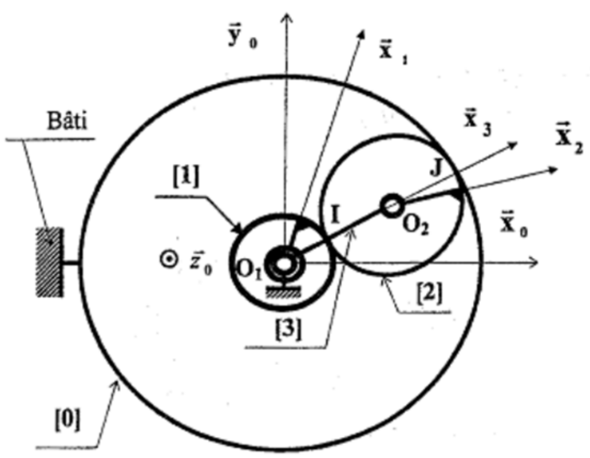
6/ On en déduit la vitesse de rotation ω_3 de la bille (3) par rapport au bâti (0) en fonction de la vitesse de rotation ω_1 du plateau moteur (1) par rapport au bâti (0).

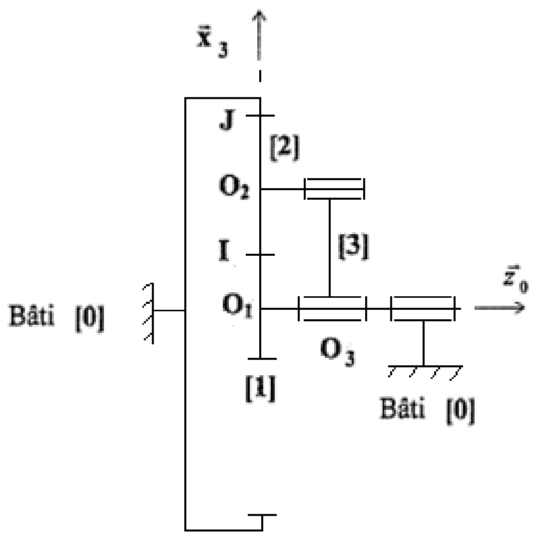
Exercice 10

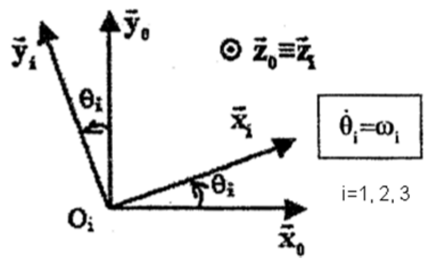
La figure 1 représente le schéma cinématique d'un bloc de réducteur épicycloïdal composé des solides suivants :

- La couronne (0), solidaire avec le bâti qui est lié au repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.
- Le planétaire (1), auquel est lié le repère $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ tel que $\overrightarrow{OO_1} = -a\vec{z}_0$. Il est en liaison pivot d'axe $(O_1, \vec{z}_0)$ avec la couronne (0). Son mouvement est paramétré par l'angle $\theta_1 = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$.
- Le satellite (2) de masse M (au nombre de trois), auquel est lié le repère $R_2(O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$. Il est en liaisons supposées ponctuelles de normale $(I, \vec{x}_3)$ avec le planétaire (1) d'une part, et de normale $(J, \vec{x}_3)$ avec la couronne (0) d'autre part. Son mouvement est paramétré par l'angle $\theta_2 = (\vec{x}_0, \vec{x}_2) = (\vec{y}_0, \vec{y}_2)$. On pose $\overrightarrow{O_1I} = R_1\vec{x}_3$, $\overrightarrow{O_1J} = R_0\vec{x}_3$ et $\overrightarrow{IO_2} = \overrightarrow{O_2J} = R_2\vec{x}_3$.
- Le porte satellite (3) , qui est lié au repère $R_3(O_3, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)$ tel que $\overrightarrow{O_1O_3} = -a_1\vec{z}_0$. Il est en liaison pivot d'axe $(O_2, \vec{z}_0)$ avec le satellite (2) d'une part, et en liaison pivot d'axe $(O_3, \vec{z}_0)$ avec la couronne (0) d'autre part. Son mouvement est paramétré par l'angle $\theta_3 = (\vec{x}_0, \vec{x}_3) = (\vec{y}_0, \vec{y}_3)$.

On note : $\omega_i = \dot{\theta}_i$ (i=1, 2, 3) les vitesses angulaires des différents solides.







Partie I : étude cinématique :

1/ Exprimer la relation entre les rayons R_0, R_1, R_2 traduisant la condition géométrique assurant la mise en contact des solides (1), (2) et (3).

2/ Déterminer

c. $\{\vartheta(1/0)\}_{O_1}$.

d. $\{\vartheta(3/0)\}_{O_1}$

e. $\{\vartheta(2/3)\}_{O_2}$

f. $\{\vartheta(2/0)\}_{O_2}$

2/ Déterminer $\{\vartheta(1/3)\}_{O_1}$. En déduire la vitesse $\vec{V}(I \in 1/3)$.

3/ Déterminer $\{\vartheta(2/3)\}_{O_2}$. En déduire la vitesse $\vec{V}(I \in 2/3)$.

4/ En appliquant la condition de roulement sans glissement au point de contact I entre les solides (1) et (2), déduire la relation entre les vitesses angulaires ω_1, ω_2 et ω_3.

5/ Déterminer $\{\vartheta(2/0)\}_{O_2}$. En déduire la vitesse $\vec{V}(J \in 2/0)$.

6/ En appliquant la condition de roulement sans glissement au point de contact J entre les solides (2) et (0), déduire la relation entre les vitesses angulaires ω_2 et ω_3.

7/ A partir des relations établies précédemment, déduire l'expression du rapport de transmission $\omega_3/\ \omega_1$ en fonction du rapport $K=R_1/R_0$.

Correction

Exercice 1

1) $\vec{\Omega}(S_1/S_0)=\dot{\theta}\vec{z}_0$

$\vec{\Omega}(S_2/S_0)=\dot{\beta}\vec{z}_0$

2) L'abscisse du point B, x_B, dans le repère R_0 est constante

$x_B = x_A + l\cos\beta = cte$

d'où

$\dot{x}_B = \dot{x}_A - \dot{\beta}\, l\sin\beta = 0 \qquad \Rightarrow \dot{x}_A = \dot{\beta}\, l\sin\beta \qquad \Rightarrow \boxed{\dfrac{\dot{x}_A}{\dot{\beta}} = l\sin\beta}$

3) La condition de roulement sans glissement en I s'écrit:

$$\vec{V}(I\in S_1/S_0)=\vec{0}$$

Or

$$\vec{V}(I\in S_1/S_0)=\vec{V}(A\in S_1/S_0)+\vec{\Omega}(S_1/S_0)\wedge\vec{AI}$$

$$\Rightarrow \vec{V}(I\in S_1/S_0)=\dot{x}_A\vec{x}_0+\dot{\theta}\vec{z}_0\wedge -r\vec{y}_0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V}(I\in S_1/S_0)=\dot{x}_A\vec{x}_0+\dot{\theta}\vec{z}_0\wedge -r\vec{y}_0}$$

4) $\{\mathcal{G}(S_2/S_0)\}_G=\begin{Bmatrix}\vec{\Omega}(S_2/S_0)\\ \vec{V}(G\in S_2/S_0)\end{Bmatrix}_G=\begin{Bmatrix}\dot{\beta}\vec{z}_0\\ \vec{V}(G\in S_2/S_0)\end{Bmatrix}_G$

$\vec{V}(G\in S_2/S_0)=\vec{V}(A\in S_2/S_0)+\vec{\Omega}(S_2/S_0)\wedge\vec{AG}$

or $\quad \vec{V}(A\in S_2/S_0)=\vec{V}(A\in S_1/S_0)=\dot{x}_A\vec{x}_0$

d'où $\quad \vec{V}(G\in S_2/S_0)=\dot{x}_A\vec{x}_0+\dot{\beta}\vec{z}_0\wedge\dfrac{l}{2}\vec{x}_2$

$\Rightarrow \quad \vec{V}(G\in S_2/S_0)=\dot{x}_A\vec{x}_0+\dfrac{l}{2}\dot{\beta}\vec{y}_2$

$$\Rightarrow \boxed{\{\mathcal{G}(S_2/S_0)\}_G=\begin{Bmatrix}\dot{\beta}\vec{z}_0\\ \dot{x}_A\vec{x}_0+\dfrac{l}{2}\dot{\beta}\vec{y}_2\end{Bmatrix}_G}$$

5) L'invariant scalaire du torseur $\{\mathcal{G}(S_2/S_0)\}$ est:

$\Im=\vec{\Omega}(S_2/S_0)\bullet\vec{V}(G\in S_2/S_0)=\dot{\beta}\vec{z}_0\bullet\left(\dot{x}_A\vec{x}_0+\dfrac{l}{2}\dot{\beta}\vec{y}_2\right)=0$

et $\vec{\Omega}(S_2/S_0)=\dot{\beta}\vec{z}_0\neq\vec{0}$

alors $\{\mathcal{G}(S_2/S_0)\}$ est un glisseur

son axe central réprésentant l'axe instantanné de rotation du mouvement de S_2 par rapport à S_0 est la droite (Δ) // à $\vec{\Omega}(S_2/S_0)$ donc à $\vec{z}_0$ et passant par le point H tel que:

