École Normale Supérieure de Natitingou

MI-2 — 2019-2020

Travaux Dirigés : Probabilité et Statistique Inférentielle.

✍ Dr. Y. U. Gaba.

============== **Probabilité conditionnelle** =================

Exercice 1

Dans la salle des profs 60% sont des femmes ; une femme sur trois porte des lunettes et un homme sur deux porte des lunettes : quelle est la probabilité pour qu'un porteur de lunettes pris au hasard soit une femme?

===

Exercice 2

Un professeur oublie fréquemment ses clés. Pour tout n, on note : E_n l'événement ‘‘le jour n, le professeur oublie ses clés", $P_n = P(E_n)$, $Q_n = P(\overline{E_n})$.

On suppose que : $P_1 = a$ est donné et que si le jour n il oublie ses clés, le jour suivant il les oublie avec la probabilité $\frac{1}{10}$; si le jour n il n'oublie pas ses clés, le jour suivant il les oublie avec la probabilité $\frac{4}{10}$.

Montrer que $P_{n+1} = \frac{1}{10}P_n + \frac{4}{10}Q_n$. En déduire une relation entre P_{n+1} et P_n

Quelle est la probabilité de l'événement ‘‘le jour n, le professeur oublie ses clés" ?

===

Exercice 3

Dans les barres de chocolat N., on trouve des images équitablement réparties des cinq personnages du dernier Walt Disney, une image par tablette. Ma fille veut avoir le héros Princecharmant : combien dois-je acheter de barres pour que la probabilité d'avoir la figurine attendue dépasse 80%? Même question pour être sûr à 90%.

===

Exercice 4

Un constructeur aéronautique équipe ses avions trimoteurs d'un moteur central de type A et de deux moteurs, un par aile, de type B; chaque moteur tombe en panne indépendamment d'un autre, et on estime à p la probabilité pour un moteur de type A de tomber en panne et à q la probabilité pour un moteur de type B de tomber en panne.

Le trimoteur peut voler si le moteur central ou les deux moteurs d'ailes fonctionnent : quelle est la probabilité pour l'avion de voler? Application numérique : $p = 0.001\%$, $q = 0.02\%$.

===

Exercice 5

On sait qu'à une date donnée, 3% d'une population est atteinte d'hépatite On dispose de tests de dépistage de la maladie :

| Si la personne est malade, alors le test est positif avec une probabilité de 95%.
| Si la personne est saine, alors le test est positif avec une probabilité de 10%.

1. Quelle est la probabilité pour une personne d'être malade si son test est positif ?
2. Quelle est la probabilité pour une personne d'être saine si son test est positif ?
3. Quelle est la probabilité pour une personne d'être malade si son test est négatif ?
4. Quelle est la probabilité pour une personne d'être saine si son test est négatif ?

===

============== **Variables aléatoires discrètes** ================

Exercice 6

Une entreprise pharmaceutique décide de faire des économies sur les tarifs d'affranchissements des courriers publicitaires à envoyer aux clients. Pour cela, elle décide d'affranchir, au hasard, une proportion de 3 lettres sur 5 au tarif urgent, les autres au tarif normal.

1. Quatre lettres sont envoyées dans un cabinet médical de quatre médecins : quelle est la probabilité des événements :
   A : "Au moins l'un d'entre eux reçoit une lettre au tarif urgent".
   B : "Exactement 2 médecins sur les quatre reçoivent une lettre au tarif urgent".
2. Soit X la variable aléatoire : "nombre de lettres affranchies au tarif urgent parmi 10 lettres" : Quelle est la loi de probabilité de X, quelle est son espérance, quelle est sa variance ?

===

Exercice 7

On prend au hasard, en même temps, trois ampoules dans un lot de 15 dont 5 sont défectueuses. Calculer la probabilité des événements :

A : au moins une ampoule est défectueuse ;
B : les 3 ampoules sont défectueuses ;
C : exactement une ampoule est défectueuse.

===

Exercice 8

Un avion peut accueillir 20 personnes ; des statistiques montrent que 25% clients ayant réservé ne viennent pas. Soit X la variable aléatoire : "nombre de clients qui viennent après réservation parmi 20". Quelle est la loi de X ? (on ne donnera que la forme générale) quelle est son espérance, son écart-type ? Quelle est la probabilité pour que X soit égal à 15 ?

===

Exercice 9

L'oral d'un concours comporte au total 100 sujets ; les candidats tirent au sort trois sujets et choisissent alors le sujet traité parmi ces trois sujets. Un candidat se présente en ayant révisé 60 sujets sur les 100.

1. Quelle est la probabilité pour que le candidat ait révisé :
   (a) les trois sujets tirés ;
   (b) exactement deux sujets sur les trois sujets ;
   (c) aucun des trois sujets.
2. Définir une variable aléatoire associée à ce problème et donner sa loi de probabilité, son espérance.

===

============== **Loi normale et approximations** ================

Exercice 10

Une usine fabrique des billes de diamètre 8mm. Les erreurs d'usinage provoquent des variations de diamètre. On estime, sur les données antérieures, que l'erreur est une variable aléatoire qui obeit à une loi normale les paramètres étant : moyenne: 0mm, écart-type: 0.02mm. On rejette les pièces dont le diamètre n'est pas compris entre 7.97mm et 8.03mm. Quelle est la proportion de billes rejetées?

===

Exercice 11

Des machines fabriquent des plaques de tôle destinées à être empilées.