$\vec{AH}=\dfrac{\vec{\Omega}(S_2/S_0)\wedge\vec{V}(A\in S_2/S_0)}{\left\|\vec{\Omega}(S_2/S_0)\right\|^2}=\dfrac{\dot{\beta}\vec{z}_0\wedge\dot{x}_A\vec{x}_0}{\dot{\beta}^2}=\dfrac{\dot{x}_A}{\dot{\beta}}\vec{y}_0$

or $\dfrac{\dot{x}_A}{\dot{\beta}}=l\sin\beta$

D'où $\boxed{\overrightarrow{AH} = l\sin\beta\,\vec{y}_0}$

Remarque

Le point H représente le centre instantané de rotation du mouvement plan sur plan du plan $(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2)$ lié à la tige S_2 par rapport au plan $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ lié à S_0.
Il peut être déterminé aussi graphiquement.
En effet,

- la vitesse du point A, $\vec{V}(A \in S_2/S_0)$, est // à $\vec{x}_0$. H appartient alors à la droite passant par A et $\perp$ à $\vec{x}_0$ c.à.d. $H \in (A, \vec{y}_0)$
- la vitesse du point B, $\vec{V}(B \in S_2/S_0) = \vec{V}(B \in S_3/S_0)$, est // à $\vec{y}_0$ (liaison glissière de direction $\vec{y}_0$ entre S_3 et S_0). H appartient alors à la droite passant par B et $\perp$ à $\vec{y}_0$ c.à.d. $H \in (B, \vec{x}_0)$

d'où $H = (A, \vec{y}_0) \cap (B, \vec{x}_0)$ (voir figure)

d'après la figure on déduit:

$$\boxed{\overrightarrow{AH} = l\sin\beta\,\vec{y}_0}$$

6) $\vec{V}(B \in S_2/S_0) = \vec{V}(A \in S_2/S_0) + \vec{\Omega}(S_2/S_0) \wedge \overrightarrow{AB}$

d'où $\vec{V}(B \in S_2/S_0) = \dot{x}_A\,\vec{x}_0 + \dot{\beta}\,\vec{z}_0 \wedge l\,\vec{x}_2$

$\Rightarrow \vec{V}(B \in S_2/S_0) = \dot{x}_A\,\vec{x}_0 + l\dot{\beta}\,\vec{y}_2$

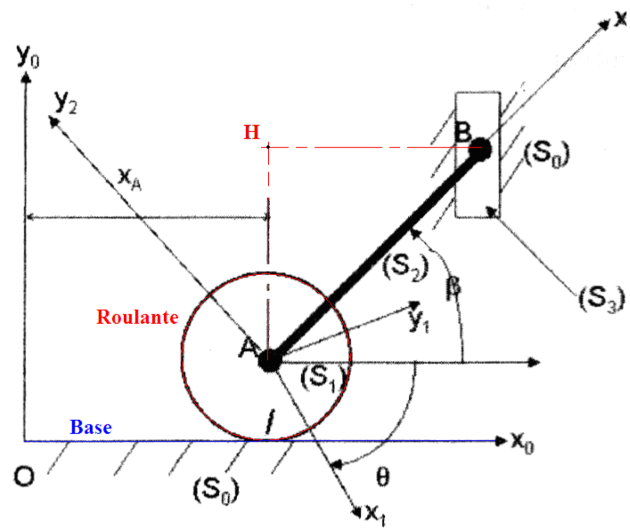
$\Rightarrow$

$\vec{V}(B \in S_2/S_0) = (\dot{x}_A - l\dot{\beta}\sin\beta)\vec{x}_0 + \cos\beta\,\vec{y}_0$

$\Rightarrow \vec{V}(B \in S_2/S_0) = 0\vec{x}_0 + l\dot{\beta}\cos\beta\,\vec{y}_0$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\vec{V}(B \in S_2/S_0) = \vec{V}(B \in S_3/S_0) = l\dot{\beta}\cos\beta\,\vec{y}_0}$$



7) $\vec{\gamma}(B \in S_2/S_0) = \vec{\gamma}(B \in S_3/S_0) = \left.\dfrac{d\vec{V}(B \in S_3/S_0)}{dt}\right|_{/R_0}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\gamma}(B \in S_2/S_0) = \vec{\gamma}(B \in S_3/S_0) = l\ddot{\beta}\cos\beta\,\vec{y}_0 - l\dot{\beta}^2\sin\beta\,\vec{y}_0}$$

8) Suite à la condition de roulement sans glissement en I on a:

$$\vec{V}(I \in S_1/S_0) = \vec{0}$$

Le point I est alors le centre instantané du mouvement plan sur plan de S_1 par rapport à S_0.

- La base qui est l'ensemble des points de S_0 parcourus par le point I au cours du mouvement de S_1 par rapport à S_0 est alors la droite $(O, \vec{x}_0)$.
- La roulante qui est l'ensemble des points de S_1 occupés par le point I au cours du mouvement de S_1 par rapport à S_0 est alors le cercle de centre A et de rayon r.

Correction

a. (S_2) roule sans glisser sur (S_1), par conséquant:

$$\vec{V}(I \in S_2 / S_1) = \vec{0}$$

or $$\vec{V}(I \in S_2 / S_1) = \vec{V}(I \in S_2 / R) - \vec{V}(I \in S_1 / R)$$

avec

$$\begin{aligned}\vec{V}(I \in S_1 / R) &= \vec{V}(O_1 \in S_1 / R) + \vec{\Omega}(S_1 / R) \wedge \overrightarrow{O_1 I} \\ &= \vec{0} + \dot{\theta}_1 \vec{x} \wedge r_1 \vec{z} \\ &= -r_1 \dot{\theta}_1 \vec{y}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\vec{V}(I \in S_2 / R) &= \vec{V}(O_2 \in S_2 / R) + \vec{\Omega}(S_{21} / R) \wedge \overrightarrow{O_2 I} \\ &= \vec{0} + \dot{\theta}_2 \vec{z} \wedge r_2 \vec{x} \\ &= r_2 \dot{\theta}_2 \vec{y}\end{aligned}$$

d'où

$$\vec{V}(I \in S_2 / S_1) = (r_2 \dot{\theta}_2 + r_1 \dot{\theta}_1)\vec{y}$$

La C.R.S.G. en I est : $\vec{V}(I \in S_2 / S_1) = \vec{0}$

$$\Rightarrow (r_2 \dot{\theta}_2 + r_1 \dot{\theta}_1) = 0$$

d'où $$\dot{\theta}_2 = -\frac{r_1}{r_2}\dot{\theta}_1$$

b. Le vecteur rotation de (S_2) par rapport à (S_1) est :

$$\vec{\Omega}(S_2 / S_1) = \vec{\Omega}(S_2 / R) - \vec{\Omega}(S_1 / R) = \dot{\theta}_2 \vec{z} - \dot{\theta}_1 \vec{x}$$

Avec $\dot{\theta}_2 = -\frac{r_1}{r_2}\dot{\theta}_1$ on obtient $\vec{\Omega}(S_2 / S_1) = \left(-\frac{r_1}{r_2}\vec{z} - \vec{x}\right)\dot{\theta}_1$

Le plan tangent en I à (S_2) et (S_1) est le plan (I, $\vec{x}, \vec{y}$) d'où le vecteur normal à ce plan est $\vec{z}$

Le vecteur rotation de pivotement de (S_2) par rapport à (S_1) est // à $\vec{z}$ et vaut :

- $\vec{\Omega}_n(S_2 / S_1) = \left(\vec{\Omega}(S_2 / S_1).\vec{z}\right)\vec{z} = -\frac{r_1}{r_2}\dot{\theta}_1 \vec{z}$

Le vecteur rotation de roulement de (S_2) par rapport à (S_1) est // au plan tangent et vaut :

- $\vec{\Omega}_t(S_2 / S_1) = \vec{\Omega}(S_2 / S_1) - \vec{\Omega}_n(S_2 / S_1) = -\dot{\theta}_1 \vec{x}$

Exercice n°3

5) Déterminer

a. $\{\mathcal{V}(S_1 / S_0)\}_o = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_1 / S_0) \\ \vec{V}(O \in S_1 / S_0) \end{Bmatrix}_o = \begin{Bmatrix} \dot{\alpha}\, \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_o$

b.

i. $\{\vartheta(S_2/S_1)\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_2/S_1) \\ \vec{V}(A\in S_2/S_1) \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \vec{0}) \\ \vec{V}(A\in S_2/S_1) \end{Bmatrix}_A$

$$\vec{V}(A\in S_2/S_1) = \left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right|_{/R_1} = \left.\frac{d(y\vec{y}_1)}{dt}\right|_{/R_1} = \dot{y}\vec{y}_1$$

$$\Rightarrow \{\vartheta(S_2/S_1)\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{0}) \\ \dot{y}\vec{y}_1 \end{Bmatrix}_A$$

ii. $\{\vartheta(S_2/S_0)\}_A = \{\vartheta(S_2/S_1)\}_A + \{\vartheta(S_1/S_0)\}_A$

$$\{\vartheta(S_1/S_0)\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_1/S_0) \\ \vec{V}(A\in S_1/S_0) \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_1/S_0) \\ \vec{V}(O\in S_1/S_0) + \vec{\Omega}(S_1/S_0)\wedge\overrightarrow{OA} \end{Bmatrix}_A$$

$$\Rightarrow \{\vartheta(S_1/S_0)\}_A = \begin{Bmatrix} \dot{\alpha}\vec{x}_0 \\ \vec{0} + \dot{\alpha}\vec{x}_0\wedge y\vec{y}_1 \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \dot{\alpha}\vec{x}_0 \\ y\dot{\alpha}\vec{z}_1 \end{Bmatrix}_A$$

$$\Rightarrow \{\vartheta(S_2/S_0)\}_A = \{\vartheta(S_2/S_1)\}_A + \{\vartheta(S_1/S_0)\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{0}) \\ \dot{y}\vec{y}_1 \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} \dot{\alpha}\vec{x}_0 \\ y\dot{\alpha}\vec{z}_1 \end{Bmatrix}_A$$

$$\Rightarrow \{\vartheta(S_2/S_0)\}_A = \begin{Bmatrix} \dot{\alpha}\vec{x}_0 \\ \dot{y}\vec{y}_1 + y\dot{\alpha}\vec{z}_1 \end{Bmatrix}_A$$

c.

i. $\{\vartheta(S_3/S_0)\}_A = \{\vartheta(S_3/S_2)\}_A + \{\vartheta(S_2/S_0)\}_A$

avec :

$$\{\vartheta(S_3/S_2)\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_3/S_2) \\ \vec{V}(A\in S_3/S_2) \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \dot{\beta}\vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$$

$$\Rightarrow \{\vartheta(S_3/S_0)\}_A = \begin{Bmatrix} \dot{\beta}\vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} \dot{\alpha}\vec{x}_0 \\ \dot{y}\vec{y}_1 + y\dot{\alpha}\vec{z}_1 \end{Bmatrix}_A$$

$$\Rightarrow \{\vartheta(S_3/S_0)\}_A = \begin{Bmatrix} (\dot{\alpha}+\dot{\beta})\vec{x}_0 \\ \dot{y}\vec{y}_1 + y\dot{\alpha}\vec{z}_1 \end{Bmatrix}_A$$

ii. $\{\vartheta(S_3/S_0)\}_B = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_3/S_0) \\ \vec{V}(B\in S_3/S_0) \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_3/S_0) \\ \vec{V}(A\in S_3/S_0) + \vec{\Omega}(S_3/S_0)\wedge\overrightarrow{AB} \end{Bmatrix}_B$

$$\Rightarrow \{\vartheta(S_3/S_0)\}_B = \begin{Bmatrix} (\dot{\alpha}+\dot{\beta})\vec{x}_0 \\ \dot{y}\vec{y}_1 + y\dot{\alpha}\vec{z}_1 + (\dot{\alpha}+\dot{\beta})\vec{x}_0\wedge L\vec{y}_3 \end{Bmatrix}_B$$

$$\Rightarrow \{\vartheta(S_3/S_0)\}_B = \begin{Bmatrix} (\dot{\alpha}+\dot{\beta})\vec{x}_0 \\ \dot{y}\vec{y}_1 + y\dot{\alpha}\vec{z}_1 + L(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\vec{z}_3 \end{Bmatrix}_B$$

6) Déterminer l'axe instantané de rotation du mouvement de (S_3) par rapport à (S_0).

L'axe instantané de rotation du mouvement de (S_3) par rapport à (S_0), (Δ), est l'axe central du torseur $\{\vartheta(S_3/S_0)\}$.

(Δ) est // à $\vec{\Omega}(S_3/S_0)$ d'où (Δ) est // $\vec{x}_0$

Soit $H_0 = proj_{\perp\Delta}(A)$ alors

$$\overrightarrow{AH_0} = \frac{\vec{\Omega}(S_3/S_0)\wedge\vec{V}(A\in S_3/S_0)}{\left\|\vec{\Omega}(S_3/S_0)\right\|^2} = \frac{(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\vec{x}_0\wedge(\dot{y}\vec{y}_1+y\dot{\alpha}\vec{z}_1)}{(\dot{\alpha}+\dot{\beta})^2} = \frac{\dot{y}}{(\dot{\alpha}+\dot{\beta})}\vec{z}_1 - \frac{y\dot{\alpha}}{(\dot{\alpha}+\dot{\beta})}\vec{y}_1$$

L'axe instantané de rotation du mouvement de (S_3) par rapport à (S_0), (Δ), est alors la droite passant par H_0 et // $\vec{x}_0$:

$$(\Delta)=(H_0,\ \vec{x}_0)$$

7) Déterminer

a. le vecteur accélération $\vec{\gamma}(A\in S_2/S_0)$ par dérivation.

$$\vec{\gamma}(A\in S_2/S_0) = \left(\frac{d\vec{V}(A\in S_2/S_0)}{dt}\right)_{R_0} = \left(\frac{d(\dot{y}\vec{y}_1+y\dot{\alpha}\vec{z}_1)}{dt}\right)_{R_0}$$

$$= \ddot{y}\vec{y}_1 + \dot{y}\left(\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right)_{R_0} + \dot{y}\dot{\alpha}\vec{z}_1 + y\ddot{\alpha}\vec{z}_1 + y\dot{\alpha}\left(\frac{d\vec{z}_1}{dt}\right)_{R_0}$$

$$= \ddot{y}\vec{y}_1 + \dot{y}\left(\dot{\alpha}\vec{x}_0\wedge\vec{y}_1\right) + \dot{y}\dot{\alpha}\vec{z}_1 + y\ddot{\alpha}\vec{z}_1 + y\dot{\alpha}\left(\dot{\alpha}\vec{x}_0\wedge\vec{z}_1\right)$$

$$\vec{\gamma}(A\in S_2/S_0) = \ddot{y}\vec{y}_1 + 2\dot{y}\dot{\alpha}\vec{z}_1 + y\ddot{\alpha}\vec{z}_1 - y\dot{\alpha}^2\vec{y}_1$$

b. le vecteur accélération $\vec{\gamma}(A\in S_2/S_0)$ par composition des vecteurs accélération en utilisant (R_1) comme repère relatif.

$$\vec{\gamma}(A\in S_2/S_0) = \vec{\gamma}(A\in S_2/S_1) + \vec{\gamma}(A\in S_1/S_0) + 2\vec{\Omega}(S_1/S_0)\wedge\vec{V}(A\in S_2/S_1)$$

i. $$\vec{\gamma}(A\in S_2/S_1) = \left(\frac{d\vec{V}(A\in S_2/S_1)}{dt}\right)_{R_1}$$

$$= \left(\frac{d(\dot{y}\vec{y}_1)}{dt}\right)_{R_1} = \ddot{y}\vec{y}_1 + \dot{y}\left(\frac{d\vec{y}_1}{dt}\right)_{R_0} = \ddot{y}\vec{y}_1 + \dot{y}\left(\dot{\alpha}\vec{x}_0\wedge\vec{y}_1\right)$$

$$= \ddot{y}\vec{y}_1 + \dot{y}\dot{\alpha}\vec{z}_1$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}(A\in S_2/S_1) = \ddot{y}\vec{y}_1$$

- $$\vec{\gamma}(A\in S_1/S_0) = \vec{\gamma}(O\in S_1/S_0) + \left(\frac{d\vec{\Omega}(S_1/S_0)}{dt}\right)_{R_0}\wedge\overrightarrow{OA} + \vec{\Omega}(S_1/S_0)\wedge\left(\vec{\Omega}(S_1/S_0)\wedge\overrightarrow{OA}\right)$$

$$\vec{\gamma}(A\in S_1/S_0) = \vec{0} + \ddot{\alpha}\vec{x}_0\wedge y\vec{y}_1 + \dot{\alpha}\vec{x}_0\wedge\left(\dot{\alpha}\vec{x}_0\wedge y\vec{y}_1\right)$$

$$\vec{\gamma}(A\in S_1/S_0) = y\ddot{\alpha}\vec{z}_1 - y\dot{\alpha}^2\vec{y}_1$$

- $$2\vec{\Omega}(S_1/S_0)\wedge\vec{V}(A\in S_2/S_1) = 2\dot{\alpha}\vec{x}_0\wedge\dot{y}\vec{y}_1 = 2\dot{\alpha}\dot{y}\vec{z}_1$$

d'où $\vec{\gamma}(A \in S_2/S_0) = \ddot{y}\,\vec{y}_1 + 2\dot{y}\,\dot{\alpha}\,\vec{z}_1 + y\,\ddot{\alpha}\,\vec{z}_1 - y\,\dot{\alpha}^2\,\vec{y}_1$

8) Déterminer $\vec{\gamma}(B \in S_3/S_0)$

$$\vec{\gamma}(B \in S_3/S_0) = \vec{\gamma}(A \in S_3/S_0) + \left(\frac{d\vec{\Omega}(S_3/S_0)}{dt}\right)_{R_0} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\Omega}(S_3/S_0) \wedge \left(\vec{\Omega}(S_3/S_0) \wedge \overrightarrow{AB}\right)$$