1. Soit X la variable aléatoire ‘‘épaisseur de la plaque en mm" ; on suppose que X suit une loi normale de paramètres $m = 0.3$ et $\sigma = 0.1$. Calculez la probabilité pour que X soit inférieur à 0.36mm et la probabilité pour que X soit compris entre 0.25 et 0.35mm.
2. L'utilisation de ces plaques consiste à en empiler n, numérotées de 1 à n en les prenant au hasard : soit X_i la variable aléatoire ‘‘épaisseur de la plaque numéro i en mm" et Z la variable aléatoire ‘‘épaisseur des n plaques en mm". Pour $n = 20$, quelle est la loi de Z, son espérance et sa variance?

==

Exercice 12

Des machines fabriquent des plaques de tôle destinées à être empilées; on estime à 0.1% la proportion de plaques inutilisables. L'utilisation de ces plaques consiste à en empiler n, numérotées de 1 à n en les prenant au hasard. Pour $n = 2000$, quelle est la loi suivie par la variable aléatoire N <<nombre de plaques inutilisables parmi les 2000>> ? (on utilisera une loi de probabilité adaptée); quelle est la probabilité pour que N soit inférieure ou égal à 3 ? Quelle est la probabilité pour que N soit strictement inférieure à 3?

==

Exercice 13

Sur un grand nombre de personnes on a constaté que la répartition du taux de cholestérol suit une loi normale avec les résultats suivants:
- 56% ont un taux inférieur à 165 cg;
- 34% ont un taux compris entre 165 cg et 180 cg;
- 10% ont un taux supérieur à 180 cg.

Quelle est le nombre de personnes qu'il faut prévoir de soigner dans une population de $10\,000$ personnes, si le taux maximum toléré sans traitement est de 182 cg?

==

============== **Tendance de la loi binomiale vers la loi normale** ================

Exercice 14

On effectue un contrôle de fabrication sur des pièces dont une proportion $p = 0.02$ est défectueuse.

1. On contrôle un lot de 1000 pièces :
   Soit X la variable aléatoire: ‘‘nombre de pièces défectueuses parmi 1000". Quelle est la vraie loi de X ? (on ne donnera que la forme générale); quel est son espérance, son écart-type ?
2. En approchant cette loi par celle d'une loi normale adaptée, calculez la probabilité pour que X soit compris entre 18 et 22 ($P[18 \leq X \leq 22]$) ; on fera les calculs avec et sans correction de continuité. On fera également les calculs avec la vraie loi pour comparer.

==

Exercice 15

On effectue un contrôle sur des pièces de un euro dont une proportion $p = 0,05$ est fausse et sur des pièces de 2 euros dont une proportion $p' = 0,02$ est fausse. Il y a dans un lot 500 pièces dont 150 pièces de un euro et 350 pièces de 2 euros.

1. On prend une pièce au hasard dans ce lot: quelle est la probabilité qu'elle soit fausse?
2. Sachant que cette pièce est fausse, quelle est la probabilité qu'elle soit de un euro?
3. On contrôle à présent un lot de 1000 pièces de un euro. Soit X la variable aléatoire: <<nombre de pièces fausses parmi 1000>>. Quelle est la vraie loi de X ? (on ne donnera que la forme générale); quelle est son espérance, son écart-type?
4. En approchant cette loi par celle d'une loi normale adaptée, calculez la probabilité pour que X soit compris entre 48 et 52.

==

=============== **Estimation et intervalle de confiance** ================

Exercice 16

Un échantillon de $10\,000$ personnes sur une population étant donné, on sait que le taux moyen de personnes à soigner pour un problème de cholestérol élevé est de $7,5\%$. Donner un intervalle dans lequel on soit <<sûr>> à 95%, de trouver le nombre exact de personnes à soigner sur les $10\,000$.

==

Exercice 17

Un vol Natitingou - Cotonou est assuré par un Airbus de 150 places ; pour ce vol des estimations ont montré que la probabilité pour qu'une personne confirme son billet est $p = 0.75$. La compagnie vend n billets, $n > 150$. Soit X la variable aléatoire <<nombre de personnes parmi les n possibles, ayant confirmé leur réservation pour ce vol>>.

1. Quelle est la loi exacte suivie par X ?
2. Quel est le nombre maximum de places que la compagnie peut vendre pour que, à au moins 95%, elle soit sûre que tout le monde puisse monter dans l'avion, c'est-à-dire n tel que : $P[X > 150] \leq 0.05$?
3. Reprendre le même exercice avec un avion de capacité de 300 places; faites varier le paramètre $p = 0.5$; $p = 0.8$.

==

Exercice 18

Un petit avion (liaison Parakou-Djougou) peut accueillir chaque jour 30 personnes; des statistiques montrent que 20% des clients ayant réservé ne viennent pas. Soit X la variable aléatoire: ''nombre de clients qui se présentent au comptoir parmi 30 personnes qui ont réservé".

1. Quelle est la loi de X ? (on ne donnera que la forme générale); quelle est son espérance, son écart-type ?
2. Donner un intervalle de confiance au seuil 95%, permettant d'estimer le nombre de clients à prévoir.

==

Exercice 19

Le staff médical d'une grande entreprise fait ses petites statistiques sur le taux de cholestérol de ses employés; les observations sur 100 employés tirés au sort sont les suivantes.

taux de cholestérol en cg:(centre classe)	effectif d'employés:
120	9
160	22
200	25
240	21
280	16
320	7

1. Calculer la moyenne m_e et l'écart-type σ_e sur l'échantillon.
2. Estimer la moyenne et l'écart-type pour le taux de cholestérol dans toute l'entreprise.
3. Déterminer un intervalle de confiance pour la moyenne.
4. Déterminer la taille minimum d'échantillon pour que l'amplitude de l'intervalle de confiance soit inférieure à 10.

==

Exercice 20

Sur $12\,000$ individus d'une espèce, on a dénombré 13 albinos. Estimer la proportion d'albinos dans l'espèce. On comparera les méthodes d'approximation des lois réelles par d'autres lois classiques.