- $\vec{\gamma}(A \in S_3/S_0) = \vec{\gamma}(A \in S_2/S_0)$
- $\left(\frac{d\vec{\Omega}(S_3/S_0)}{dt}\right)_{R_0} \wedge \overrightarrow{AB} = (\ddot{\alpha} + \ddot{\beta})\vec{x}_0 \wedge L\vec{y}_2 = L(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta})\vec{z}_2$
- $(\dot{\alpha} + \dot{\beta})\vec{x}_0 \wedge \left((\dot{\alpha} + \dot{\beta})\vec{x}_0 \wedge L\vec{y}_2\right) = -L(\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2\,\vec{y}_2$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}(B \in S_3/S_0) = \ddot{y}\,\vec{y}_1 + 2\dot{y}\,\dot{\alpha}\,\vec{z}_1 + y\,\ddot{\alpha}\,\vec{z}_1 - y\,\dot{\alpha}^2\,\vec{y}_1 + L(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta})\vec{z}_2 - L(\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2\,\vec{y}_2$$

Exercice n° 4

1) la vitesse de glissement en I de la roue (S_2) par rapport à la roue (S_1) est :

$$\vec{V}(I \in S_2/S_1) = \vec{V}(I \in S_2/R) - \vec{V}(I \in S_1/R)$$

avec

$$\vec{V}(I \in S_2/R) = \vec{V}(O_2 \in S_2/R) + \vec{\Omega}(S_2/R) \wedge \overrightarrow{O_2 I}$$
$$= \vec{0} + \dot{\theta}_2\,\vec{z} \wedge r_2\,\vec{y}$$
$$= -r_2\,\dot{\theta}_2\,\vec{x}$$

et

$$\vec{V}(I \in S_1/R) = \vec{V}(O_1 \in S_1/R) + \vec{\Omega}(S_1/R) \wedge \overrightarrow{O_1 I}$$
$$= \vec{0} + \dot{\theta}_1\,\vec{z} \wedge -r_1\,\vec{y}$$
$$= r_1\,\dot{\theta}_1\,\vec{x}$$

d'où

$$\vec{V}(I \in S_2/S_1) = \vec{V}(I \in S_2/R) - \vec{V}(I \in S_1/R) = -(r_2\,\dot{\theta}_2\,\vec{x}) - (r_1\,\dot{\theta}_1\,\vec{x})$$

$$\Rightarrow \vec{V}(I \in S_2/S_1) = -(r_2\,\dot{\theta}_2 + r_1\,\dot{\theta}_1)\vec{x}$$

2) La condition de roulement sans glissement en I s'écrit:

$$\vec{V}(I \in S_2/S_1) = \vec{0}$$

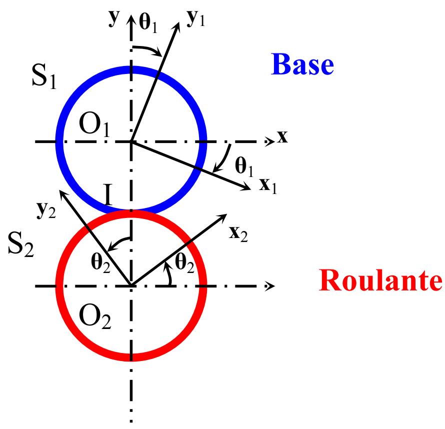
$$\Rightarrow r_2\,\dot{\theta}_2 + r_1\,\dot{\theta}_1 = 0$$

d'où $$\dot{\theta}_2 = \frac{-r_1}{r_2}\dot{\theta}_1$$

3) Suite à la condition de roulement sans glissement en I alors on a $\vec{V}(I \in \Pi_2 / \Pi_1) = \vec{V}(I \in S_2 / S_1) = \vec{0}$. Le point I est alors le centre instantané de rotation du mouvement plan sur plan de Π_2 par rapport à Π_1.

4) La base est l'ensemble des points de Π_1 donc de S_1 occupés par le C.I.R. I donc c'est le cercle de centre O_1 et de rayon r_1

La roulante est l'ensemble des points de Π_2 donc de S_2 occupés par le C.I.R. I donc c'est le cercle de centre O_2 et de rayon r_2



Exercice n° 5

2) la vitesse de glissement en I de la roue (S_1) par rapport à la chaussée (S_0) est :

$$\vec{V}(I \in S_1 / S_0) = \vec{V}(I \in S_1 / R) - \vec{V}(I \in S_0 / R)$$

avec

$$\begin{aligned}\vec{V}(I \in S_1 / R) &= \vec{V}(O_1 \in S_1 / R) + \vec{\Omega}(S_1 / R) \wedge \overrightarrow{O_1 I} \\ &= V_0 \vec{x} + \dot{\theta} \vec{z} \wedge -r \vec{y} \\ &= (V_0 + r\dot{\theta}) \vec{x}\end{aligned}$$

et

$$\vec{V}(I \in S_0 / R) = \vec{0}$$

d'où

$$\vec{V}(I \in S_1 / S_0) = (V_0 + r\dot{\theta}) \vec{x}$$

3) La condition de roulement sans glissement en I s'écrit:

$$\vec{V}(I \in S_1 / S_0) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow (V_0 + r\dot{\theta}) = 0$$

d'où $$V_0 = -r\dot{\theta}$$

3)

a. Puisque (S_1) roule sans glisser en I par rapport à (S_0) alors $\vec{V}(I \in \Pi_1 / \Pi_0) = \vec{V}(I \in S_1 / S_0) = \vec{0}$

D'où le C.I.R. du mouvement plan sur plan de Π_1 par rapport à Π_0 est le point I.

b. Soit A le le C.I.R. du mouvement plan sur plan de Π_1 par rapport à Π_0. La position de A par rapport au point O_1 est déterminée par le vecteur:

$$\overrightarrow{O_1A} = \frac{\vec{\Omega}(S_1/S_0) \wedge \vec{V}(O_1 \in S_1/S_0)}{\left\|\vec{\Omega}(S_1/S_0)\right\|^2} = \frac{\dot{\theta}\vec{z} \wedge V_0\vec{x}}{\dot{\theta}^2} = \frac{V_0}{\dot{\theta}}\vec{y}$$

Or on a $V_0 = -r\dot{\theta}$ (C.R.S.G.) (voir question 2)

D'où $\overrightarrow{O_1A} = \frac{-r\dot{\theta}}{\dot{\theta}}\vec{y} = -r\vec{y} = \overrightarrow{O_1I}$ $\Rightarrow$ **A=I**

4)

a. La base est l'ensemble des points de $\Pi_0(O, \vec{x}, \vec{y})$ donc de (S_0) occupés par le point I d'où c'est la droite

$(O, \vec{x})$. La roulante est l'ensemble des points de $\Pi_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$ donc de (S_1) occupés par le point I d'où

c'est le cercle de centre O_1 et de rayon r.

b.

- Equation de la base du mouvement plan sur plan de Π_1 par rapport à Π_0.

Déterminons le vecteur position du (C.I.R.) I dans $\Pi_0(O, \vec{x}, \vec{y})$ et exprimons le dans la base $(\vec{x}, \vec{y})$

$$\overrightarrow{OI} = x_I(t)\vec{x} = (V_0 t + cte)\vec{x}$$

D'où l'équation paramétrique de la base en fonction du temps est : $\begin{cases} x_I = V_0 t + cte \\ y_I = 0 \end{cases}$ $\forall$ t

C'est l'équation de la droite $(O, \vec{x})$.

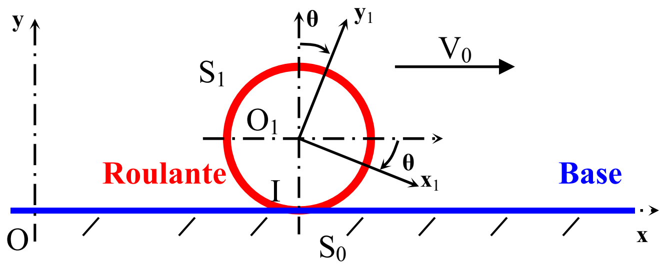
- Equation de la roulante du mouvement plan sur plan de Π_1 par rapport à Π_0.

Déterminons le vecteur position du (C.I.R.) I dans $\Pi_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$ et exprimons le dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1)$

On a : $\overrightarrow{O_1I} = -r\vec{y} = -r(\cos\theta\vec{y}_1 + \sin\theta\vec{x}_1)$

D'où l'équation paramétrique de la roulante en fonction de l'angle θ est : $\begin{cases} x_{1I} = -r\sin\theta \\ y_{1I} = -r\cos\theta \end{cases}$ $\forall\ \theta$

On peut écrire que $\forall$ I $\in$ roulante on a $x_{1I}^2 + y_{1I}^2 = r^2$ d'où la roulante est le cercle de centre O_1 et de rayon r



Exercice n°6

1) La vitesse de glissement en I de la roue (S_2) par rapport à la roue (S_1) est :

$$\vec{V}(I \in S/T) = \vec{V}(I \in S/R) - \vec{V}(I \in T/R)$$

avec

$$\vec{V}(I \in S/R) = \vec{V}(O \in S/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{OI} = \vec{V}(O \in S/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CI})$$

$$= \vec{0} + \dot{\theta}\vec{z} \wedge (e\cos\theta\vec{x} + e\sin\theta\vec{y} + r\vec{y})$$

$$= e\dot{\theta}\cos\theta\vec{y} - (e\sin\theta + r)\dot{\theta}\vec{x}$$

et

$$\vec{V}(I \in T/R) = \vec{V}(A \in T/R) \ (T \ est \ en \ translation \ par \ rapport \ à \ \Sigma)$$

$$= \left.\frac{d(\overrightarrow{OA})}{dt}\right|_{/R}$$

$$= \left.\frac{d\left[(r + e\sin\theta)\vec{y}\right]}{dt}\right|_{/R}$$

$$= e\dot{\theta}\cos\theta\vec{y}$$

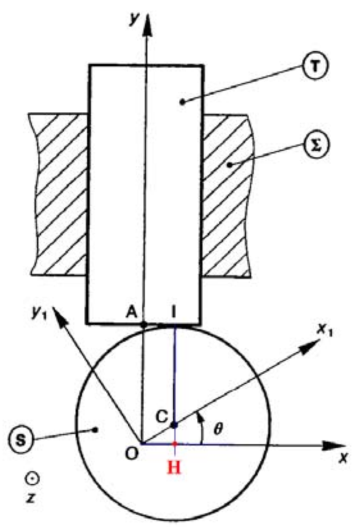
d'où

$$\vec{V}(I \in S/T) = \vec{V}(I \in S/R) - \vec{V}(I \in T/R) = (e\dot{\theta}\cos\theta\vec{y} - (e\sin\theta + r)\dot{\theta}\vec{x}) - (e\dot{\theta}\cos\theta\vec{y})$$

$$\Rightarrow \vec{V}(I \in S/T) = -(e\sin\theta + r)\dot{\theta}\vec{x}$$

2) .

a. Détermination graphique du (C.I.R.) H du mouvement plan sur plan du plan $\Pi_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$ de S par rapport au plan $\Pi(A, \vec{x}, \vec{y})$ de T.



Le vecteur vitesse $\vec{V}(I \in S/T)$ du point $I \in S/T$ est // $\vec{x} \Rightarrow$ le point H est situé alors sur la droite passant par I et perpendiculaire à $\vec{x}$, parallèle donc à $\vec{y}$.

Le vecteur vitesse $\vec{V}(O \in S/T) = \left.\frac{d\overrightarrow{AO}}{dt}\right|_{/R_T} = \left.\frac{dAO\vec{y}}{dt}\right|_{/R_T} = \frac{dAO}{dt}\vec{y}$

du point $O \in S/T$ est // $\vec{y} \Rightarrow$ le point H est situé alors sur la droite passant par O et perpendiculaire à $\vec{y}$, parallèle donc à

$\vec{x}$.

$\Rightarrow \quad H = (I, \vec{y}) \cap (O, \vec{x})$ (voir figure)

b. Détermination analytique du (C.I.R.) H du mouvement plan sur plan du plan $\Pi_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$ de S par rapport au plan $\Pi(A, \vec{x}, \vec{y})$ de T.

$$\overrightarrow{IH} = \frac{\vec{\Omega}(S/T) \wedge \vec{V}(I \in S/T)}{\left\|\vec{\Omega}(S/T)\right\|^2} = \frac{\dot{\theta}\vec{z} \wedge -(e\sin\theta + r)\dot{\theta}\vec{x}}{\dot{\theta}^2} = -(e\sin\theta + r)\vec{y} = \overrightarrow{AO}$$

D'où H est l'intersection de la droite passant par I et // à $\overrightarrow{AO}$, donc $\vec{y}$, et la droite $(O, \vec{x})$.

3)

- **Base**

Le vecteur position du point H par rapport au repère lié à Π donc à (T) est $\overrightarrow{AH}$ qui vaut:

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IH} = e\cos\theta\vec{x} - (r + e\sin\theta)\vec{y} = x_H\vec{x} + y_H\vec{y}$$

On peut écrire que x_H et y_H vérifient:

$$x_H^2 + (y_H + r)^2 = e^2$$

La base est donc le cercle de centre C' de coordonnées (0,-r) dans le repère $(A, \vec{x}, \vec{y})$ lié à Π

- **Roulante**

Le vecteur position du point H par rapport au repère lié à Π_1 donc à (S) est $\overrightarrow{OH}$ qui vaut:

$$\overrightarrow{OH} = e\cos\theta\vec{x}$$

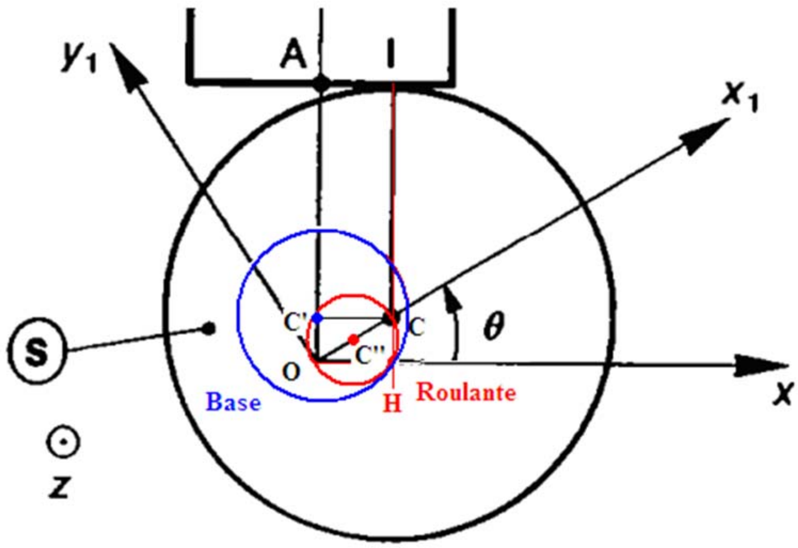
Exprimons le dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1)$ lié à Π_1

$$\overrightarrow{OH} = e\cos\theta\vec{x} = e\cos\theta(\cos\theta\vec{x}_1 - \sin\theta\vec{y}_1) = e(\cos\theta)^2\vec{x}_1 - e\cos\theta\sin\theta\vec{y}_1 = \frac{e}{2}(1 - \cos 2\theta)\vec{x}_1 - \frac{e}{2}\sin 2\theta\vec{y}_1$$

d'où $\overrightarrow{OH} = x_{1H}\vec{x}_1 + y_{1H}\vec{y}_1$ **tels que** $\begin{cases} x_{1H} = \dfrac{e}{2}(1 - \cos 2\theta) \\ y_{1H} = -\dfrac{e}{2}\sin 2\theta \end{cases}$

x_{1H} et y_{1H} vérifient: $\left(x_{1H} - \dfrac{e}{2}\right)^2 + y_{1H}^2 = \left(\dfrac{e}{2}\right)^2$

La roulante est donc le cercle de centre C'' de coordonnées $(0, \frac{e}{2})$ dans le repère $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$ lié à Π_1



Exercice 7:

2- Déterminer le torseur cinématique du mouvement du solide S_1 par rapport au solide S_0 au point O $\{V(S_1/S_0)\}_O$. En déduire $\vec{V}(G_1 \in S_1/S_0)$ et $\vec{V}(G_2 \in S_1/S_0)$.

$$\{\vartheta(S_1/S_0)\}_O = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_1/S_0) \\ \vec{V}(O \in S_1/S_0) \end{Bmatrix}_O = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O$$

- $\vec{V}(G_1 \in S_1/S_0) = \vec{V}(0 \in S_1/S_0) + \vec{\Omega}(S_1/S_0) \wedge \overrightarrow{OG_1}$

$$= \vec{0} + \dot{\theta}_1 \vec{y}_0 \wedge l\overrightarrow{x_1}$$

$$\vec{V}(G_1 \in S_1/S_0) = -l\dot{\theta}_1 \vec{z}_1$$

- $\vec{V}(G_2 \in S_1/S_0) = \vec{V}(0 \in S_1/S_0) + \vec{\Omega}(S_1/S_0) \wedge \overrightarrow{OG_2}$

$$= \vec{0} + \dot{\theta}_1 \vec{y}_0 \wedge h\overrightarrow{x_1}$$

$$\vec{V}(G_2 \in S_1/S_0) = -h\dot{\theta}_1 \vec{z}_1$$

3- Déterminer le torseur cinématique du mouvement du solide S_2 par rapport au solide S_0 au point G_2 : $\{V(S_2/S_0)\}_{G_2}$. En déduire $\vec{V}(P \in S_2/S_0)$.

$$\{\vartheta(S_2/S_0)\}_{G_2} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_2/S_0) \\ \vec{V}(G_2 \in S_2/S_0) \end{Bmatrix}_{G_2} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_2 \vec{y}_0 \\ \vec{V}(G_2 \in S_2/S_1) + \vec{V}(G_2 \in S_1/S_0) \end{Bmatrix}_{G_2} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_2 \vec{y}_0 \\ \vec{0} - h\dot{\theta}_1 \vec{z}_1 \end{Bmatrix}_{G_2}$$

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_0)\}_{G_2} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_2 \vec{y}_0 \\ -h\dot{\theta}_1 \vec{z}_1 \end{Bmatrix}_{G_2}$$

- $\vec{V}(P \in S_2/S_0) = \vec{V}(G_2 \in S_2/S_0) + \vec{\Omega}(S_2/S_0) \wedge \overrightarrow{G_2P}$

$$= -h\dot{\theta}_1 \vec{z}_1 + \dot{\theta}_2 \vec{y}_0 \wedge R\vec{z}_0$$

$$\vec{V}(P \in S_2/S_0) = -h\dot{\theta}_1 \vec{z}_1 + R\dot{\theta}_2 \vec{x}_0$$

4- Déterminer le torseur cinématique du mouvement du solide S_4 par rapport au solide S_0 au point C $\{V(S_4/S_0)\}_C$. En déduire le vecteur vitesse au point A $\vec{V}(A \in S_4/S_0)$.

$$\{\mathcal{V}(S_4/S_0)\}_C = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_4/S_0) \\ \vec{V}(C \in S_4/S_0) \end{Bmatrix}_C = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_4 \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_C$$

- $\vec{V}(A \in S_4/S_0) = \vec{V}(C \in S_4/S_0) + \vec{\Omega}(S_4/S_0) \wedge \overrightarrow{CA}$

$$= \vec{0} + \dot{\theta}_4 \vec{y}_0 \wedge b\overrightarrow{x_4}$$

$$\vec{V}(A \in S_4/S_0) = -b\dot{\theta}_4 \vec{z}_4$$

5- Déterminer la trajectoire du point A du solide S_4 dans son mouvement par rapport à S_3 et la trajectoire du point A du solide S_3 dans son mouvement par rapport à S_0.

- Trajectoire de $A \in (S_4)$ par rapport à (S_3) : c'est la droite $(H, \vec{x}_0)$
- Trajectoire de $A \in (S_3)$ par rapport à (S_0) : c'est la droite $(A, \vec{z}_0)$ avec A supposé fixe dans (S_3)

6- Exprimer le vecteur vitesse du point A $\vec{V}(A \in S_4/S_0)$ dans la base du repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ et d'après la loi de décomposition du mouvement, donner les vecteurs vitesses $\vec{V}(A \in S_4/S_3)$ et $\vec{V}(A \in S_3/S_0)$.

- $\vec{V}(A \in S_4/S_0) = -b\dot{\theta}_4 \vec{z}_4 = -b\dot{\theta}_4 \left(\sin\theta_4 \vec{x}_0 + \cos\theta_4 \vec{z}_0\right)$
- $\vec{V}(A \in S_4/S_0) = \vec{V}(A \in S_4/S_3) + \vec{V}(A \in S_3/S_0)$
- D'après la question n°4 on a $\vec{V}(A \in S_4/S_3) // \vec{x}_0$ et $\vec{V}(A \in S_3/S_0) // \vec{y}_0$

On en déduit :

$$\vec{V}(A \in S_4/S_3) = -b\dot{\theta}_4 \sin\theta_4 \vec{x}_0$$

$$\vec{V}(A \in S_3/S_0) = -b\dot{\theta}_4 \cos\theta_4 \vec{z}_0$$

7- Déterminer le torseur cinématique du mouvement du solide S_4 par rapport au solide S_0 au point P $\{V(S_3/S_0\}_P$.

$$\{\vartheta(S_3/S_0)\}_P = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_3/S_0) \\ \vec{V}(P \in S_3/S_0) \end{Bmatrix}_P$$

avec $\vec{\Omega}(S_3/S_0) = \vec{0}$ et $\vec{V}(P \in S_3/S_0) = \vec{V}(A \in S_3/S_0) = -b\dot{\theta}_4 \cos\theta_4 \vec{z}_0$

$$\Rightarrow \{\vartheta(S_3/S_0)\}_P = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ -b\dot{\theta}_4 \cos\theta_4 \vec{z}_0 \end{Bmatrix}_P$$

8- Calculer et exprimer la vitesse de glissement $\vec{V}(P \in S_2/S_3)$ dans la base du repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. En déduire deux relations scalaires traduisons la condition de roulement sans glissement au point P entre S_2 et S_3

$$\vec{V}(P \in S_2/S_3) = \vec{V}(P \in S_2/S_0) - \vec{V}(P \in S_3/S_0)$$

$$= -h\dot{\theta}_1 \vec{z}_1 + R\dot{\theta}_2 \vec{x}_0 - \left(-b\dot{\theta}_4 \cos\theta_4 \vec{z}_0\right)$$

$$= -h\dot{\theta}_1\left(\sin\theta_1 \vec{x}_0 + \cos\theta_1 \vec{z}_0\right) + R\dot{\theta}_2 \vec{x}_0 + b\dot{\theta}_4 \cos\theta_4 \vec{z}_0$$

$$\vec{V}(P \in S_2/S_3) = \left(-h\dot{\theta}_1 \sin\theta_1 + R\dot{\theta}_2\right)\vec{x}_0 + \left(-h\dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + b\dot{\theta}_4 \cos\theta_4\right)\vec{z}_0$$

La condition de roulement sans glissement en P implique : $\vec{V}(P \in S_2/S_3) = \vec{0}$

d'où : $\begin{cases} -h\dot{\theta}_1 \sin\theta_1 + R\dot{\theta}_2 = 0 \\ -h\dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + b\dot{\theta}_4 \cos\theta_4 = 0 \end{cases}$

9- Dans le cas de roulement sans glissement au point P entre S_2 et S_3, identifier en le justifiant le centre instantané de rotation (CIR) du mouvement plan sur plan de S_3 par rapport à S_4.

Puisque $\vec{V}(P \in S_2/S_3) = \vec{0}$ on en déduit que P est le centre instantané de rotation (CIR) du mouvement plan sur plan de S_3 par rapport à S_4.

Exercice 8

$$\{V(S_1/S_0\}_O = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_1/S_0) \\ \vec{V}(0 \in S_1/S_0) \end{Bmatrix}_O = \begin{Bmatrix} \omega_1 \vec{z}) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O$$

7- $\{V(S_2/S_0\}_O = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_2/S_0) \\ \vec{V}(0 \in S_2/S_0) \end{Bmatrix}_O = \begin{Bmatrix} \omega_2 \vec{z}) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O$

8- $\{V(S/S_0\}_C = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S/S_0) \\ \vec{V}(C \in S/S_0) \end{Bmatrix}_C$

$$= \begin{Bmatrix} \omega\vec{z} \\ \vec{V}(C \in S/S_0) \end{Bmatrix}_O$$

- $\vec{V}(C \in S/S_0) = \vec{V}(I_1 \in S/S_0) + \omega\vec{z} \wedge \overrightarrow{I_1C}$

$$= \vec{V}(I_1 \in S/S_0) + \frac{1}{2}(r_2 - r_1)\omega\vec{j}$$

or d'après la condition de roulement sans glissement en I_1 on a:

$\vec{V}(I_1 \in S/S_0) = \vec{V}(I_1 \in S_1/S_0)$

et $\vec{V}(I_1 \in S_1/S_0) = \vec{V}(O \in S_1/S_0) + \vec{\Omega}(S_1/S_0) \wedge \overrightarrow{OI_1}$

$$= r_1\omega_1\vec{j}$$

d'où : $\vec{V}(C \in S/S_0) = r_1\omega_1\vec{j} + \frac{1}{2}(r_2 - r_1)\omega\vec{j}$ (1)

- D'autre part on a :

$\vec{V}(C \in S/S_0) = \vec{V}(I_2 \in S/S_0) + \omega\vec{z} \wedge \overrightarrow{I_2C}$

$$= \vec{V}(I_2 \in S/S_0) - \frac{1}{2}(r_2 - r_1)\omega\vec{j}$$

or d'après la condition de roulement sans glissement en I_2 on a:

$\vec{V}(I_2 \in S/S_0) = \vec{V}(I_2 \in S_2/S_0)$

et $\vec{V}(I_2 \in S_2/S_0) = \vec{V}(O \in S_2/S_0) + \vec{\Omega}(S_2/S_0) \wedge \overrightarrow{OI_2}$

$$= r_2\omega_2\vec{j}$$

d'où : $\vec{V}(C \in S/S_0) = r_2\omega_2\vec{j} - \frac{1}{2}(r_2 - r_1)\omega\vec{j}$ (2)

D'après les équations (1) et (2) on a :

$$\vec{V}(C \in S/S_0) = r_1\omega_1\vec{j} + \frac{1}{2}(r_2 - r_1)\omega\vec{j} = r_2\omega_2\vec{j} - \frac{1}{2}(r_2 - r_1)\omega\vec{j}$$

On en déduit $\omega = \dfrac{r_2\omega_2 - r_1\omega_1}{(r_2 - r_1)}$

Et en remplaçant ω par sa valeur dans $\vec{V}(C \in S/S_0)$ on obtient :

$$\vec{V}(C \in S/S_0) = r_1\omega_1\vec{j} + \frac{1}{2}(r_2 - r_1)\frac{r_2\omega_2 - r_1\omega_1}{(r_2 - r_1)}\vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{V}(C \in S/S_0) = \frac{1}{2}(r_2\omega_2 + r_1\omega_1)\vec{j}$$

d'où : $\{V(S/S_0\}_C = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S/S_0) \\ \vec{V}(C\in S/S_0) \end{Bmatrix}_C = \begin{Bmatrix} \dfrac{r_2\omega_2 - r_1\omega_1}{(r_2-r_1)}\vec{z} \\ \dfrac{1}{2}(r_2\omega_2 + r_1\omega_1)\vec{j} \end{Bmatrix}_O$

- Déterminer le vecteur accélération du point C par rapport à S_0

$$\vec{\gamma}(C\in S/S_0) = \left.\frac{d\vec{V}(C\in S/S_0)}{dt}\right|_{/S_0} = \left.\frac{d\left(\frac{1}{2}(r_2\omega_2+r_1\omega_1)\vec{j}\right)}{dt}\right|_{/S_0} = \frac{1}{2}(r_2\omega_2+r_1\omega_1)\left.\frac{d\vec{j}}{dt}\right|_{/S_0}$$

$$= \frac{1}{2}(r_2\omega_2+r_1\omega_1)\left(\left.\frac{d\vec{j}}{dt}\right|_{/S_3} + \vec{\Omega}(S_3/S_0)\wedge\vec{j}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(r_2\omega_2+r_1\omega_1)\left(\vec{0} + \omega_3\vec{z}\wedge\vec{j}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\omega_3(r_2\omega_2+r_1\omega_1)\vec{i}$$

d'où : $\vec{\gamma}(C\in S/S_0) = -\dfrac{1}{2}\omega_3(r_2\omega_2+r_1\omega_1)\vec{i}$

9- $\vec{\Omega}(S_3/S_0)$ en fonction de ω_1, ω_2, $r_1$et r_2.

1^ére méthode

$$\vec{V}(C\in S_3/S_0) = \vec{V}(C\in S_3/S) + \vec{V}(C\in S/S_0)$$

$$\vec{V}(C\in S_3/S) = \vec{0}$$

$$\vec{V}(C\in S_3/S_0) = \vec{V}(C\in S/S_0) = \frac{1}{2}(r_2\omega_2+r_1\omega_1)\vec{j} \quad (3)$$

2^ére méthode

$$\vec{V}(C\in S_3/S_0) = \vec{V}(O\in S_3/S_0) + \vec{\Omega}(S_3/S_0)\wedge\overrightarrow{OC}$$

$$\Rightarrow \vec{V}(C\in S_3/S_0) = \frac{1}{2}(r_1+r_2)\omega_3\vec{j} \quad (4)$$

En identifiant (3) à (4) on obtient

$$\omega_3 = \frac{(r_2\omega_2+r_1\omega_1)}{(r_1+r_2)}$$

D'où :

$$\vec{\Omega}(S_3/S_0) = \omega_3\vec{z} = \frac{(r_2\omega_2+r_1\omega_1)}{(r_1+r_2)}\vec{z}$$

10- $\vec{V}(A\in S\ /S_3)$ en fonction de ω_1, ω_2, $r_1$et r_2.

$$\vec{V}(A\in S\ /S_3) = \vec{V}(A\in S\ /S_0) - \vec{V}(A\in S_3/S_0)$$

$$\vec{V}(A\in S\ /S_0) = \vec{V}(C\in S\ /S_0) + \vec{\Omega}(S/S_0)\wedge\overrightarrow{CA}$$

$$= \frac{1}{2}(r_2\omega_2+r_1\omega_1)\vec{j} + \frac{r_2\omega_2 - r_1\omega_1}{(r_2-r_1)}\vec{z}\wedge\frac{1}{2}(r_2-r_1)\vec{j}$$

$$=\frac{1}{2}(r_2\omega_2+r_1\omega_1)\vec{j}-\frac{1}{2}(r_2\omega_2-r_1\omega_1)\vec{i}$$

$$\vec{V}(A\in S_3/S_0)=\vec{V}(C\in S_3/S_0)+\vec{\Omega}(S_3/S_0)\wedge\overrightarrow{CA}$$

$$=\frac{1}{2}\left[(r_2\omega_2+r_1\omega_1)\vec{j}-\frac{(r_2-r_1)}{(r_1+r_2)}(r_2\omega_2+r_1\omega_1)\vec{i}\right]$$

D'où :

$$\vec{V}(A\in S\ \ /S_3)=\frac{1}{2}(r_2\omega_2+r_1\omega_1)\vec{j}-\frac{1}{2}(r_2\omega_2-r_1\omega_1)\vec{i}$$
$$-\frac{1}{2}\left[(r_2\omega_2+r_1\omega_1)\vec{j}-\frac{(r_2-r_1)}{(r_1+r_2)}(r_2\omega_2+r_1\omega_1)\vec{i}\right]$$

$$\Rightarrow \vec{V}(A\in S\ \ /S_3)==\frac{r_1r_2}{r_1+r_2}(\omega_1-\omega_2)\vec{i}$$

11- On s'intéresse au mouvement plan sur plan de la bille S par rapport à S_2. Déterminer sans calcul :

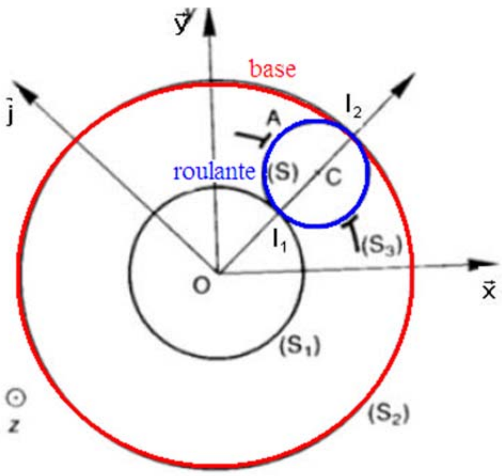
a) le C. I. R du mouvement plan sur plan de S par rapport à S_2.

Puisque $\vec{V}(I_2\in S/S_2)=\vec{0}$ on en déduit que I_2 est le C.I.R. du mouvement plan sur plan de S par rapport à S_2.

b) la Base et la Roulante du mouvement plan sur plan de S par rapport à S_2.

Base : ensemble des points de S_2 passant par I_2 au cours du mouvement $\Rightarrow$ c'est le cercle de centre O et de rayon r_2

Roulante : ensemble des points de S passant par I_2 au cours du mouvement $\Rightarrow$ c'est le cercle de centre C et de rayon $\frac{r_2-r_1}{2}$



Exercice 9

1/ Déterminer

g. $\{\vartheta(1/0)\}_O$ et en déduire $\{\vartheta(1/0)\}_I$.

- $\{\vartheta(1/0)\}_O=\left\{\begin{matrix}\vec{\Omega}(1/0)\\ \vec{V}(O\in 1/0)\end{matrix}\right\}_O=\left\{\begin{matrix}\omega_1\vec{x}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_O$.

- $$\begin{aligned}\vec{V}(I\in 1/0) &= \vec{V}(O\in 1/0)+\vec{\Omega}(1/0)\wedge\overrightarrow{OI}\\ &= \vec{0}+\omega_1\vec{x}\wedge(\frac{r_1}{tg\alpha}\vec{x}+r_1\vec{y})\\ &= r_1\omega_1\vec{z}\end{aligned}$$

$$\{\vartheta(1/0)\}_I=\begin{Bmatrix}\vec{\Omega}(1/0)\\ \vec{V}(I\in 1/0)\end{Bmatrix}_I=\begin{Bmatrix}\omega_1\vec{x}\\ r_1\omega_1\vec{z}\end{Bmatrix}_I$$

h. $\{\vartheta(2/0)\}_{O'}$ et en déduire $\{\vartheta(2/0)\}_{I'}$.

- $$\{\vartheta(2/0)\}_{O'}=\begin{Bmatrix}\vec{\Omega}(2/0)\\ \vec{V}(O'\in 2/0)\end{Bmatrix}_{O'}=\begin{Bmatrix}\omega_2\vec{x}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}_{O'}$$
- $$\begin{aligned}\vec{V}(I'\in 2/0) &= \vec{V}(O'\in 2/0)+\vec{\Omega}(2/0)\wedge\overrightarrow{O'I}\\ &= \vec{0}+\omega_2\vec{x}\wedge(-\frac{r_2}{tg\alpha}\vec{x}-r_2\vec{y})\\ &= -r_2\omega_2\vec{z}\end{aligned}$$

$$\{\vartheta(2/0)\}_{I'}=\begin{Bmatrix}\vec{\Omega}(2/0)\\ \vec{V}(I'\in 2/0)\end{Bmatrix}_{I'}=\begin{Bmatrix}\omega_2\vec{x}\\ -r_2\omega_2\vec{z}\end{Bmatrix}_{I'}$$

2/ Déterminer le vecteur vitesse du point C de la bille (3) par rapport au bâti (0) : $\vec{V}(C\in 3/0)$.

$\vec{V}(C\in 3/0)=\vec{0}$ car la position du point C est fixe par rapport au bati pendant le fonctionnement du mécanisme.

3/ Déterminer le vecteur vitesse de glissement en I du plateau (1) par rapport à la bille (3).

$$\vec{V}(I\in 1/3)=\vec{V}(I\in 1/0)-\vec{V}(I\in 3/0)$$

- $\vec{V}(I\in 1/0)=r_1\omega_1\vec{z}$
- $\vec{V}(I\in 3/0)=\vec{V}(C\in 3/0)+\vec{\Omega}(3/0)\wedge\overrightarrow{CI}$

$$\overrightarrow{CI}=-R\vec{x}_1=-R(\sin\alpha\vec{x}-\cos\alpha\vec{y})$$

$$\Rightarrow\vec{V}(I\in 3/0)=\vec{0}+\vec{\Omega}(3/0)\wedge\overrightarrow{CI}=\begin{pmatrix}\omega_3\\0\\0\end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}\wedge R\begin{pmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\\ 0\end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}=\begin{pmatrix}0\\0\\R\omega_3\cos\alpha\end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$\Rightarrow\vec{V}(I\in 3/0)=R\omega_3\cos\alpha\vec{z}$$

$$\Rightarrow\vec{V}(I\in 1/3)=(r_1\omega_1-R\omega_3\cos\alpha)\vec{z}$$

4/ Déterminer le vecteur vitesse de glissement en I' du plateau (2) par rapport à la bille (3).

$\vec{V}(I'\in 2/3) = \vec{V}(I'\in 2/0) - \vec{V}(I'\in 3/0)$

- $\vec{V}(I'\in 2/0) = -r_2\omega_2\vec{z}$
- $\vec{V}(I'\in 3/0) = \vec{V}(C\in 3/0) + \vec{\Omega}(3/0)\wedge\overrightarrow{CI'}$

$\overrightarrow{CI'} = R\vec{x}_1 = R(\sin\alpha\vec{x} - \cos\alpha\vec{y})$

$$\Rightarrow \vec{V}(I'\in 3/0) = \vec{0} + \vec{\Omega}(3/0)\wedge\overrightarrow{CI'} = \begin{pmatrix}\omega_3\\0\\0\end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \wedge R\begin{pmatrix}\sin\alpha\\-\cos\alpha\\0\end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \begin{pmatrix}0\\0\\-R\omega_3\cos\alpha\end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$\Rightarrow \vec{V}(I'\in 3/0) = -R\omega_3\cos\alpha\vec{z}$

$\Rightarrow \vec{V}(I'\in 2/3) = (R\omega_3\cos\alpha - r_2\omega_2)\vec{z}$

5/ En appliquant la condition de roulement sans glissement en I et en I' déduire le rapport des vitesses de rotation $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ en fonction de r_1 et r_2.

La condition de roulement sans glissement en I s'écrit : $\vec{V}(I\in 1/3) = \vec{0}$

$\Rightarrow (r_1\omega_1 - R\omega_3\cos\alpha)\vec{z} = \vec{0}$

$\Rightarrow r_1\omega_1 = R\omega_3\cos\alpha$ (EQ.1)

La condition de roulement sans glissement en I' : $\Rightarrow \vec{V}(I'\in 2/3) = \vec{0}$

$\Rightarrow (R\omega_3\cos\alpha - r_2\omega_2)\vec{z} = \vec{0}$

$\Rightarrow r_2\omega_2 = R\omega_3\cos\alpha$ (EQ.2)

Les deux équations (EQ.1) et (EQ.2) impliquent :

$\Rightarrow r_1\omega_1 = r_2\omega_2$ d'où : $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2}$

6/ On en déduit la vitesse de rotation ω_3 de la bille (3) par rapport au bâti (0) en fonction de la vitesse de rotation ω_1 du plateau moteur (1) par rapport au bâti (0).

$r_1\omega_1 = R\omega_3\cos\alpha$ $\Rightarrow \omega_3 = \frac{r_1\omega_1}{R\omega_3\cos\alpha}$

Exercice 10

1/ $\overrightarrow{O_1 J} = \overrightarrow{O_1 I} + \overrightarrow{I O_2} + \overrightarrow{O_2 J}$

$R_0 \vec{x}_3 = R_1 \vec{x}_3 + R_2 \vec{x}_3 + R_2 \vec{x}_3 \Rightarrow \boxed{R_0 = R_1 + 2R_2}$

2) $\left\{\mathcal{V}(S_1/S_3)\right\}_{O_1} = \left\{\mathcal{V}(S_1/S_0)\right\}_{O_1} - \left\{\mathcal{V}(S_3/S_0)\right\}_{O_1}$

$\left\{\mathcal{V}(S_1/S_0)\right\}_{O_1} = \left\{\begin{matrix} \omega_1 \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_{O_1}$; $\left\{\mathcal{V}(S_3/S_0)\right\}_{O_1} = \left\{\begin{matrix} \omega_3 \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_{O_1}$

$\Rightarrow \left\{\mathcal{V}(S_1/S_3)\right\}_{O_1} = \left\{\begin{matrix} (\omega_1 - \omega_3)\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_{O_1}$

$$\begin{aligned}\vec{V}(I \in S_1/S_3) &= \vec{V}(O_1 \in S_1/S_3) + \vec{\Omega}(S_1/S_3) \wedge \overrightarrow{O_1 I} \\ &= \vec{0} + (\omega_1 - \omega_3)\vec{z}_0 \wedge R_1 \vec{x}_3 \\ &= R_1(\omega_1 - \omega_3)\vec{y}_3\end{aligned}$$

3) $\vec{\gamma}(I \in S_1/S_3) = \left.\dfrac{d\vec{V}(I \in S_1/S_3)}{dt}\right|_{R_3} = R_1(\dot{\omega}_1 - \dot{\omega}_3)\vec{y}_3$

dans (R_0) on aura

$\vec{\gamma}(I \in S_1/S_3) = R_1(\dot{\omega}_1 - \dot{\omega}_3)(\cos\theta_3 \vec{y}_0 - \sin\theta_3 \vec{x}_0)$

4) $\left\{\mathcal{V}(S_2/S_3)\right\}_{O_2} = \left\{\begin{matrix}\vec{\Omega}(S_2/S_3) \\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_{O_2}$

car O_2 est sur l'axe de la liaison pivot entre (S_2) et (S_3).

$$\vec{\Omega}(S_2/S_3) = \vec{\Omega}(S_2/S_0) - \vec{\Omega}(S_3/S_0)$$
$$= (\omega_2 - \omega_3)\vec{z_0}$$

$$\Rightarrow \left\{\mathcal{V}(S_2/S_3)\right\}_{O_2} = \left\{\begin{matrix}(\omega_2 - \omega_3)\vec{z_0} \\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_{O_2}$$

$$\vec{V}(I \in S_2/S_3) = \vec{V}(O_2 \in S_2/S_3) + \vec{\Omega}(S_2/S_3) \wedge \vec{O_2 I}$$
$$= \vec{0} + (\omega_2 - \omega_3)\vec{z_0} \wedge -R_2\vec{x_3}$$
$$= -R_2(\omega_2 - \omega_3)\vec{y_3}.$$

5) $\vec{\gamma}(I \in S_2/S_3) = -R_2(\dot{\omega}_2 - \dot{\omega}_3)\vec{y_3}$

dans (R_0) :

$$\vec{\gamma}(I \in S_2/S_3) = -R_2(\dot{\omega}_2 - \dot{\omega}_3)(\cos\theta_3\vec{y_0} - \sin\theta_3\vec{z})$$

6) C.R.S.G en I :

$$\vec{V}(I\in S_2/S_1)=\vec{0} \Rightarrow \vec{V}(I\in S_2/S_3)-\vec{V}(I\in S_1/S_3)=\vec{0}$$

$$\Rightarrow -R_2(\omega_2-\omega_3)\vec{y}_3 - R_1(\omega_1-\omega_3)\vec{y}_3=\vec{0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\omega_1-\omega_3}{\omega_2-\omega_3} = -\frac{R_2}{R_1}}$$

7) C.R.S.G en J :

$$\vec{V}(J\in S_2/S_0)=\vec{0}$$

$\Rightarrow \vec{V}(J\in S_2/S_3)$ [redacted] $\vec{V}(J\in S_3/S_0)=\vec{0}$

avec :

$$\begin{aligned}\vec{V}(J\in S_2/S_3) &= \vec{V}(O_2\in S_2/S_3)+\vec{\Omega}(S_2/S_3)\wedge\overrightarrow{O_2J}\\ &= \vec{0} + (\omega_2-\omega_3)\vec{z}_0\wedge R_2\vec{x}_3\\ &= R_2(\omega_2-\omega_3)\vec{y}_3\end{aligned}$$

et

$\vec{V}(J\in S_3/S_0) = \vec{V}(O_1\in S_3/S_0)+\vec{\Omega}(S_3/S_0)\wedge\overrightarrow{O_1J}$

$= \vec{0} + \omega_3\vec{z}_0\wedge R$ [redacted] $\vec{x}_3$

$= R$ [redacted] $\omega_3\vec{y}_3$

d'où :

$$\vec{V}(J \in S_2 / S_0) = R_2 (\omega_2 - \omega_3)\vec{y_3} - R_0\, \omega_3 \vec{y_3} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\omega_3}{\omega_2 - \omega_3} = \frac{R_2}{R_0}}$$

8) on a : $\cancel{\frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{\omega_3}{\omega_2 - \omega_3}}$

$$\frac{\omega_1 - \omega_3}{\omega_2 - \omega_3} = -\frac{R_2}{R_1} \quad \text{et} \quad \frac{\omega_3}{\omega_2 - \omega_3} = \frac{R_2}{R_0}$$

en divisant la 1re relation sur la 2e

on obtient

$$\frac{\omega_1 - \omega_3}{\omega_3} = -\frac{R_2}{R_1}\frac{R_0}{R_2} = -\frac{R_0}{R_1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\omega_1}{\omega_3} = 1 - \frac{R_0}{R_1}} \boxed{= 1 - \frac{1}{K}} \boxed{= \frac{K-1}{K}}$$